Paradosso di Russell

$\{ x \mid \text{proprietà ben definita di } x \}$

$N = \{ \text{insiemi } x \mid x \notin x \}$

$N \in N \iff N \notin N$ ↯

Paradosso di Berry

- c'è un numero finito di parole italiane.

↳ • esiste un num. finito di frasi di < 100 parole

- esiste un num. finito di numeri naturali definibili con meno di 100 parole

"il minimo numero naturale che non sia definibile con meno di cento parole italiane" ↯

Scopi del corso

- Fondare la matematica tramite la (ZFC)
- Studiare determinate tecniche
  - cardinalità
  - numeri ordinali
  - ricorsione, induzione transfinita.

Formule insiemistiche

- variabili: $x, y, z,\ a, b, c,\ A, B, C,\ \alpha, \beta, \gamma \ldots$

denotano insiemi

- formule atomiche:

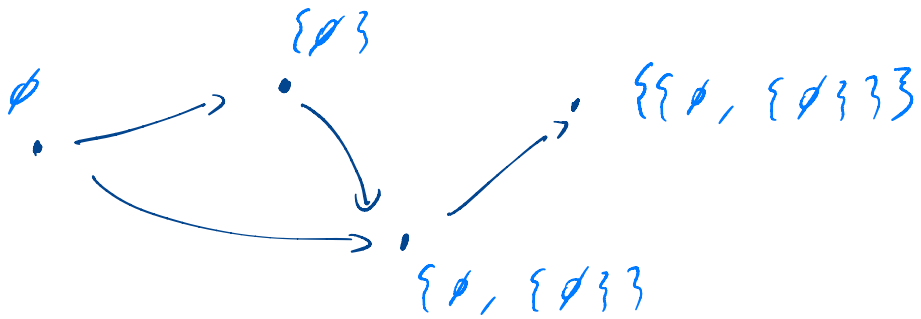
$var = var$ $\qquad$ $var \in var$

- combinazioni booleane

$\neg(formula)$ $\qquad$ $(for.) \wedge (for.)$ $\qquad$ $(for.) \vee (for.)$

- quantificazioni

$\exists x\,(formula)$ $\qquad$ $\forall x\,(formula)$



Esempi

"a è un elemento di un elemento di b"

$\exists x\,(x \in b \wedge a \in x)$

"a è sottoinsieme di b"

$\neg \exists x \; x \in a \wedge \neg x \in b$ $\qquad a \subseteq b$

$\forall x \; x \in a \to x \in b$

Abbreviazioni

$x \neq y \overset{def}{\equiv} \neg x = y$ $\qquad x \notin y \overset{def.}{\equiv} \neg x \in y$

$\nexists x \; \phi \overset{def.}{\equiv} \neg \exists x \; \phi$

$\phi \to \psi \overset{def.}{\equiv} \neg(\phi \wedge \neg \psi)$ $\qquad \psi \vee \neg \phi$

$\phi \leftrightarrow \psi \overset{def}{\equiv} (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$

"ϕ e ψ hanno lo stesso v. di verità"

$\exists x \in A \; \phi \overset{def.}{\equiv} \exists x \; (x \in A \wedge \phi)$

$\forall x \in A \; \phi \overset{def.}{\equiv} \forall x \; (x \in A \to \phi)$

$\exists! x \; \phi(x) \overset{def.}{\equiv} \exists x \; (\phi(x) \wedge \forall y \; (\phi(y) \to y = x))$

$\exists! x \in A \; \phi(x) \overset{def.}{\equiv} \exists! x \; (x \in A \wedge \phi(x))$

$A \subseteq B \overset{def.}{\equiv} \forall x \in A \; x \in B$

$C = A \cap B \overset{def.}{\equiv} \forall x \; x \in C \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$

$C = A \cup B \overset{def.}{\equiv} \forall x \; x \in C \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$

Esercizi: esprimi queste proposizioni mediante formule insiemistiche pure

- gli elementi degli elelementi di A sono elementi di A
- B è l'insieme dei sottoinsiemi di A
- l'unione degli elementi di A è l'intersezione di quelli di B

  (qui assumi che unione e intersezione esistano e siano uniche)
- ogni insieme è disgiunto da uno dei suoi elementi

"Regole di inferenza"

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	$\varphi \wedge \psi$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$
V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V

$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

$\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$

$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$

$\neg(\varphi \overset{\vee}{\wedge} \psi) \equiv \neg\varphi \overset{\wedge}{\vee} \neg\psi$

$\psi \to \neg\varphi \equiv \varphi \to \neg\psi$

$\neg \exists x\, \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$

$\neg \forall x\, \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$

Esercizio Dimostra che

$\neg \forall x \in A \; \Phi \equiv \exists x \in A \; \neg \Phi$ $\qquad$ $\neg \exists x \in A \; \Phi \equiv \forall x \in A \; \neg \Phi$

Esercizio Dimostra che

$\forall x \; (x \in A \to x \in B) \equiv \neg \exists x \; (x \in A \wedge \neg x \in B)$

Esercizio Secondo te, la seguente formula è vera?

$\forall A \left((\exists x \; x \in A) \to \forall B \; \exists x \in A \; (x \in B \to \forall y \in A \; y \in B) \right)$

$x = y \to (\Phi(x) \leftrightarrow \Phi(y))$

I primi assiomi

① Assioma dell'insieme vuoto

"esiste un insieme vuoto"

$\exists x \; \forall y \; y \notin x$

③ Assioma di estensionalità

"un insieme è determinato dai suoi elementi"

"se a e b hanno gli stessi elementi, $a = b$"

$\forall a \; \forall b \quad a = b \leftrightarrow (\forall x \; x \in a \leftrightarrow x \in b)$

Prop. esiste un unico insieme vuoto

$\exists! x \; \forall y \; y \notin x$

Dim Siano x_1 e x_2 insiemi vuoti

$$\forall y \quad y \notin x_1 \qquad \forall y \quad y \notin x_2$$

$$(\forall y \quad y \in x_1 \leftrightarrow y \in x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

F F

V

6

Notazione

$$x = \emptyset \overset{\text{def.}}{\equiv} \forall y \; y \notin x$$

$$\emptyset \in y \overset{\text{def}}{\equiv} \exists x \; x = \emptyset \wedge x \in y$$

(3) **Assioma di separazione** ← schema di assiomi

"Dato A ins. e $\Phi(x)$ form. esiste $\{x \in A \mid \Phi(x)\}$"

$$\forall A \; \exists B \; \forall x \quad x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x))$$

Prop.

$$\forall A \; \exists! B \; \forall x \quad x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x))$$

Dim Fissiamo A, siano B_1 e B_2 tali che

$$\forall x \quad x \in B_1 \leftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x))$$

$$\forall x \quad x \in B_2 \leftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x))$$

$$x \in B_1 \leftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x)) \leftrightarrow x \in B_2$$

$\to$ per estensionalità $B_1 = B_2$ ☐

Notazione

$$B = \{x \in A \mid \phi(x)\} \overset{\text{def.}}{\equiv} \forall x \; x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \phi(x))$$

Prop Non esiste l'insieme di tutti gli insiemi

$$\neg \exists V \; \forall x \; x \in V$$

Dim Per assurdo, supponiamo che $\forall x \; x \in V$

$$N = \{x \in V \mid x \notin x\}$$

$$\forall x \; x \in N \leftrightarrow (x \in V \wedge x \notin x)$$

$$N \in N \leftrightarrow (\underbrace{N \in V}_{V} \wedge N \notin N)$$

$$N \in N \leftrightarrow N \notin N$$ ↯

Classi (proprie)

Data una formula ϕ possiamo def. una classe C scrivendo

$$x \in C \overset{\text{def}}{\equiv} \phi(x)$$

Prop $x \in V \overset{\text{def.}}{\equiv} x = x$

Def Siano C e D classi

$$C = D \overset{\text{def.}}{\equiv} \forall x \; x \in C \leftrightarrow x \in D$$

Dato un insieme A posso considerare la formula $x \in A$ indico con $\hat{A}$ la classe definita da questa formula.

$$\hat{A} = \hat{B} \equiv \forall x \quad x \in \hat{A} \leftrightarrow x \in \hat{B}$$

$$\| \text{!}$$

$$\forall x \quad x \in A \leftrightarrow x \in B$$

$$\Downarrow$$

$$A = B$$

Def Una *classe propria* è una classe che non è un insieme.

Es. V è una classe propria.