L'assioma dell'infinito e i numeri naturali

$0 = \emptyset$ $\quad 1 = \{\emptyset\}$ $\quad 2 = \{\{\emptyset\}\}$ $\quad n = \{\{\in \ldots \emptyset \ldots\}\}$

n parentesi

$0 = \emptyset$

$1 = \{0\} = \{\emptyset\}$

$2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\vdots$

$n+1 = \{0 \ldots n\}$

Def. $\quad s(n) \overset{\text{def.}}{\equiv} n \cup \{n\}$

Def. $\quad A$ è induttivo se

$\emptyset \in A \quad \forall x \in A \; s(x) \in A$

(7) Assioma dell'infinito

"Esiste un insieme induttivo"

$\exists A \, (\emptyset \in A \wedge \forall x \in A \; s(x) \in A)$

Def $\quad \omega$ è l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi.

Prop. equivalente Sia A un qualunque insieme induttivo

$$\omega = \{x \in A \mid \forall B \text{ induttivo } x \in B\}$$

$$= x \in \{x \in A' \mid \text{---} \}$$

Es. $\{\{\emptyset\}\} \notin \omega$

—

Assiomi di Peano

Sia $\mathbb{N}$ un insieme

$0 \in \mathbb{N}$

$succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Diciamo che $(\mathbb{N}, 0, succ)$ soddisfa gli assiomi di Peano se

A. $\forall m, n \in \mathbb{N} \quad succ(m) = succ(n) \to m = n$

B. $\nexists n \in \mathbb{N} \quad succ(n) = 0$

C. Data una qualunque proprietà (formula) $\Phi(x)$

$$(\Phi(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N} \; \Phi(n) \to \Phi(succ(n))) \to \forall n \in \mathbb{N} \; \Phi(n)$$

Axiomata.

1. $1 \in N.$
2. $a \in N . \supset . a = a.$
3. $a, b, c \in N . \supset : a = b . = . b = a.$
4. $a, b \in N . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c.$
5. $a = b . b \in N : \supset . a \in N.$
6. $a \in N . \supset . a + 1 \in N.$
7. $a, b \in N . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1.$
8. $a \in N . \supset . a + 1 - = 1.$
9. $k \in K \therefore 1 \in k \therefore x \in N . x \in k : \supset_x . x + 1 \in k : : \supset . N \supset k.$

$$(\forall K \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \; 1 \in K \wedge (\forall x \in \mathbb{N} \; x \in K \to x+1 \in K)) \to K \subseteq \mathbb{N}$$

Teo $(w, \emptyset, succ)$ soddisfa gli assiomi di Peano.

$$\{(x,y) \in w \times w \mid y = s(x)\}$$

Dim

- Controlliamo che $n \in w \to s(n) \in w$.

  $n \in w \iff \forall A$ induttivo $n \in A$

  Consideriamo un qualsiasi A induttivo

  $n \in A \iff s(n) \in A$

  Per l'arbitrarietà di A $\forall A$ induttivo $s(n) \in A$

  $\iff s(n) \in w.$

1. ~~$\exists$~~ $n \in \mathbb{N}$ $succ(n) = 0$

   Per assurdo consideriamo un tale n

   $succ(n) = n \cup \{n\} \ni n$

   $\Rightarrow succ(n) \neq \emptyset$ ↯

C. $\left(\Phi(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ \Phi(n) \to \Phi(succ(n))\right) \to \forall n \in \mathbb{N}\ \Phi(n)$

Assumiamo $\cdot\ \Phi(\emptyset)$
$\cdot\ \forall n \in \omega\ \Phi(n) \to \Phi(succ(n))$
$\Rightarrow \forall n \in \omega\ \Phi(n)$ (*)

$A = \{n \in \omega \mid \Phi(n)\}$ dimostro che A è induttivo.

(poi ho finito perché $\omega \subseteq A$, quindi (*))

$\emptyset \in A \iff \Phi(\emptyset)$

$n \in A \to succ(n) \in A \iff \Phi(n) \to \Phi(succ(n))$

A. Lemma $\bigcup S(n) = n$

$S(n) = S(m) \Rightarrow \bigcup S(n) = \bigcup S(m)$
($\bigcup S(n) = n$, $\bigcup S(m) = m$)

Lemma $\bigcup n \subseteq n$

Dim induzione su n.

- $n = 0$. $\bigcup \emptyset = \emptyset \subseteq \emptyset$.

- $n = succ(m)$ $\bigcup succ(m) = \bigcup (m \cup \{m\}) = (\bigcup m) \cup m$

prendi $x \in \bigcup succ(m)$ ossia $x \in (\bigcup m) \cup m$

devo dire che $x \in succ(m)$

Per ass. $x \in \bigcup m \to x \in m$
$x \in m$
$\Big\} \ x \in m \cup \{m\} = succ(m)$

□

Lemma

Lemma $\bigcup succ(n) = n$

$\bigcup succ(n) = \bigcup (n \cup \{n\}) = (\bigcup n) \cup n = n$

($\bigcup n \subseteq n$)

$\bigcup (n \cup \{n\}) = (\bigcup n) \cup n$

$x \in \bigcup (n \cup \{n\}) \iff \exists y \in n \cup \{n\} \quad x \in y$

$\iff (\exists y \in n \quad x \in y) \vee (x \in n)$

$\iff (x \in \bigcup n) \vee (x \in n)$

$\iff x \in (\bigcup n) \cup n$

Prop Dati $m, n \in \omega$

$m < n \overset{def.}{\iff} m \in n.$

Prop Quello è un ordine totale su ω.

Oss $m \in n \to m \in S(n)$ $\quad m \in \underbrace{n \cup \{n\}}_{n}$

$m \in S(n) \to \underline{m \in n} \vee m = n$

$\hookrightarrow m \in n \cup \{n\}$

Claim $m \in n \to (s(m) \in n \vee s(m) = n)$

Pf induzione su n.

$n = \emptyset$. $m \in \emptyset \to \dots$ vera a vuoto!

$n = a+1$. I.p. ind. $m \in a \to (s(m) \in a \vee s(m) = a)$

Dobbiamo dim. $m \in s(a) \to (s(m) \in s(a) \vee s(m) = s(a))$

Supponiamo $m \in s(a)$

$\hookrightarrow m \in a \vee m = a$

- $m \in a \Rightarrow s(m) \in a \vee s(m) = a \to s(m) \wedge s(a)$
- $m = a \Rightarrow s(m) = s(a)$

Cor. $\forall n \in w \quad n = \{x \in w \mid x < n\}$

Pf $n \cap w = \{x \in w \mid x < n\}$

$\quad\quad\quad

Teo (Principio di induzione — forma forte)

$$\left(\forall n \in \omega \ \left(\forall x < n \ \Phi(x)\right) \to \Phi(n)\right) \to \forall n \in \omega \ \Phi(n)$$

Dim

$$\Psi(n) \overset{def.}{\equiv} \forall x < n \ \Phi(x)$$

$$\Psi(s(n)) \equiv \forall x < s(n) \ \Phi(x) \Rightarrow \Phi(n)$$

- $\Psi(\emptyset)$ $\quad \forall x < \emptyset \ \ldots$ vera a vuoto.
- $\Psi(s(n))$ $\quad \dfrac{\forall x \ \ x < n \to \Phi(x) \longrightarrow \Phi(n)}{\forall x \ \ x < s(n) \to \Phi(x)}$

  $\hookrightarrow x < n \ \vee \ x = n$

  - $x < n \Rightarrow$ per ip. induttiva $\Phi(x)$
  - $x = n \Rightarrow \Phi(n)$

∎

Teo (principio del minimo)

$$\forall A \subseteq \omega \quad A \neq \emptyset \to \exists x \in A \ \forall y \in A \ x \leq y$$

"Ogni $A \subseteq \omega$ non vuoto ha un minimo"

Idea della dimostrazione

$\Phi(n) \equiv$ "se $n \in A$ allora A ha un minimo"

N.B. $(\neg \exists x \in A \ \forall y \in A \ x \leq y) \to \forall x \ x \notin A$

$\forall y < x \quad y \notin A \xrightarrow{\text{dove dim.}} x \notin A$

Supponiamo per assurdo $x \in A$ Quindi

$x \in A \wedge \forall y < x \ y \notin A$

$\forall y \in A \ x \leq y \equiv \forall y \ y \in A \to x \leq y$

$\forall y \ y < x \to y \notin A$

$\forall y < x \ y \notin A$