- $|\text{numeri irrazionali}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = 2^{\aleph_0}$

  $2^{\aleph_0}$; $\leq \aleph_0$

- $|\text{reali trascendenti}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}| = 2^{\aleph_0}$

  $2^{\aleph_0}$; $\leq \aleph_0$

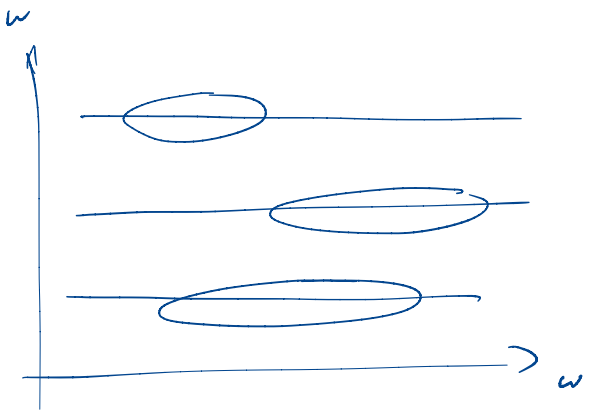
- $|\text{sottoinsiemi infiniti di } \omega|$

$= |\mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{P}^{fin}(\omega)| = 2^{\aleph_0}$

$2^{\aleph_0}$; $\leq \aleph_0$

- $|\text{sottoinsiemi finiti di } \mathbb{R}|$

$= |\mathcal{P}^{fin}(\mathcal{P}(\omega))|$



$\mathcal{P}^{fin}(\mathcal{P}(\omega)) \longrightarrow \mathcal{P}(\omega \times \omega)$

$| \quad | \leq | \quad | = 2^{\aleph_0}$

Osserviamo che esiste un ordinamento totale su $\mathcal{P}(\omega)$ — visto a lezione. Quindi $A \in \mathcal{P}^{fin}(\mathcal{P}(A))$ è $\sim |A| \in \omega$ con l'ordinamento indotto.

Mando A in $a_0 \times \{0\} \cup a_1 \times \{1\} \cup \dots \cup a_{n-1} \times \{n-1\}$

dove $n = |A|$ e $A = \{a_0 \dots a_{n-1}\}$ con

$a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1}$.

$A \in \mathcal{P}^{fin}(\mathbb{R})$

$f_A : \omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\clubsuit\}$

$i \longmapsto \begin{cases} \text{l'} i\text{-esimo el. di } A \text{ se } i < |A| \\ \clubsuit \quad \text{altrimenti} \end{cases}$

$Im(f_A) \cap \mathbb{R} = A$

$|\mathcal{P}^{fin}(\mathbb{R})| \leq |{}^{\omega}\mathbb{R}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

- $|\text{sottoinsiemi infiniti di } \mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{2^{\aleph_0}}$

$f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}^{\geq \aleph_0}(\mathbb{R})$ iniettiva

$A \longmapsto \arctan[A] \cup [2,3]$

✓ $2^{\aleph_0} - \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$? $2^{2^{\aleph_0}} - 2^{\aleph_0} = 2^{2^{\aleph_0}}$

- $|\text{successioni di naturali}| = |{}^{\omega}\omega| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$
- $|\text{successioni strettamente crescenti di naturali}|$

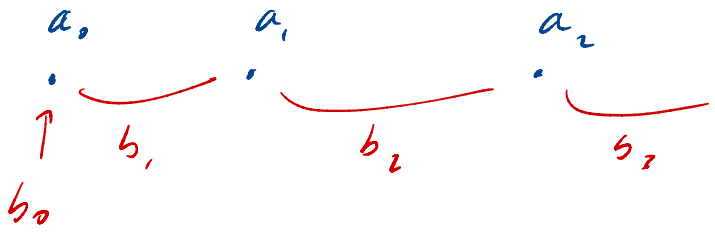
$$X = \{ \{a_i\}_{i\in\omega} \in {}^{\omega}\omega \mid \forall i\in\omega \quad a_i < a_{i+1} \}$$

$$f : X \longrightarrow {}^{\omega}\omega$$

$$\{a_i\}_{i\in\omega} \longmapsto \{b_i\}_{i\in\omega}$$

$$b_0 = a_0$$

$$b_{i+1} = a_{i+1} - a_i - 1$$



$$g : {}^{\omega}\omega \longrightarrow X$$

$$\{b_i\} \longmapsto \{c_i\}$$

$$c_0 = b_0$$

$$c_{i+1} = c_i + b_{i+1} + 1$$

$$c_0 = b_0 = a_0$$

$$c_{i+1} = c_i + b_{i+1} + 1 = c_i + (a_{i+1} - a_i - 1) + 1 = a_{i+1}$$

• $|\text{funzioni } \mathbb{R} \to \mathbb{R}| = \left(2^{\aleph_0}\right)^{2^{\aleph_0}} =$

$= 2^{\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$

• $|\underbrace{\text{funzioni continue } \mathbb{R} \to \mathbb{R}}_{C_0}|$

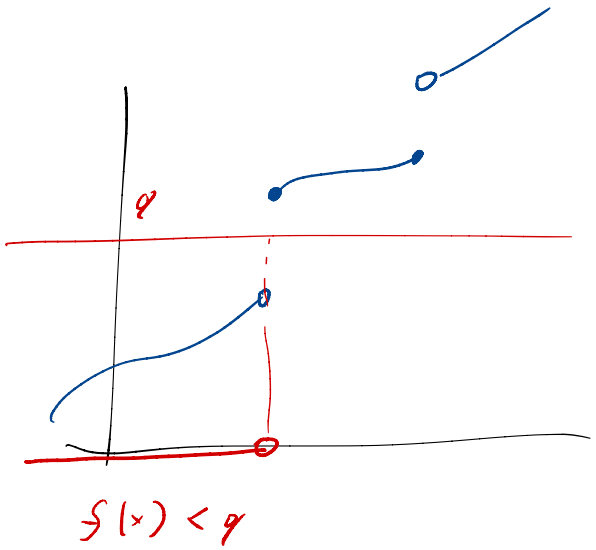
$$F: C_0 \longrightarrow {}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$$
$$f \longmapsto f_{|\mathbb{Q}}$$

$$f_{|\mathbb{Q}} = g_{|\mathbb{Q}} \Rightarrow (f-g)_{|\mathbb{Q}} = 0$$

$(f-g)(x) \neq 0$ per qualche $x \in \mathbb{R}$

$$2^{\aleph_0} \leq |C_0| \leq |{}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}| = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

• $|\text{funzioni strettamente crescenti } \mathbb{R} \to \mathbb{R}|$



$F \quad C_0 \to {}^{\mathbb{Q}}$ semiretta sinistra

$f \mapsto g$

$g(q) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < q\}$

$|\{\text{semirette sinistre}\}| = 2^{\aleph_0}$

$\|$

$|(\mathbb{R} \times \{0,1\}) \cup \{+\infty\} \cup \{\emptyset\}|$

$|\ | = 2^{\aleph_0}$

$F\ C_0 \to \mathbb{Q}$ semiretta sinistra

$f \mapsto g$

$g(q) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < q\}$

$x \qquad f(x) < q \iff x \in g(q)$

$\{q \in \mathbb{Q} \mid f(x) < q\} = \{q \mid x \in g(q)\}$

$f(x) = \inf$.

Esercizi: esprimi queste proposizioni mediante formule insiemistiche pure

- gli elementi degli elelementi di A sono elementi di A
- B è l'insieme dei sottoinsiemi di A
- l'unione degli elementi di A è l'intersezione di quelli di B

(qui assumi che unione e intersezione esistano e siano uniche)

- ogni insieme è disgiunto da uno dei suoi elementi

- gli elementi degli elelementi di A sono elementi di A

$$\forall x \in A \quad \forall y \in x \quad y \in A$$

$$\forall x \, (x \in A) \to \left(\forall y \, (y \in x) \to (y \in A) \right)$$

- B è l'insieme dei sottoinsiemi di A

$$\forall x \quad x \in B \leftrightarrow x \subseteq A$$

$$\forall y \quad y \in x \to y \in A$$

$$\forall x \quad x \in B \leftrightarrow \left(\forall y \quad y \in x \to y \in A \right)$$

- l'unione degli elementi di A è l'intersezione di quelli di B

"$x \in$ unione degli el. di A"

$\Vert$

$$\exists y \in A \quad x \in y$$

"$x \in$ inters. degli el. di B"

$\Vert$

$$\forall z \in B \quad x \in z$$

$$\forall x \quad (\exists y \in A \quad x \in y) \leftrightarrow (\forall z \in B \quad x \in z)$$

$$\forall x \quad (\exists y \quad y \in A \wedge x \in y) \leftrightarrow (\forall z \quad z \in B \to x \in z)$$

- ogni insieme è disgiunto da uno dei suoi elementi

$$\forall x \; \exists y \in x \; \underbrace{x \cap y = \emptyset}$$

$$\neg \exists z \; z \in x \wedge z \in y$$

$$\forall x \left(\exists y \left(y \in x \right) \wedge \left(\neg \exists z \; z \in x \wedge z \in y \right) \right)$$

Dimostriamo che $\{\{\emptyset\}\} \notin w$

Supponiamo per assurdo che $\{\{\emptyset\}\} \in w$

Dimostriamo che $\underbrace{w \setminus \{\{\{\emptyset\}\}\}}_{A}$ è induttivo.

$\emptyset \in A \leftarrow w \in \emptyset.$

$x \in A \rightarrow x \cup \{x\} \in A$

$$x \cup \{x\} = \{\{\emptyset\}\}$$

$$\cup \qquad \cup !$$

$$\{x\} = \{\emptyset\} \rightarrow x = \emptyset$$

$$\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}$$

$$\emptyset \neq \{\emptyset\}$$

Mostre que $\forall m, n \in \omega \quad m \geq n \rightarrow \exists! k \in \omega \; m = n + k$.

$|m \setminus n| = |k|$ para algum $k \in \omega$

$f : m \setminus n \longrightarrow k$ bijeção

$|n| + |k| = |m|$

$n \times \{0\} \cup k \times \{1\} \longrightarrow m$

$(x, 0) \longmapsto x$

$(y, 1) \longmapsto f^{-1}(y)$

$m \geq n \rightarrow \exists k \in \omega \; m = n + k$.

[Indução em m

caso $m = 0$ trivial e vazio

caso $m = s(a)$ $a < n \rightarrow s(a) < n \vee s(a) = n$ ✓

$\exists k \; s(a) = n + k$

$a \geq n \rightarrow a = n + k'$

$s(a) = n + s(k')$