$\mathcal{A} = (A, <_A)$ $\qquad$ $\mathcal{B} = (B, <_B)$

$$\mathcal{A}^{\mathcal{B}} \overset{\text{def.}}{\equiv} \Big(\underbrace{\{ f \in {}^{B}A \mid |\mathrm{Supp}\, f| < \aleph_0 \}}_{X} , <_{\mathrm{rxp}} \Big)$$

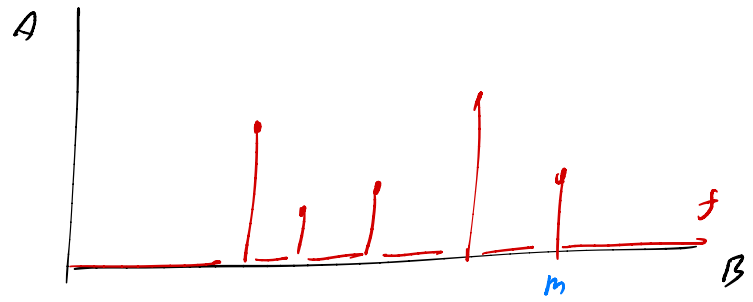
$Y \subseteq X \neq \emptyset$ dobbiamo dimostrare che Y ha un minimo

Per assurdo

$$\exists f \in X \ \underbrace{\exists Y \subseteq X \ f \in Y \wedge Y \text{ non ha minimo}}$$

Fisso f tale che $\underline{\quad}$ e $\underbrace{\max(\mathrm{Supp}\, f)}_{= m}$ è minimo

Fisso $Y \subseteq X$ con $f \in Y$ etc.



Posso assumere $\forall g \in Y \quad \max(\mathrm{Supp}\, g) = m$

Considero $q = \min\{ g(m) \mid g \in Y \}$

Posso assumere $\forall g \in Y \quad g(m) = q$.

$\blacksquare$

Prop Le op. sono ben definite a meno di iso

p. es.

$$\left.\begin{array}{l}(A, <_A) \sim (A', <_{A'}) \\ (B, <_B) \sim (B', <_{B'})\end{array}\right\} \Rightarrow (A, <_A)^{(B,<)} \sim (A', <')^{(B',<)}$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$(C, <) \qquad (C', <)$$

$$f : A \to A' \qquad g : B \to B'$$

$$C \longrightarrow C'$$

$$"A \ni b" \longmapsto f \circ b \circ g^{-1}$$

Prop

$$(A + B) + C \sim A + (B + C)$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$

$$A \cdot (B + C) \sim A \cdot B + A \cdot C$$

$$A^{B+C} \sim A^B \cdot A^C$$

$$(A^B)^C \sim A^{B \cdot C}$$

Sono FALSO

$$A + B = B + A \qquad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$\cdot \qquad \cdot$$

$$(A \cdot B)^C = A^C \cdot B^C$$

Es. Dimostrare che $\omega^\omega \sim (\mathbb{N}[x], \prec)$

$f \prec g \iff \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x > N\ f(x) < g(x)$

Es. Se $(A, <)$ e $(B, <)$ sono t.c. $|A| = |B| = \aleph_0$

allora $|(A, <) + (B, <)| = |\mathbb{Q} \cdot \mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}| = \aleph_0$.

Gli ordinali di Von Neumann

Def α è un insieme **transitivo** se

$$\forall x \in \alpha \quad x \subseteq \alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x \in \alpha\ \forall y \in x \quad y \in \alpha$$

Def α è un **ordinale** se è transitivo e ben ordinato dalla relazione $\in$.

$(\alpha, <_\alpha)$ è ben ordinato

$$\uparrow$$

$$\{(x, y) \in \alpha \times \alpha \mid x \in y\}$$

Chiamiamo **Ord** la classe degli ordinali

Oss. $\alpha \in Ord \wedge \beta \in \alpha \to \beta \in Ord$

$\beta = \alpha_\beta$

Dim

buon ordino. $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta \subseteq \alpha$.

transitività $\delta \in \gamma \wedge \gamma \in \beta \to \delta \in \beta$

$\alpha \quad \alpha \quad \alpha \quad \alpha$

$\delta <_\alpha \gamma \wedge \gamma <_\alpha \beta \Rightarrow \delta <_\alpha \beta \Rightarrow \delta \in \beta$.

$x \in \alpha_\beta \iff x \in \alpha \wedge x <_\alpha \beta \iff x \in \alpha \wedge x \in \beta$

β

$x \in \beta$

Prop Siano $\alpha, \beta \in Ord \quad (\alpha, <_\alpha) \sim (\beta, <_\beta)$

allora $\alpha = \beta$.

Dim Fisso $f : \alpha \to \beta$ isomorfismo

Voglio dimostrare $\forall \gamma \in \alpha \quad f(\gamma) = \gamma$

Per assurdo considero il minimo $\gamma \in \alpha$ con $f(\gamma) \neq \gamma$

$\gamma = \alpha_\gamma = f[\alpha_\gamma] = \beta_{f(\gamma)} = f(\gamma)$

Oss $(A, <) \quad (B, <)$ ordini $\quad f : A \to B$ iso

$f[A_x] = B_{f(x)}$

Oss $\quad y \in \beta_{f(x)} \iff y < f(x) \iff f^{-1}(y) < x$

$$\Updownarrow$$

$$y \in f[A_x] \iff f^{-1}(y) \in A_x$$

□

Teo Poss. $\alpha, \beta \in Ord$.

Avviene uno e una sola delle seguenti

$\alpha \in \beta$ se e solo se $(\alpha, <_\alpha) \cong (\beta, <_\beta)$

$\alpha = \beta$ $\quad$ $(\alpha, <_\alpha) \cong (\beta, <_\beta)$ ✓

$\beta \in \alpha$ $\quad$ $(\quad) \cong (\alpha, <_\alpha)$

Dim

Se $\alpha \sim \beta_\gamma = \gamma$

$=$

□

Con $\in$ "è un ordine totale su Ord"

Def. $\alpha < \beta \equiv \alpha \in \beta$.

Ricordiamo $S(x) \overset{def.}{=} x \cup \{x\}$.

Lemma Poss. $\alpha \in Ord$ $S(\alpha)$ è il minimo ordinale $> \alpha$.

Dim

① $S(\alpha)$ è un ordinale.

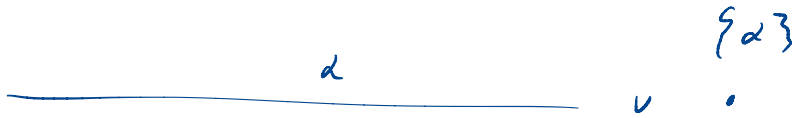
transitività $\beta \in S(\alpha) \to \beta \in \alpha \Rightarrow \beta \subseteq \alpha \subseteq S(\alpha)$

$\beta = \alpha \Rightarrow \beta \subseteq S(\alpha)$

buon ordine. $X \subseteq S(\alpha)$ $X \neq \emptyset$

$X \cap \alpha \neq \emptyset$ $\qquad$ $X = \{\alpha\}$

$\min(X \cap \alpha) = \min X$ $\qquad$ $\min X = \alpha$.



② $S(\alpha)$ è il min. ord. maggiore di α

$\beta > \alpha \Rightarrow \alpha \in \beta \Rightarrow \alpha \subseteq \beta$

$\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta \iff S(\alpha) \leq \beta$

Lem $\alpha \leq \beta \hookrightarrow \alpha \subseteq \beta$

Dim. $\alpha \leq \beta \to \alpha \in \beta \to \alpha \subseteq \beta$

$\alpha = \beta \to \alpha \subseteq \beta$

Per assurdo se $\alpha \subseteq \beta$ e $\beta < \alpha$ allora

$\alpha \subseteq \beta \in \alpha \to \alpha \in \alpha$ ass.

Prop Sia X insieme di ordinali

- se $X \neq \emptyset$ esiste il minimo di $X = \bigcap X$
- esiste il min. ord. $\geq$ di tutti gli ordinali di X $\quad \sup X = \bigcup X$
- esiste un ordinale $\notin X$.