# Ricorsione numerabile

$$a + b = \underbrace{\dots S(S(S(a)))\dots}_{b \text{ successori}}$$

$$\begin{cases} a + 0 = a \\ a + S(b) = S(a + b) \end{cases} \qquad \begin{cases} a \oplus 0 = a \\ a \oplus S(b) = S(a \oplus b) \end{cases}$$

**Prop** $\forall a, b \in \omega \quad a + b = a \oplus b$

- Caso $b = 0$. $a + b = a = a \oplus b$
- Caso $b = S(n)$ $a + b = a + S(n) = S(a + n)$

(( ip. induttiva $= a \oplus n$

$$a \oplus b = a \oplus S(n) = S(a \oplus n)$$

$$\begin{cases} a \cdot 0 = 0 \\ a \cdot S(b) = a \cdot b + a \end{cases}$$

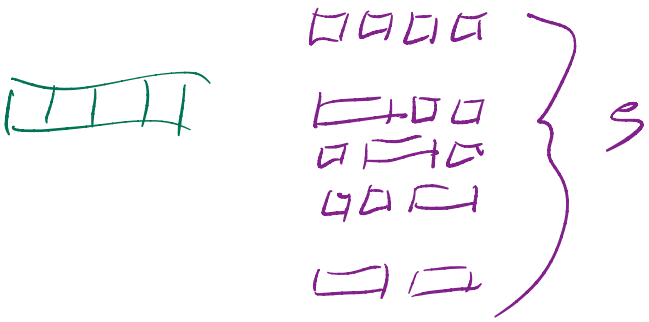
$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{S(b)} = a^b \cdot a \end{cases} \qquad \begin{cases} 0! = 1 \\ S(a)! = a! \cdot S(a) \end{cases}$$

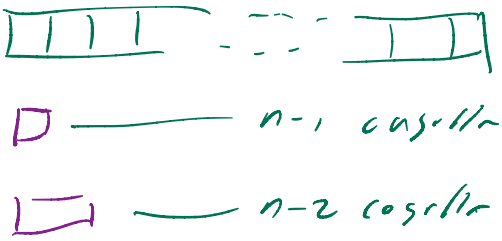
$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{0} f(i) = f(0) \\ \sum_{i=0}^{S(a)} f(i) = \left( \sum_{i=0}^{a} f(i) \right) + f(S(a)) \end{cases} \qquad \sum_{0}^{n} f(i) = f(0) + \dots + f(n)$$

Esercizio Data una sq. di n caselle




In quanti modi la posso coprire con tessere  ?




$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$f : \omega \to A$$

Teo Def.: $A$ insieme

$k \in A \quad \leftarrow f(0)$

$h : \omega \times A \to A$

$\exists ! f \in {}^{\omega}A \quad f(0) = k \;\wedge\; \forall n \in \omega \; f(s(n)) = h(n, f(n))$

Es. (fattoriale) $k = 1 \qquad h(n, x) = x \cdot s(n)$

$f(s(n)) = h(n, f(n)) = f(n) \cdot s(n)$

$s(n)! = n! \cdot s(n)$

$\exists!\, f \in {}^{\omega}A \quad f(0)=k \;\wedge\; \forall n \in \omega \; f(s(n)) = h(n, f(n))$

$\Phi(x,y) \equiv$ "$f(x) = y$"  funzione $s(x) \to A$

"esiste la tabella $f(0)=k$

$f(1) = h(0, f(0))$

$\vdots$

$y = f(x) = h(\dots)$ "

"$g$ è una $x$-approssimazione"

$\equiv$

$g \in {}^{s(x)}A \;\wedge\; g(0)=k \;\wedge\; \forall n \in x \; g(s(n)) = h(n, g(n))$

Lemma $\forall x \; \exists!$ $x$-approssimazione

Caso $x=0$ $\{(0,k)\}$

Caso $x=s(a)$ Per ipotesi induttiva $\exists!$ $a$-appr. $g$

$g' = g \cup \{(s(a), h(a, g'(a)))\}$

"pongo $g'(n) = g(n)$ per $n \in a$

$g'(s(a)) = h(a, g'(a))$ "

$f(x) = y \overset{\text{def.}}{\equiv} \exists g \in {}^{s(x)}A \; (g \text{ } x\text{-approssim.}) \wedge (g(x) = y)$

$$\begin{cases} a+0 = a \\ a+s(b) = s(a+b) \end{cases}$$

$a + x = y \quad \equiv$

$$\exists f \in {}^{\omega}\omega \quad f(0) = a \wedge \forall n \in \omega \; f(s(n)) = s(f(n)) \wedge f(x) = y$$

$f(0)$: $a+$

**Teo** Sia $(\mathbb{N}, 0, succ)$ un modello degli assiomi di Peano. Allora $(\mathbb{N}, 0, succ)$ è isomorfo a $(\omega, \emptyset, s)$

$$\exists f : \omega \to \mathbb{N} \text{ biiezione} \wedge f(\emptyset) = 0 \wedge \forall x \in \omega \; f(s(x)) = succ(f(x))$$

**Dim** Per ricorsione $\exists! f$ tale che

$$\begin{cases} f(\emptyset) = 0 \\ f(s(x)) = succ(f(x)) \end{cases}$$

$f$ è suriettiva

$$\forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \omega \quad f(x) = y$$

Per l'induzione di $\mathbb{N}$

- caso $y = 0$ quando $x = \emptyset$.
- caso $y = succ(a)$. Ip. induttiva: $\exists x \in \omega \; f(x) = a$

  Fisso $x$, $f(s(x)) = succ(f(x)) = succ(a)$

## $S$ è iniettiva

Per assurdo, considero $x$ con minimo t.c.

$$\exists y \text{ con } y \neq x \text{ e } S(x) = S(y)$$

- caso $x = \emptyset$ $\quad 0 = S(\emptyset) = S(y) = S(S(y)) = succ(S(y))$ ↯

- caso $x \neq \emptyset$ per la minimalità di $x$: $0 < x < y$

$$x = S(x') \qquad y = S(y')$$

$$S(S(x')) = S(x) = S(y) = S(S(y'))$$

$$succ(S(x')) \longrightarrow A. \longleftarrow succ(S(y'))$$

$$S(x') = S(y')$$

$$\Downarrow \text{ minimalità di } x$$

$$x' = y'$$

$$\Downarrow$$

$$x = S(x') = S(y') = y$$ ↯

Oss. $\quad \forall x \text{ con } x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \; x = S(y)$

Per ind. su $x$.

Caso $x = \emptyset$. Vero a vuoto

Caso $x = S(n)$. Prendo $y = n$. ∎

Es. Dimostrare che $+, \cdot$ godono delle proprietà commutativa, assoc., distr. ...

---

$$F_\square : \omega \longrightarrow \omega \qquad \omega \longrightarrow \omega \times \omega$$

$$n \longmapsto F_n \qquad n \longmapsto (\underset{a}{F_n}, \underset{b}{F_{n+1}})$$

$$n+1 \longmapsto (b, a+b)$$

---

$$f \in A^* \equiv \exists n \in \omega \; f \in {}^n A$$

$$\cap\!\!\!\!\shortmid \qquad \text{"sequenze finite di el. di } A\text{"}$$

$$\mathcal{P}(\omega \times A)$$

Teo (ricorsione numerabile — v.2)

Dati: $A$ insieme

$$h : A^* \longrightarrow A$$

$$\exists! f \in {}^\omega A \quad \forall n \in \omega \quad f(n) = h(f|_n)$$

Es. (Fibonacci)

$$h(g) = y \equiv \begin{array}{l} \mathrm{Dom}(g) = \emptyset \wedge y = 1 \\ \vee\ \mathrm{Dom}(g) = 1 \wedge y = 1 \\ \vee\ \exists n\ \mathrm{Dom}(g) = s(s(n)) \wedge y = g(n) + g(s(n)) \end{array}$$

Dim (idea)

"$\mathcal{F}'(n) = \mathcal{F}|_n$"

$$\begin{cases} \mathcal{F}'(\emptyset) = \emptyset \\ \mathcal{F}'(s(n)) = \mathcal{F}'(n) \cup \{(n, h(\mathcal{F}'(n)))\}. \end{cases}$$

$\mathcal{F}(n) = \mathcal{F}'(s(n))(n)$. + unicità.

# Cardinalità

## Def

$|A| = |B| \overset{def}{\equiv} \exists f : A \to B$ biiettiva.

$|A| \leq |B| \overset{def}{\equiv} \exists B' \subseteq B \quad |A| = |B'|$

$\exists f : A \to B$ iniettiva.

Oss. $|A| = |A|$

$|A| = |B| \to |B| = |A|$

$|A| = |B| \wedge |B| = |C| \to |A| = |C|$

$|A| = |B| \to |A| \leq |B|$

$|A| \leq |A|$

$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C| \to |A| \leq |C|$

Ci manca

$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \to |A| = |B|$

Es $|]-1,1[| \leq |[-1,1]|$

$|[-1,1]| \leq |]-1,1[|$

$=$