Esercizio Secondo te, la seguente formula è vera?

$$\forall A\,\big(\underbrace{(\exists x\ x\in A)}_{*} \to \underbrace{\forall B\ \exists x\in A}_{+}\ (x\in B \to \underbrace{\forall y\in A\ y\in B}_{\times})\big)$$

Se $\underbrace{A\neq\emptyset}_{*}$ allora $\underbrace{\text{dato un } B \text{ c'è un } x\in A}_{+}$ con la proprietà che se $x\in B$ allora $\underbrace{A\subseteq B}_{\times}$

se $x\notin B$ allora $\underbrace{x\in B \to \text{qualunque cosa}}_{V}$

$$\exists x\in A\,(x\in B \to \forall y\in A\ y\in B))$$

$$\Phi \to \Psi \quad \equiv \quad \Psi \vee \neg\Phi$$

$$\neg\forall x\in A\ \underbrace{\neg(x\in B \to \forall y\in A\ y\in B)}_{x\in B\ \wedge\ \neg\forall y\in A\ y\in B}$$

$$\neg\big(\forall x\in A\ (x\in B \wedge \neg\forall y\in A\ y\in B)\big)$$

$$\neg\big(\underbrace{\forall x\in A\ x\in B}_{\Phi} \wedge \neg\underbrace{\forall y\in A\ y\in B}_{\Phi}\big)$$

$$\neg(\Phi \wedge \neg\Phi) \quad V$$

non menziona x

$$\forall x\,(\Phi \wedge \Psi) \equiv (\forall x\,\Phi) \wedge \Psi$$

Esercizio Dimostra che se $(A, <)$ è denso e $2 \leq |A| \leq \aleph_0$, allora $(A, <)$ è isomorfo a uno dei seguenti intervalli di $\mathbb{Q}$.

$[0,1]_{\mathbb{Q}}$ $\quad]0,1]_{\mathbb{Q}}$ $\quad [0,1[_{\mathbb{Q}}$ $\quad]0,1[_{\mathbb{Q}}$

Sol.

① $|A| = \aleph_0$ Basta dim. $\aleph_0 \leq |A|$



Fisso $f : \omega \to A$ suriettiva. Fisso $x, y \in A$ $x < y$

$a_0 = x \quad a_1 = y \quad a_{n+1} = f(\min\{i \in \omega \mid a_0 < f(i) < a_n\})$

Verifico che $i \mapsto a_i$ è iniettiva $\omega \to A$.

Quindi $\aleph_0 \leq |A|$.

■ ①

① Se A non ha né max né min

$$(A, <) \simeq (\mathbb{Q}, <) \sim [\,]0,1[_{\mathbb{Q}}, <)$$

② Se A non ha max e $\min A = m$

Considero $A \setminus \{m\}$. che è denso

non ha max.

supponiamo che $A \setminus \{m\}$ abbia minimo m', allora

c'è $x \in A$ $\quad m < x < m' \rightsquigarrow A$

$$(A \setminus \{m\}, <) \sim (]0,1[_{\mathbb{Q}}, <)$$

$$f : A \setminus \{m\} \to]0,1[_{\mathbb{R}} \quad \text{iso.}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } m < x \\ 0 & \text{se } x = m \end{cases}$$

$$g : A \to [0,1[_{\mathbb{R}}.$$

$\blacksquare$

Es. $\quad |\{f : \omega \to \omega \mid f \text{ definitivamente costante}\}|$

$$\exists N \ \forall x > N \ f(x) = f(N)$$

$a_0 = \underline{0} \quad a_1 = 7 \quad a_2 = 7 \quad \dots$

$b_0 = 7 \quad b_1 = 7 \quad \dots$

$$\underbrace{0 \quad 7 \quad 15 \quad 1 \quad 9}_{\downarrow} \quad 9 \quad 9 \quad \dots$$

Data $f : \omega \to \omega$ def. cos. sia N_f il minimo tale che $\forall x > N_f \ f(x) = f(N)$.

$$G : \{\text{s. def. ben.}\} \longrightarrow \bigcup_{i \in \omega} {}^{i}\omega \subseteq \mathcal{P}^{fin}(\omega \times \omega)$$

$$f \longmapsto f_{|N_f+1}$$

$$2 = \{0, 1\}, \quad N_f$$

$$f(x) = \begin{cases} f_{|N_f+1}(x) & \text{se } x \leq N_f \\ f(N_f) & x > N_f \end{cases}$$

$$|\text{sottoins. di } \mathbb{R} \sim (\omega, <) \text{ con l'ordinamento indotto}| = \underbrace{2^{\aleph_0}}_{X}$$

$$(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \underline{2^{\aleph_0}}$$

$$|{}^{\omega}\mathbb{R}| \qquad F : {}^{\omega}\mathbb{R} \to \mathcal{P}^{\leq \aleph_0}(\mathbb{R})$$

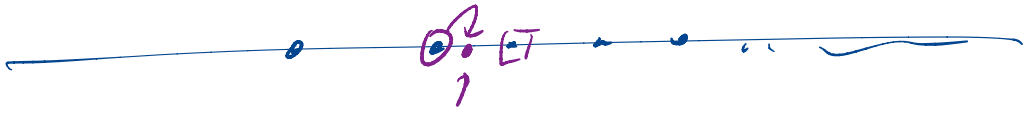
$$f \mapsto Im(f) \quad \text{suriettiva}$$

$$G : X \to {}^{\omega}\mathbb{R}$$

$$A \mapsto g_A$$

$g_A(i) =$ "l'i-esimo elemento di A"

g_A è l'unico iso $(A, <_{\mathbb{R}}) \sim (\omega, <)$



1.

ω $\omega+1$ $\omega+2$, ... $\omega+i$ con $i \in \omega$

$\{ \omega, S(\omega), S(S(\omega)), \dots \}$

2. Dati A e B vogliamo che

$$|A| < |B| \vee |A| = |B| \vee |B| < |A|$$

$$\begin{cases} |A| + |B| = \max(|A|, |B|) \\ \text{se } |A|, |B| \geq \aleph_0 \end{cases}$$

3. Vogliamo escludere $\{\{\{\dots\}\}\}$

$$\exists ? X \qquad \aleph_0 < |X| < 2^{\aleph_0}$$

Buoni ordini

Def $(A, <)$ t.t. ord. è ben ordinato se ogni $B \subseteq A$ $B \neq \emptyset$ ha un minimo.

Def $(A, <)$ t.t. ord. $B \subseteq A$ è un segmento iniziale se $\forall x \in B \; \forall y \in A \; y < x \to y \in B$

Def $(A, <)$ b.o. indicato $a \in A$

$$A_a \overset{\text{def.}}{\equiv} \{x \in A \mid x < a\}$$

A_a s.i. principale determinato da a.

Teo Dati $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ buoni ordini si verifica uno e uno solo di questi casi

- $(A, <_A)$ è isomorfo a un s.i. proprio di $(B, <_B)$
- $(A, <_A) \sim (B, <_B)$
- $(B, <_B)$ è isomorfo a un s.i. proprio di $(A, <_A)$

Def

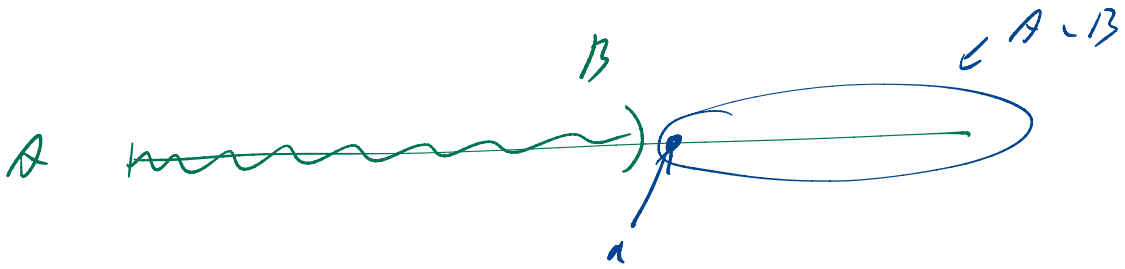
$(A, <_A) \preceq (B, <_B) \overset{\text{def}}{\equiv}$ $(A, <_A)$ è iso. a un s.i proprio di $(B, <_B)$

$(A, <_A) \prec (B, <_B) \overset{\text{def}}{\equiv}$ $(A, <_A)$ è iso. a un s.i di $(B, <_B)$

Prop Se $(A, <)$ è buon ordinato, ogni s.i. proprio di A è principale.

Dim Sia B s.i. proprio di A. Consideriamo

$a \overset{\text{def}}{=} \min(A - B)$



Dies ist $B = A_a$

Voraussetzung

$x \in B \quad x \geq a$ Sei $x = a$ also $a \in B$ ✓
$a < x$ also $a \in B$ ✓

$x \in B \rightarrow x \in A_a$

$x \in A_a \rightarrow x < a \rightarrow x \in B.$ ☐