Tutti gli esercizi assegnati fino ad ora

Prima lezione

Esercizio (per la fine del corso)
Dimostra il teorema di Cantor–Lebesgue.

Seconda lezione

Esercizi: esprimi queste proposizioni mediante formule insiemistiche pure

- gli elementi degli elelementi di A sono elementi di A
- B è l'insieme dei sottoinsiemi di A
- l'unione degli elementi di A è l'intersezione di quelli di B

  (qui assumi che unione e intersezione esistano e siano uniche)
- ogni insieme è disgiunto da uno dei suoi elementi

Esercizio Dimostra

$$\neg\neg\Phi \equiv \Phi \qquad \Phi \wedge (\Psi \vee \Theta) \equiv (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Theta)$$

$$\Phi \vee (\Psi \wedge \Theta) \equiv (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \Theta)$$

$$\neg(\Phi \wedge \Psi) \equiv \neg\Phi \vee \neg\Psi \qquad \Phi \to \neg\Psi \equiv \Psi \to \neg\Phi$$

$$\neg(\Phi \vee \Psi) \equiv \neg\Phi \wedge \neg\Psi \qquad \Phi \to \Psi \equiv \neg\Psi \to \neg\Phi$$

Esercizio Convinciti della validità delle equivalenze seguenti:

$$\neg\forall x\, \Phi \equiv \exists x \neg\Phi \qquad \neg\forall x \neg\Phi \equiv \exists x\, \Phi$$

$$\neg\exists x\, \Phi \equiv \forall x \neg\Phi \qquad \neg\exists x \neg\Phi \equiv \forall x\, \Phi$$

Esercizio Dimostra che

$$\neg \forall x \in A \; \Phi \equiv \exists x \in A \; \neg \Phi \qquad \neg \exists x \in A \; \Phi \equiv \forall x \in A \; \neg \Phi$$

Esercizio Dimostra che

$$\forall x \; (x \in A \to x \in B) \equiv \neg \exists x \; (x \in A \wedge \neg x \in B)$$

Esercizio Secondo te, la seguente formula è vera?

$$\forall A \left((\exists x \; x \in A) \to \forall B \; \exists x \in A \; (x \in B \to \forall y \in A \; y \in B) \right)$$

Esercizio: dimostra che l'implicazione

$$\forall a \; \forall b \quad a = b \to \forall x \; (x \in a \leftrightarrow x \in b)$$

segue dal fatto che se $a = b$ allora a e b sono indistinguibili.

Esercizio: Verifica che se $\Psi \leftrightarrow \Phi$ e $\Phi \leftrightarrow \Theta$, allora $\Psi \leftrightarrow \Theta$.

Terza lezione

Esercizio Dimostra che, fissati a e b, l'insieme $\{a, b\}$ è univocamente determinato:

$$\forall a \; \forall b \; \exists! P \; \forall x \quad x \in P \leftrightarrow (x = a \vee x = b)$$

Esercizio Dimostra che

$$(a, b, c) = (a', b', c') \leftrightarrow a = a' \wedge b = b' \wedge c = c'$$

convinciti che, dato un qualunque n esplicito, potresti dimostrare

$$(a_1 \dots a_n) = (a_1' \dots a_n') \leftrightarrow a_1 = a_1' \wedge \dots \wedge a_n = a_n'$$

Esercizio Dimostra che

$$\forall A\ \exists! B\ \forall x\ x \in B \leftrightarrow \exists y \in A\ x \in y$$

Esercizio Dimostra che l'assioma dell'unione segue da

$$\forall A\ \exists B\ \forall y \in A\ \forall x \in y\ x \in B$$

Esercizio Dimostra che $x \in a \cap b \leftrightarrow (x \in a \wedge x \in b)$

Esercizio Dimostra che

$$x \in \{a, b, c\} \leftrightarrow (x = a \vee x = b \vee x = c)$$

$$x \in \{a_1, \dots, a_n\} \leftrightarrow (x = a_1 \vee \dots \vee x = a_n)$$

Esercizio Dimostra che una relazione di ordine stretto $<$ su A è automaticamente asimmetrica: $\forall x, y \in A\ x < y \to \neg(y < x)$

Esercizio Formula la definizione di ordine totale per ordini stretti.

Esercizio Data R relazione di equivalenza/ordine su A e $A' \subseteq A$ dimostra che $R|_{A' \times A'}$ è una relazione di equivalenza/ordine su A'.

Esercizio Date $g : A \to B$ e $f : B \to C$, sotto quali condizioni $f \circ g$ è iniettiva, suriettiva, biiettiva?

Esercizio Data una relazione di equivalenza $\sim$ su A, dimostra

che esiste un insieme $A/\sim$ ed una funzione surgettiva $i_\sim$ da A a $A/\sim$ tale che $\forall x,y \in A \quad x \sim y \leftrightarrow i_\sim(x) = i_\sim(y)$

Esercizio: Data una relazione di equivalenza $\sim$ su A e $f : A \to B$, affinché esista $\tilde{f} : A/\sim \to B$ tale che $f = \tilde{f} \circ i_\sim$, è necessario e sufficiente che $\forall x,y \in A \quad x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$.

Quarta lezione

Esercizio Dimostra che $0, 1, 2, 3 \in \omega$ dove

$0 \overset{\text{def}}{\equiv} \emptyset \quad 1 \overset{\text{def.}}{\equiv} s(0) \quad 2 \overset{\text{def}}{\equiv} s(1) \quad 3 \overset{\text{def.}}{\equiv} s(2)$ &c.

Esercizio Dimostra che $\{\{\emptyset\}\} \notin \omega$

Idea Esibisci un insieme induttivo che non contiene $\{\{\emptyset\}\}$.

Esercizio Dimostra che $X = s(s(s(\omega)))$ è ben ordinato dalla relazione $a < b \overset{\text{def.}}{\equiv} a \in b$.

Quinta lezione

Esercizio Costruisci la successione di Fibonacci, F_n, usando la prima forma del teorema di ricorsione numerabile.

Esercizio: dimostra commutatività associatività &c. di $+$ e $\cdot$ su ω usando le definizioni induttive.

Esercizio Dimostra che la relazione $|\cdot| = |\cdot|$ soddisfa

Le proprietà formali di una relazione di equivalenza:

riflessività: $|A| = |A|$

simmetria: $|A| = |B| \to |B| = |A|$

transitività: $|A| = |B| \wedge |B| = |C| \to |A| = |C|$

Esercizio Dimostra che la relazione $|\cdot| \leq |\cdot|$ è:

riflessiva: $|A| \leq |A|$

transitiva: $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C| \to |A| \leq |C|$

Inoltre è compatibile con la relazione di equipotenza

$$|A| = |B| \to |A| \leq |B|$$

Settima lezione

Esercizi Dimostra che:

- se $|A| < |n|$ con $n \in \omega$, allora $|A| = |m|$ per qualche $m < n$
- se A è finito e $f : A \to B$, allora $f[A]$ è finito.

Esercizio Dimostra che se $m, n \in \omega$ e $m \leq n$, esiste un unico $n - m \in \omega$ tale che $m + (n - m) = n$. In due modi diversi.

Ottava lezione

Esercizio Definiamo $\mathbb{Z}$ come l'insieme delle classi di equivalenza su $\omega \times \omega$ indotte dalla relazione

$$(a, b) \sim_{\mathbb{Z}} (a', b') \overset{\text{def}}{\equiv} a + b' = b + a'$$ morale: "$(a, b) = a - b$"

Dimostra che $\sim_{\mathbb{Z}}$ è una relazione di equivalenza

Esercizio Definiamo $+, -$ e $\cdot$ su $\mathbb{Z}$ mediante

$$[(a,b)]_{\mathbb{Z}} + [(a',b')]_{\mathbb{Z}} \overset{\text{def.}}{=} [(a+a', b+b')]_{\mathbb{Z}}$$

$$-[(a,b)]_{\mathbb{Z}} \overset{\text{def.}}{=} [(b,a)]_{\mathbb{Z}}$$

$$[(a,b)]_{\mathbb{Z}} \cdot [(a',b')]_{\mathbb{Z}} \overset{\text{def.}}{=} [(a\cdot a' + b\cdot b', a\cdot b' + b\cdot a')]_{\mathbb{Z}}$$

dimostra che $\mathbb{Z}$, con queste operazioni, è un anello commutativo con identità $1 \overset{\text{def.}}{=} [(1,0)]_{\mathbb{Z}}$

Esercizio Definiamo $\mathbb{Q}$ come l'insieme delle classi di equivalenza su $\mathbb{Z} \times (\omega \setminus \{0\})$ indotte dalla relazione

$$(n,d) \sim_{\mathbb{Q}} (n',d') \overset{\text{def.}}{\equiv} n\cdot d' = d\cdot n' \qquad \text{morale: } "(n,d) = \tfrac{n}{d}"$$

Dimostra che $\sim_{\mathbb{Q}}$ è una relazione di equivalenza

Esercizio Definisci $+, -, \cdot$ e $\square^{-1}$ su $\mathbb{Q}$ nella maniera ragionevole e dimostra che $\mathbb{Q}$ è un campo.

Esercizio Definisci la relazione $<$ su $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ dicendo che $q \in \mathbb{Q}$ è positivo se $q = [(n,d)]_{\mathbb{Q}}$, con $n, d \in \omega \setminus \{0\}$, e dicendo che $a < b$ se e solo se $b - a$ è positivo. Dimostra che questo è un ordine totale e denso, cioè

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \quad a < b \to \exists c \in \mathbb{Q} \quad a < b < c.$$

Esercizio Dato un insieme X, una funzione $f : X^2 \to X$, e un sottoinsieme $A \subseteq X$ al più numerabile, dimostra che esiste

un $\bar{A} \subseteq X$ al più numerabile tale che $f[\bar{A} \times \bar{A}] \subseteq \bar{A}$. (Concludi che un gruppo finitamente generato è al più numerabile.)

Nona lezione

Esercizio Dimostra che se $(A, <)$ è denso e $2 \leq |A| \leq \aleph_0$, allora $(A, <)$ è isomorfo a uno dei seguenti intervalli di $\mathbb{Q}$.

$[0,1]_{\mathbb{Q}}$ $\quad$ $]0,1]_{\mathbb{Q}}$ $\quad$ $[0,1[_{\mathbb{Q}}$ $\quad$ $]0,1[_{\mathbb{Q}}$

Esercizio Dimostra che esiste un grafo random, ed è unico a meno di isomorfismi.

Esercizio Dimostra, usando solo le proprietà di $\mathbb{Q}$, che l'insieme $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ non ha un estremo superiore in $\mathbb{Q}$.

Decima lezione

Esercizi: determina le seguenti cardinalità.

- $|$numeri irrazionali$|$
- $|$reali trascendenti$|$
- $|$sottoinsiemi infiniti di $\omega|$
- $|$sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}|$
- $|$sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}|$
- $|$successioni di naturali$|$
- $|$successioni crescenti di naturali$|$

- $|$successioni di reali$|$
- $|$successioni crescenti di reali$|$
- $|$succ. definitivamente costanti di naturali
- $|$successioni periodiche di naturali$|$
- $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$
- $|$funzioni continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}|$
- $|$funzioni crescenti $\mathbb{R} \to \mathbb{R}|$

Definizione A è una partizione di B se $\bigcup A = B$, $\emptyset \notin A$ e $\forall x, y \in A \quad x \cap y = \emptyset$.

- $|$partizioni di $w|$
- $|$partizioni finite di $w|$
- $|$partizioni di w in parti finite$|$
- $|$partizioni di w in parti infinite$|$
- $|$sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}|$

Delle seguenti a quali è possibile rispondere, assumendo che, senza la scelta, non si può dire se valga o no $|$sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$?

- $|$sottoins. di $\mathbb{R} \sim (w, c)$ con l'ordinamento indotto$|$
- $|$sottoins. di $\mathbb{R} \sim \mathbb{Q}$ con l'ordinamento indotto$|$
- $|$sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ ben ordinati dall'ordinamento indotto$|$