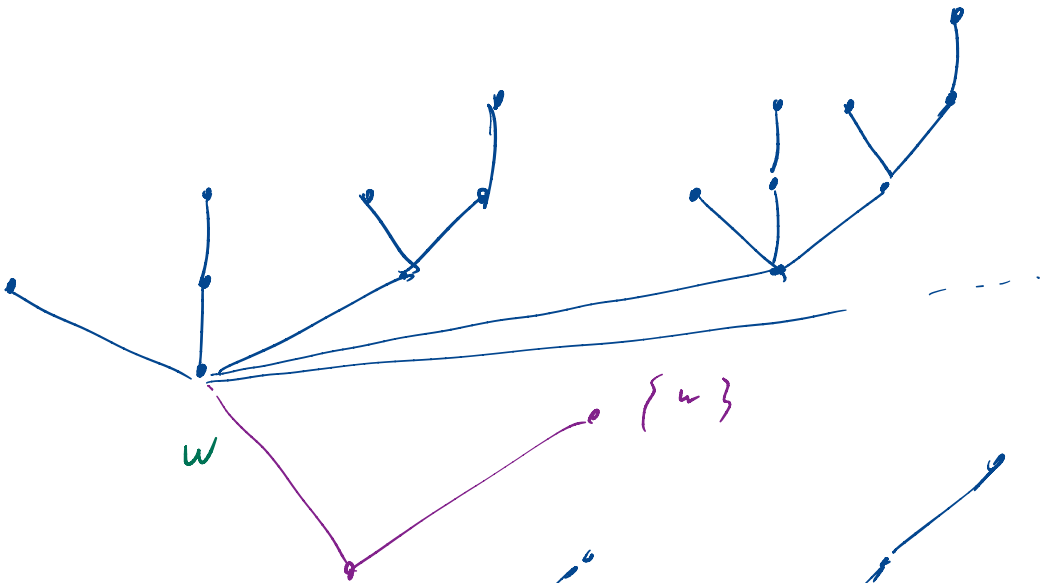
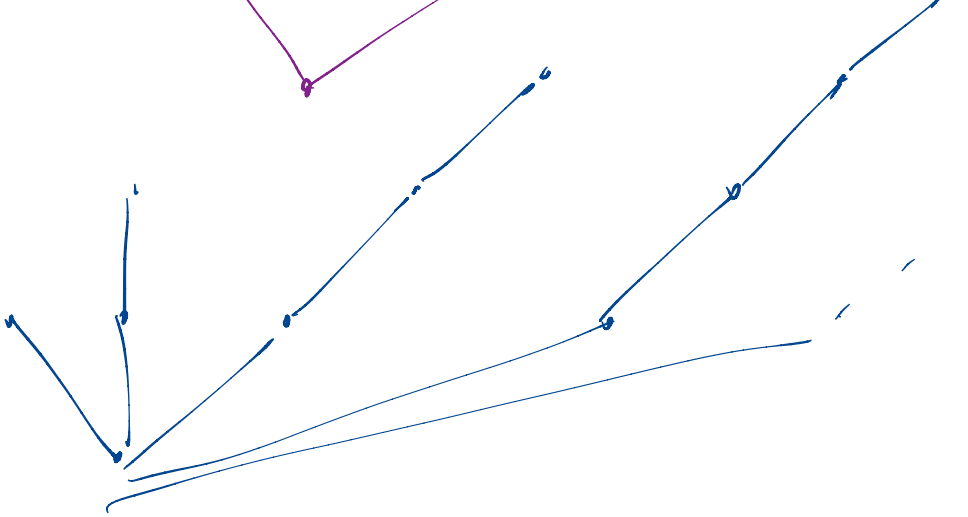
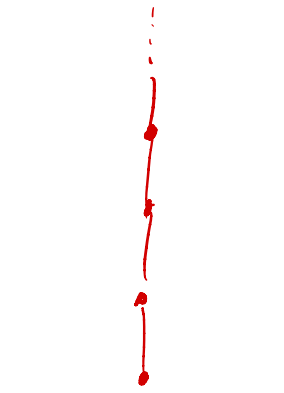


$\emptyset$ $\{\emptyset\}$ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ...

0 $1 = S(1)$ $2 = S(S(0))$ 3 ...





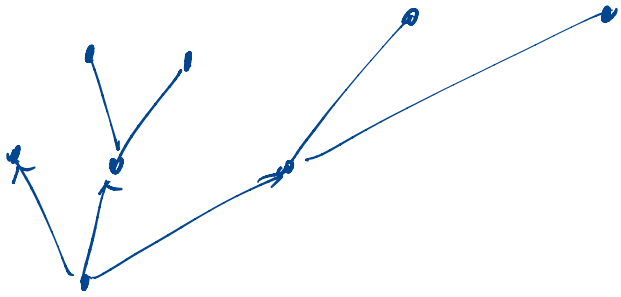


$\{\{\{ \ldots \}\}\}$

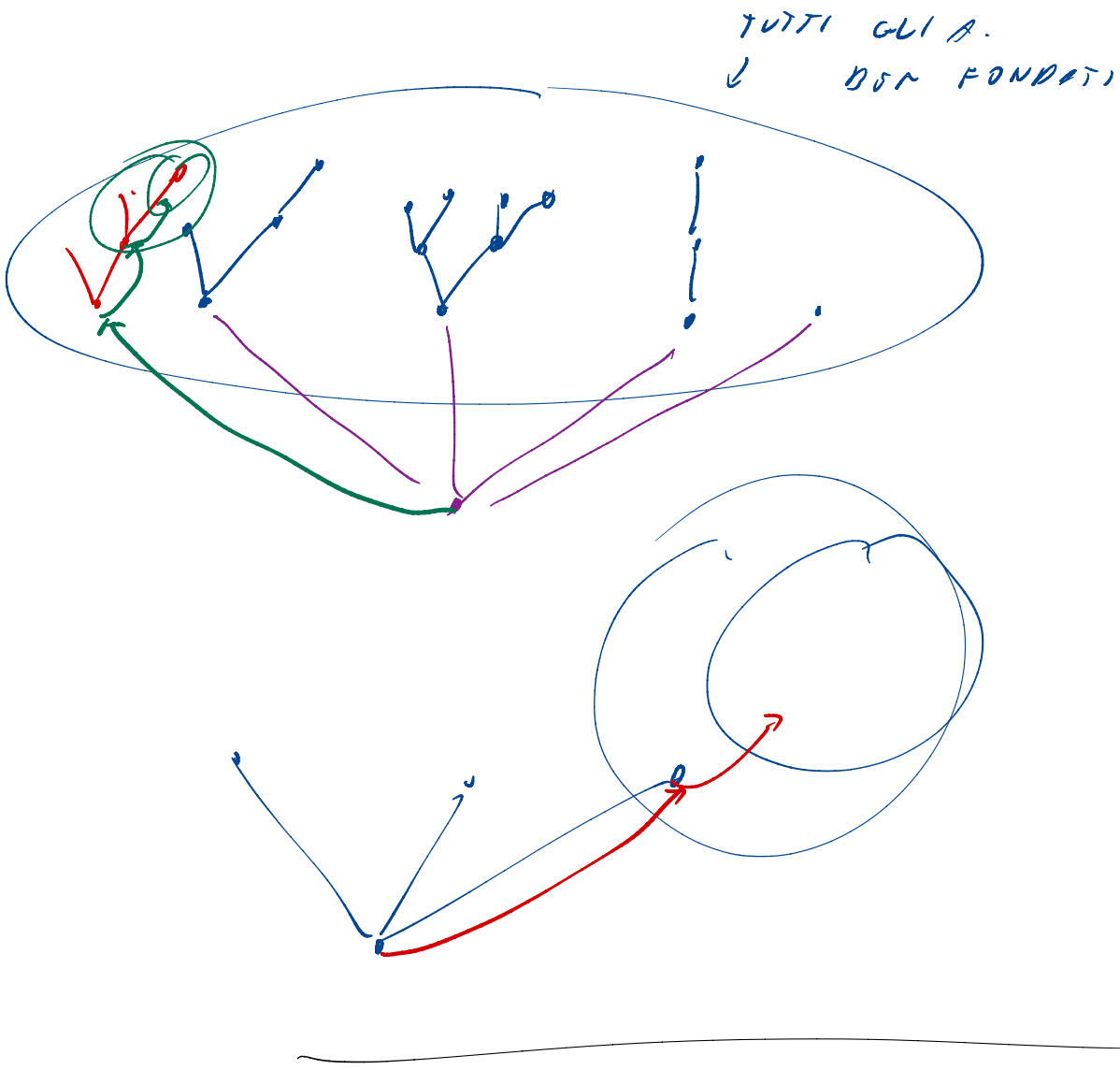
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\}$



$x = \{x\}$



Def Un albero è ben fondato se non ha rami infiniti.



$\{\{\emptyset\}\} \notin w$

$\forall x \in w \quad x = 0 \vee 0 < x$

$\forall x \in w \quad x = \emptyset \vee \emptyset \in x$

$\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$

$\emptyset \neq \{\emptyset\}$

$w \qquad w$

$\emptyset \qquad \emptyset$

$X = S(S(S(w))) \Rightarrow X$ è s. o. da e.

$S(w) = w \cup \{w\}$

$S(S(a)) = w \cup \{w\} \cup \{w \cup \{w\}\}$

$= w \cup \{w, \; w \cup \{w\}\}$

$X = w \cup \{w, \; w \cup \{w\}\} \cup \{w \cup \{w, \; w \cup \{w\}\}\}$

$= w \cup \underbrace{\{w, \; w \cup \{w\}, \; w \cup \{w, \; w \cup \{w\}\}\}}_{X'}$

$\emptyset \neq A \subseteq X \qquad A \cap w \neq \emptyset \qquad A \subseteq X'$

Corollario

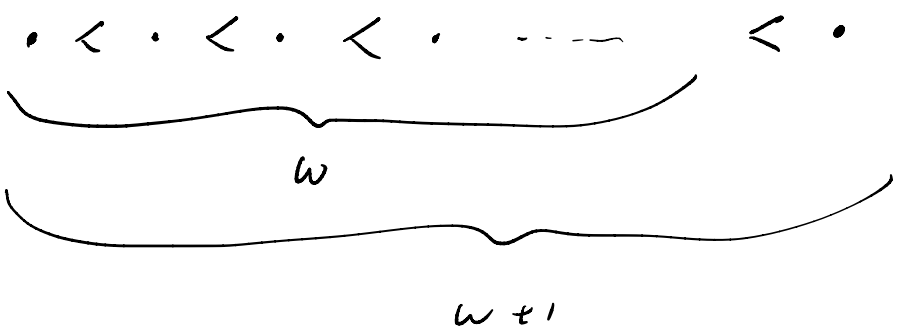
$\forall a \in X \quad a \subseteq X$

X è transitivo b.o. da $\in$ $\Longrightarrow$ $S(X)$ è transitivo b.o. da $\in$.

Def. di "X è un ordinale di Von Neumann"

$\omega + 1$

$\omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$



$|\omega \cup \{\omega\}| = \aleph_0$



$f : \omega \longrightarrow \omega \cup \{\omega\}$

$n \longmapsto \begin{cases} \omega & \text{se } n = 0 \\ n-1 & \text{se } n > 0 \end{cases}$

$|w \cup \{w\}| \leq |w| + |\{w\}| = \aleph_0 + 1 = \aleph_0$

$\forall$

$|w| = \aleph_0$

Esercizio B

Sia $X \subseteq \mathbb{N}$. (w) Consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} \text{differenza}\colon \{(a,b) \in X^2 \mid a < b\} &\to \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ (a,b) &\mapsto b - a \end{aligned}$$

Diciamo che X è:
parsimonioso se la funzione differenza è iniettiva;
meticoloso se la funzione differenza è surgettiva;
minuzioso se la funzione differenza è biunivoca.

1. Trova la cardinalità dell'insieme degli insiemi parsimoniosi.
2. Trova la cardinalità dell'insieme degli insiemi meticolosi.
3. Dimostra che esiste un insieme minuzioso.
4. Trova la cardinalità dell'insieme degli insiemi minuziosi.

$X = \{ 2^i \mid i \in \omega \}$ $\quad \mathcal{P}(X) \subseteq \{\text{parsimoniosi}\}$

$j < i$ $\quad 2^i - 2^j = 2^{i'} - 2^{j'} \Rightarrow i = i' \quad j = j'$

$j' < i'$ $\quad (2^{i-j} - 1) \cdot 2^j$

$Y = \{ 0, \overset{1}{1}, \overset{2}{3}, \overset{3}{6}, \overset{4}{10}, \dots \}$

$\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ $\quad A \supseteq Y \Rightarrow A$ è meticoloso

$A \supseteq Y \Rightarrow A$ è numerabile

$$f : \mathcal{P}(\omega \setminus Y) \longrightarrow \{\text{matrimoni}\}$$

$$B \longmapsto Y \cup B$$

$$|\{\text{matrimoni}\}| \geq |\mathcal{P}(\underbrace{\omega \setminus Y}_{|\cdot| = \aleph_0})| = 2^{\aleph_0}$$

$\aleph_1$

$2^{\aleph_0}$

$\{0, 1, 3, 7, 12, 20$

1 2 3 4 5 6 7 9 11 12

Al passaggio n abbiamo

$A_n = \{a_0 \dots a_N\}$

dobbiamo costruire A_{n+1}

Se $\exists i, j \quad a_j - a_i = n+1 \Rightarrow A_{n+1} = A_n$

Altrimenti:

$$A_{n+1} = \{ a_0 < \dots < a_K, \; b, \; b+n+1 \}$$

con $b = 2a_K + 1 + n + 1 + b_1$

Consideramos $\alpha - \beta$ con $\alpha, \beta \in A_{n+1}$

$\alpha, \beta \in A_n$ entonces $\alpha - \beta \leq a_K$

$\alpha = b$, $\beta \in B_n \longrightarrow \alpha - \beta \geq a_K + 1 + n + 1$

$\alpha = b+n+1$, $\beta \in B_n \longrightarrow$ ~~$b+n+1 - a_i = b - a_j$~~

$$n+1 = a_i - a_j$$

$\alpha = b+n+1 \quad \beta = b$