Prop A finito $\quad B \subsetneq A$

$\downarrow$

$|B| < |A|$

Principio dei cassetti

finito $\to$ $\mathcal{P}$- finito.

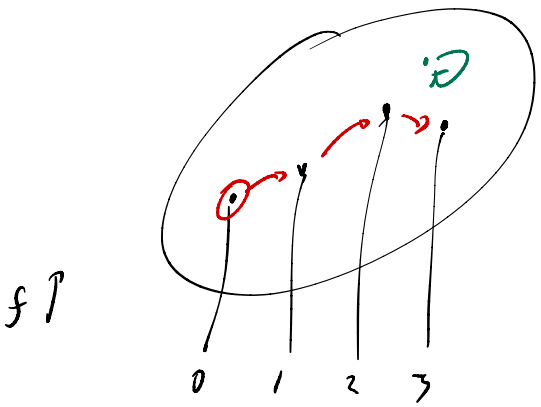
Cor A finito $\to \exists!\, n \in \omega \quad |A| = |n|$

Dim Per assurdo $m < n \quad |n| = |A| = |n|$

$m \subsetneq n$

Oss Se esiste $f : \omega \to A$ iniettiva

allora A non è definitivamente finito.



$s : A \to A$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(s(f^{-1}(x))) & \text{se } x \in f[\omega] \\ x \end{cases}$$

"Prop" A infinito $\to \exists f : \omega \to A$ iniettiva

Tentativo di dimostrazione

A è infinito $\to A \neq \emptyset \to$ fisso $a \in A$

Per ricorsione pongo $f(0) = a$.

Poi definisco $f(s(n))$

Osservo che $f[n]$ è un insieme finito

però A è infinito $\to \exists\, a' \in A \setminus f[n]$

Quindi pongo $f(s(n)) = a'$

NO! $\square$

Prop: A infinito $\to \forall n \in \omega \;\exists f : n \to A$ iniettiva.

Dim Induzione su n.

$n = 0$ Ovvio

$n = s(m)$ Per ipotesi induttiva $\exists f : m \to A$ iniettiva.

Siccome A è inf. $\exists a \in A$ $a \notin I_m(f)$.

Considero $f' = f \cup \{(m, a)\}$

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x < m \\ a & \text{se } x = m \end{cases}$$

$\square$

Cor. Se A è finito e $B \subseteq A \to B$ è finito.

Dim Se B fosse infinito allora, presi $n \in \omega$ t.c. $|n| = |A|$, esisterebbe $f : s(n) \to B$ iniettiva.

$$|I_n(f)| = |s(n)| \leq |A| = |n|$$

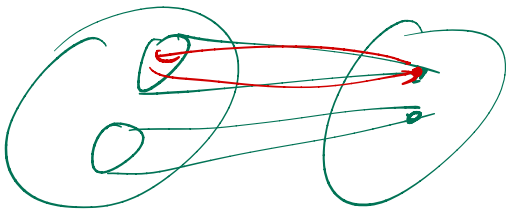
$n \subsetneq s(n) \to |n| < |s(n)|$. $\lightning$

$\square$

Esercizi Dimostra che:

- se $|A| < |n|$ con $n \in \omega$, allora $|A| = |m|$ per qualche $m < n$
- se A è finito e $f : A \to B$, allora $f[A]$ è finito.

Attenzione!



$f : A \to B$ suriettiva

$\Leftrightarrow$

$\exists g : B \to A \quad \forall x \in B \quad f(g(x)) = x$

$A \neq \emptyset \to$ esiste un el. $a \in A$.

$f : A \to B$ in. $\exists g : B \to A \quad \forall x \in A \quad g(f(x)) = x$

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{se } y \in f[A] \\ a & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Prop $\forall m, n \in \omega$

$|m| + |n| = |m + n| \qquad |m| \cdot |n| = |m \cdot n| \qquad |m|^{|n|} = |m^n|$

Def...

$|S(n)| = |n| + |1|$

$f : n \cup \{n\} \to n \times \{0\} \cup \{(1,1)\}$

$$f(x) = \begin{cases} (x, 0) & \text{se } x \in n \\ (1,1) & \text{se } x = n \end{cases}$$

$|m| + |n| = |m+n|$

$$\begin{cases} m + 0 = m \\ m + s(n) = s(m+n) \end{cases}$$

Ind. su n.

$n = 0$ $\quad |m| + |0| = |m| = |\overbrace{m}^{m} + 0|$

$n = s(a)$ $\quad |m| + |s(a)| = |m| + (|a| + |1|)$

$$= (|m| + |a|) + |1|$$

$$= |m + a| + |1|$$

$$= |\underbrace{s(m+a)}_{m + s(a)}| = |m + s(a)|$$ ∎

Esercizio Dimostra che se $m, n \in \omega$ e $m \leq n$, esiste un unico $n - m \in \omega$ tale che $m + (n-m) = n$. In due modi diversi.

La cardinalità numerabile

Def Diciamo che A è al più numerabile se $|A| \leq |\omega|$

Ossia se $\exists f : A \to \omega$ iniettiva.

Diciamo che A è numerabile se $|A| = |\omega|$

Ossia se $\exists f : A \to \omega$ biiettiva.

Notazione $\aleph_0 \overset{\text{def.}}{\equiv} |\omega|$

["alef con 0"

Prop: A è al più numerabile $\rightarrow$ o A è numerabile
o A è finito.

Idea della dim.

Caso $A \subseteq \omega$.

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$A = \{1 \quad 3 \quad 4 \quad 7\}$$
$$f \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$
$$\omega = \{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\}$$

$f(0) = \min A \qquad f(s(n)) = \min\{a \in A \mid f(n) < a\}$

Def $(A, <)$ è **buon ordinato** se $<$ è un ordine totale su A, e $\forall B \subseteq A \ B \neq \emptyset \rightarrow$ "B ha un minimo"

Def $(A, <_A)$ $(B, <_B)$ sono **isomorfi** se c'è $f : A \to B$ biiettiva t.c.

$$\forall x, y \in A \quad x <_A y \leftrightarrow f(x) <_B f(y)$$

Oss. $(A, <)$ totale e A è finito allora $(A, <) \simeq (n, <)$ con $n = |A|$ [quindi in particolare $(A, <)$ è buon ordinato].

Dim Per ind. su $n = |A|$

caso $n=0$. Facile.

caso $n = s(m)$. Per ip. $f : s(m) \to A$ big.

$$s(m) = \{0, \dots, m\}$$

$f[m] \subseteq A$ $\qquad |f[m]| = m$

Sia M il max di A, considero $A \setminus \{M\}$

$|A \setminus \{M\}| = m$.

$g : m \to A \setminus \{M\}$ iso di ordini

$$g'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x < m \\ M & \text{se } x = m. \end{cases}$$

$g' : s(m) \to A$ $\blacksquare$

Oss. 1. $(\omega, <)$ è un buon ordine

2. " è illimitato $\forall x \in \omega \ \exists y \in \omega \ x < y$

3. Ogni $A \subseteq \omega$ $\underbrace{\text{sup. lim.}}$ ha un massimo.

$\exists L \in \omega \ \forall x \in A \ x \leq L$

$\Downarrow$

$A \subseteq s(L) \Rightarrow A$ è finito

$x \prec y \iff y < x$

Prop $(A, \prec)$ e $A \neq \emptyset$

1. è b.o.
2. illimitato
3. $\forall D \subseteq A$ $B \neq \emptyset$ e B sup. lin. ha un $\prec$-max.

$\Rightarrow (A, \prec) \simeq (\omega, <)$.

Dim Definiamo per ricorsione $f : \omega \to A$ iso.

$f(0) = \min_{\prec} A$ $\qquad f(s(n)) = \min_{\prec} \{a \in A \mid f(n) \prec a\}$

- $x < y \to f(x) \prec f(y)$

  Per assurdo prendo $x < y$ con $f(y) \preceq f(x)$ e y minimo. $y = s(y')$

  - $y' = x$ $\quad f(y) = f(s(y')) \succ f(y') = f(x)$
  - $x < y'$ $\quad f(y) \succ f(y') \succ f(x)$ ☐

- $f(x) \prec f(y) \to x < y$ Facile.

Dobbiamo dire che f è sur. $y \in A$.

$x = \min \{n \in \omega \mid y \preceq f(n)\}$

$\forall x \in f[\omega] \quad x \prec y$

$f(m) \prec f(s(m))$

☐

Prop: A è al più numerabile $\rightarrow$ o A è numerabile
o A è finito.

Dim $f : A \to \omega$ iniettiva

$|\mathrm{Im}(f)| = |A| \qquad \mathrm{Im}(f) \subseteq \omega$

Basta dim. $B \subseteq \omega$ e B è infinito $\rightarrow |B| = \aleph_0$

Osserviamo che B con il $<$ indotto da ω soddisfa le ipotesi della prop. prec.

□