Es Dato A infinito. $f: A \times A \to A$. $B \subseteq A$.
Sapendo che $|B| \leq \aleph_0$ dimostrare che esiste $B \subseteq \overline{B} \subseteq A$
tale che $|\overline{B}| \leq \aleph_0$ e $f[\overline{B} \times \overline{B}] \subseteq \overline{B}$.

$\forall b_1, b_2 \in \overline{B} \quad f(b_1, b_2) \in \overline{B}$

Teorema di isomorfismo di Cantor

D.1 Sia $(A, <)$ un ordine. $B \subseteq A$

B è denso in $A \equiv \forall x, y \in A \; x < y \to \exists z \in B \; x < z < y$

A è denso $\equiv$ A è denso in se stesso

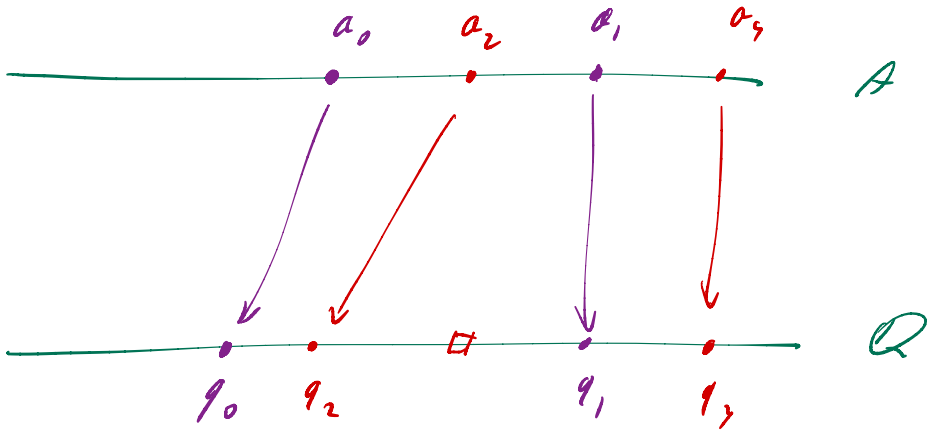
$\forall x, y \in A \; x < y \to \exists z \in A \; x < z < y$

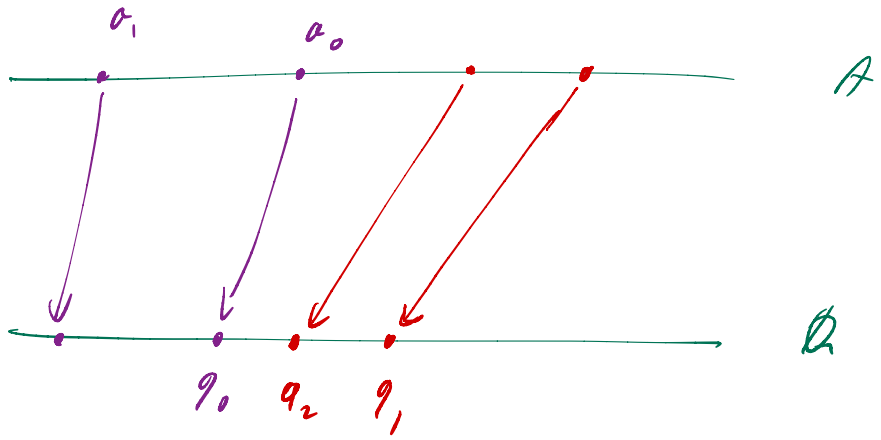
Es $\mathbb{Q}$ $\quad x < \frac{x+y}{2} < y$

Teo Sia $(A, <)$ un ordine totale t.c.

- $|A| = \aleph_0$
- $(A, <)$ è denso
- " senza max né min.

Allora $(A, <) \sim (\mathbb{Q}, <)$





Def Sia $F \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ un insieme di funzioni

$f = \bigcup F$ è una funzione se

$$\forall f_1, f_2 \in F \quad f_1|_{\mathrm{Dom} f_1 \cap \mathrm{Dom} f_2} = f_2|_{\mathrm{Dom} f_1 \cap \mathrm{Dom} f_2}$$

Lemma

Fissiamo $A = \{a_i\}$ $Q = \{q_i\}$

Definiamo $\{f_i\}$ tali che $\forall i$

- $f_i : A_i \to Q_i$ con $|A_i| = |B_i| < \aleph_0$
- f_i è un iso. di ordini

- $f_i \subseteq f_{S(i)}$ → ind. $\forall i < \gamma \quad f_i \subseteq f_\gamma$
- $\{a_0 \dots a_{i-1}\} \subseteq Dom(f_i)$

  $\{b_0 \dots b_{i-1}\} \subseteq Im(f_i)$

$\Rightarrow f = \bigcup_{i<\omega} f_i$ è un iso. di ordinali $A \to B$.

Costruzione di $\{f_i\}_{i<\omega}$

$f_0 = \emptyset$

$f_i \longrightarrow f_{i+0.5} \rightsquigarrow f_{S(i)}$

Se $a_i \in Dom(f_i)$ $\quad f_{i+0.5} = f_i$

Se $a_i \notin Dom(f_i)$ considero $Im(f_i)$

$\exists b \quad f_i \cup \{(a_i, b)\}$ è un iso. di ordinali

considero γ minimo t.c. $f_i \cup \{(a_i, b_\gamma)\}$ è un iso.

$f_{i+0.5}(a_i) = b_\gamma$.

Cor Sia $(A, <_A)$ ord. totale $|A| \leq \aleph_0$

Allora $\exists B \subseteq \mathbb{Q}$ $(A, <_A) \sim (B, <_{\mathbb{Q}})$

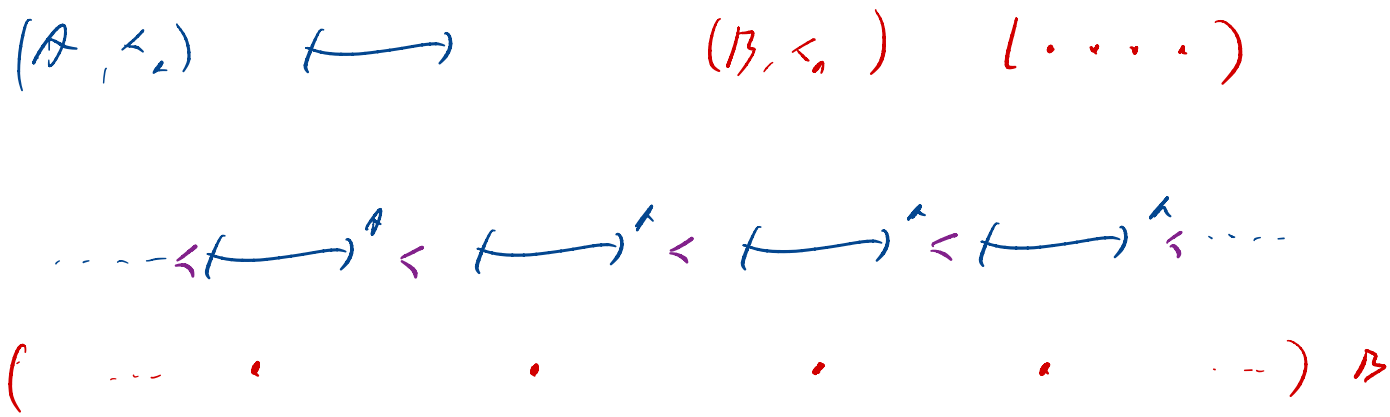
Def

$$(A, <_A) \times (B, <_B) \overset{def}{=} (A \times B, <_{A \times B})$$

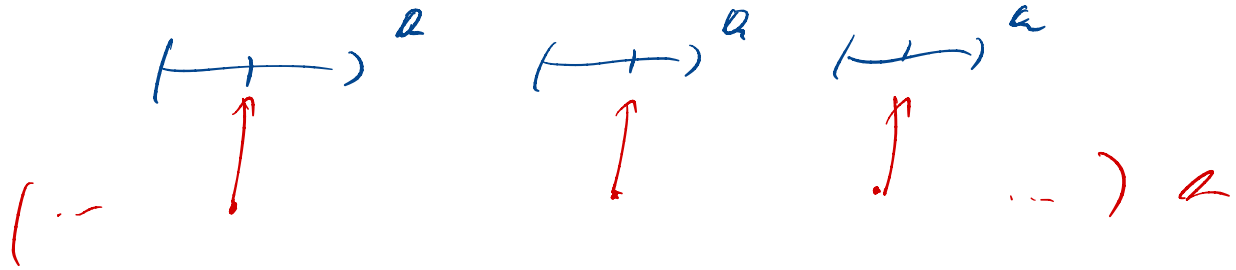
$$(a, b) <_{A \times B} (a', b') \overset{def}{\equiv} b < b' \vee (b = b' \wedge a < a')$$

Es

$$((A, <_A) \times (B, <_B)) \times (C, <_C) \sim (A, <_A) \times ((B, <_B) \times (C, <_C))$$



Dim (corollario) Considero $\mathbb{Q} \times A \sim \mathbb{Q}$



$\square$

Es Sia $(A, <)$ tot. ord. denso $2 \leq |A| \leq \aleph_0$

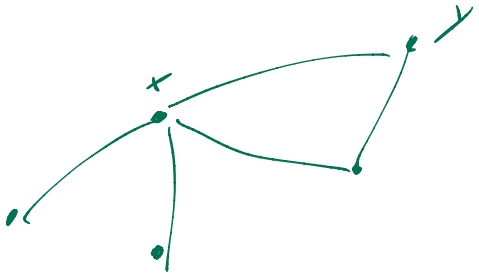
Allora $(A, <) \sim [0,1]_{\mathbb{Q}}$ o $[0,1[_{\mathbb{Q}}$ o $]\,]$ o $]\,[$.

Def ($G_{n,p}$)

(V, E) $\quad E \subseteq V \times V$

$\forall x,y \in V \quad (x,y) \in E \leftrightarrow (y,x) \in E$

$\forall x \in V \quad (x,x) \notin E$



Costruiamo un grafo con $V = \omega$. Prendiamo una moneta che fa Testa con prob. $p \in]0,1[$.

Per ogni $i < j$ decidiamo che $(i,j) \in E$ se lanciando la moneta ci viene Testa.
Chiamiamo il grafo così ottenuto G_p.

$$\mathbb{P}[G_{0.01} \sim G_{0.99}] = 1$$

Fissiamo $X, Y \subseteq \omega \quad X \cap Y = \emptyset \quad |X|, |Y| < \aleph_0$



$v \notin X \cup Y$

$\mathbb{P}[$"v è connesso a X e sopra la da Y"$] = p^{|X|} \cdot (1-p)^{|Y|} > 0$

$P_n[\exists v \text{ "}\_\_\_\text{"}] = 1$

Def (W, e) è un grafo random se

$\forall X \subseteq W \ \forall Y \subseteq W \setminus X \ \exists v \in W \setminus (X \cup Y) \ X \times \{v\} \subseteq e \wedge Y \times \{v\} \cap e = \emptyset$

Es Dimostrare che esiste un grafo random ed è unico a meno di isomorfismi.

La cardinalità del continuo — $2^{\aleph_0}$

Def

Diciamo che $(A, <)$ tot. ord. è <u>completo</u> se ogni sottoing. $B \subseteq A$ non vuoto e superiormente limitato ha un estremo superiore

sup.(—)

Def(—) Il minimo dei maggioranti

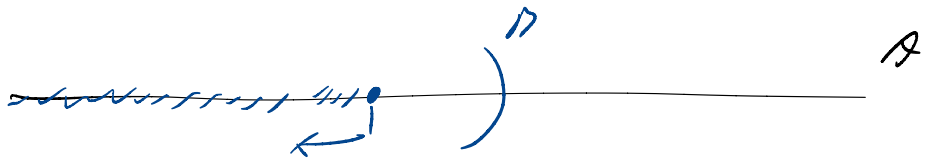
Def(—) M è un maggiorante di B se

$$\forall x \in B \quad x \leq M.$$

Es. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ non ha un sup.

usate solo le operazioni di $\mathbb{Q}$!

Def B è segmento iniziale di $(A, <)$
se $B \subseteq A$ e $\forall b \in B \; \forall b' < b \;\; b' \in B$



Un seg. in. è proprio se $B \neq A$.

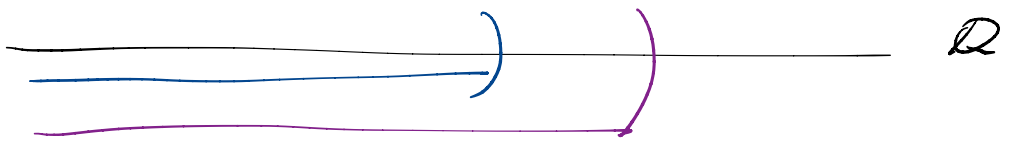
Def. Una sezione di $(A, <)$ è un s.i.

- proprio
- non banale
- che non ha un massimo

Def $\mathbb{R} = \{\text{sezioni su } \mathbb{Q}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$

Dati $x, y \in \mathbb{R}$

$x \leq y \overset{\text{def}}{\equiv} x \subseteq y$



Prop $\mathbb{R}$ è tot. ordinato.

Dato dire che o $x \subseteq y$ o $y \subseteq x$.

Osserviamo che $x \cap y$ è un s.i. Poco dim. che o $x = x \cap y$ o $y = x \cap y$. Supponiamo per assurdo $a \in y \setminus (x \cap y)$ $b \in x \setminus (x \cap y)$

SPDG $a < b \to a \in x \to a \in x \cap y$ ↯ □

Prop. $\mathbb{R}$ è completo.

Dim Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ sup. l.m. da $x \in \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$.

Asserisco che

$$\sup A = \bigcup A.$$

$\bigcup A$ è un maggiorante

$$x \in A \to x \subseteq \bigcup A.$$

$\bigcup A$ è $\leq$ di qualunque maggiorante di A.

m maggiorante di A

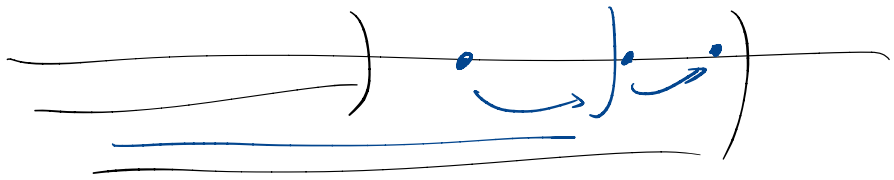
$$\forall y \in A \quad y \subseteq m \to \bigcup A \subseteq m.$$ □

Def. $\mathbb{Q}$ si immerge in $\mathbb{R}$

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$$

$$a \longmapsto \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}$$

Oss. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.



Cor. $\forall x_0 < |\mathbb{R}|$