Ord è totalmente ordinata da $\in$

$$\alpha < \beta \equiv \alpha \in \beta$$

Ogni ordinale α ha un successore $s(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$

Prop. Data X insieme di ordinali:

1. se $X \neq \emptyset$ allora X ha un minimo. $\bigcap X$
2. X ha un sup. $\bigcup X$
3. $\exists \alpha \in Ord \quad \alpha \notin X$

Dim.

1. Preso $\alpha \in X$. Considero $\mu = \min(\overbrace{X \cap s(\alpha)}^{X' \subseteq s(\alpha)})$

Dico che μ è il minimo di X.

Sia $\beta \in X$ e $\beta \leq \alpha \to \beta \in X' \Rightarrow \mu \in \beta$.

$\alpha < \beta \to \mu \leq \alpha < \beta$

Dobbiamo dimostrare che μ è $\bigcap X$

$\alpha \in \bigcap X \Rightarrow \forall \beta \in X \quad \alpha \in \beta \Rightarrow \forall \beta \in X \quad \alpha < \beta$

$\Downarrow$

$\forall \beta \in X \quad \mu \leq \beta$ $\qquad$ $\alpha < \mu$

$\Downarrow$

$\alpha < \mu \Rightarrow \forall \beta \in X \quad \alpha < \beta \Rightarrow \forall \beta \in X \quad \alpha \in \beta$

$\Downarrow$

$\alpha \in \bigcap X$.

Cor Sia α un insieme di ordinali

$$\alpha \in \mathrm{Ord} \iff \alpha \text{ è transitivo.}$$

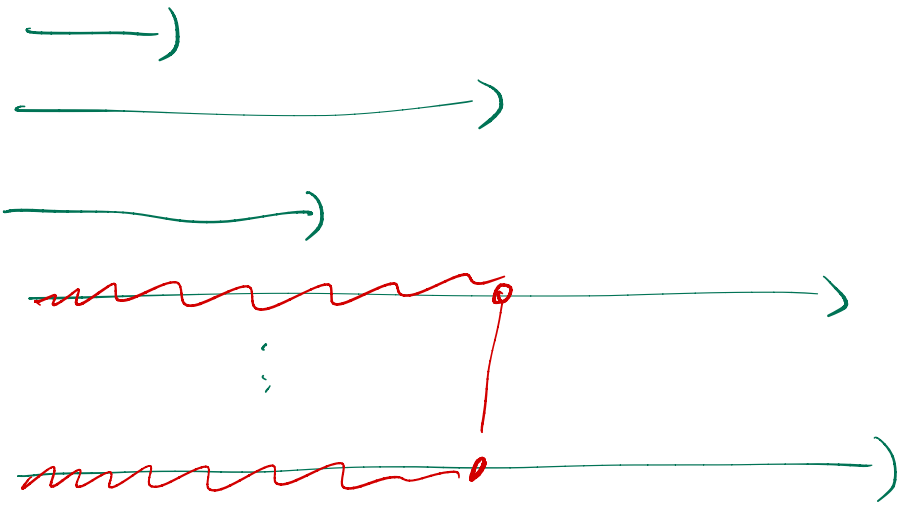
2. Dimostriamo che $\bigcup X$ è un ordinale.

Basta dire che $\bigcup X$ è transitivo.

$$\alpha \in \beta \in \bigcup X \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha \in \bigcup X$$

$$\exists \qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$$\alpha \in \beta \in \gamma \in X \longrightarrow \alpha \in \gamma \in X$$



Dobbiamo dire che $\bigcup X$ è un maggiorante di X

$$\alpha \in X \Rightarrow \alpha \subseteq \bigcup X \Rightarrow \alpha \leq \bigcup X$$

Sia α maggiorante di X

$$\forall \beta \in X \quad \beta \leq \alpha \Rightarrow \forall \beta \in X \quad \beta \subseteq \alpha \Rightarrow \bigcup X \subseteq \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\bigcup X \leq \alpha$$

3. $s(\sup X) \notin X$

Per assurdo

$s(\sup X) \in X \Rightarrow \underline{s(\sup X)} \leq \sup X < \underline{s(\sup X)}$

$\lightning$ $\square$

<u>Cor</u> (paradosso di Burali-Forti)

La classe Ord è una classe propria.

<u>L'assioma del rimpiazzamento</u>

$$\{\emptyset, s(\emptyset), \dots, s^n(\omega), \dots \omega, s(\omega), \dots s^n(\omega) \dots\}$$

$\omega + \omega$
$\parallel$

<u>Esercizio</u> Definisci precisamente questa classe!

<u>Def</u> (funzione classe)

Date classi A e B una funzione classe $F: A \to B$ è una formula $\varphi(x,y)$ tale che

$$\forall x \in A \ \exists! y \in B \ \varphi(x,y)$$

in questo caso scriviamo

$$F(x) = y \overset{\text{def.}}{\equiv} y \in B \wedge \varphi(x,y)$$

<u>Esempi</u> funzioni $V \to V$

$F(x) = x \qquad F(x) = \bigcup x \qquad F(x) = \{x\} \qquad F(x) = s(x).$

$V \to \mathrm{Ord} \qquad F(x) = \sup(x \cap \mathrm{Ord})$

(8) Assioma * del rimpiazzamento

Data una f. classe $F: V \to V$, e dato un insieme A esiste ed è unico l'insieme

$$F[A] \overset{def.}{=} \{ F(a) \mid a \in A \}$$

$$\forall A \; \exists! B \; \forall y \quad y \in B \leftrightarrow \exists x \in A \quad y = F(x)$$

* Schema di assiomi.

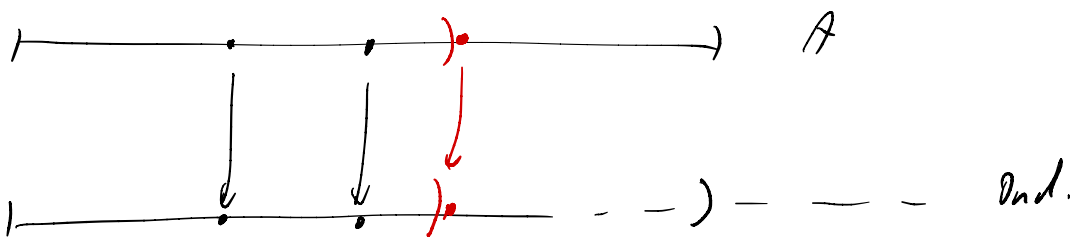
Oss Se A è un insieme e $G: A \to V$ una f. classe allora $G[A]$ è un insieme.

Es. Definisco

$$F(x) = \begin{cases} G(x) & \text{se } x \in A \\ \emptyset & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Teo Per ogni buon ordinamento $(A, <)$ esiste un unico ordinale α t.c. $(A, <) \cong \alpha$.

Es.



$$A' = \{ x \in A \mid \exists \gamma \in Ord \quad A_x \sim \gamma \}$$

$$F : A' \to Ord$$

$$x \mapsto \text{l'unico } \gamma \quad A_x \sim \gamma$$

$$\alpha = F[A']$$

1. α è un ordinale

Dobbiamo verificare che α è transitivo.

$\gamma \in \beta \in \alpha$ $\quad \beta = F(x)$ $\quad \beta \sim A_x$ $\quad f : \beta \to A_x$ iso.

$\gamma = \beta_\gamma$ $\quad f_{|\gamma} : \beta_\gamma \to (A_x)_{f(\alpha)}$

$A_{f(\alpha)}$

$\gamma \sim A_{f(\alpha)} \Rightarrow \gamma \in \alpha$

2. A' è un s.i. di A.

$x \in A'$ $\quad y < x \Rightarrow y \in A'$

$A_x \sim \gamma$ $\quad f : A_x \to \gamma$ iso

$f_{|A_y} : A_y \to \gamma_{|f(y)} = f(y)$

3. $f = \{ (x,y) \in A' \times \alpha \mid F(x) = y \}$

è crescente (quindi un iso. fra A' e α).

$$x_1 < x_2 \Rightarrow A_{x_1} \prec A_{x_2}$$

$$\wr \qquad \wr$$

$$F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

4. $A' = A$

Per assurdo assumiamo $A' = A_x \sim \alpha$

$x \in A' = A_x$ ↯ ∎

Esercizio Dimostra che, dati due insiemi A e B, esiste il loro prodotto cartesiano $A \times B$, usando l'assioma del rimpiazzamento ma senza usare l'assioma delle parti.

Prof.

$$\alpha + \beta \sim (\alpha, <_\alpha) + (\beta, <_\beta)$$

$$\alpha^\beta \sim (1, <_\alpha)^{(\beta, <_\beta)}$$

Esercizio Dimostra che l'insieme introdotto all'inizio della sezione è effettivamente $\omega + \omega$, ossia, più precisamente

$$\forall x \quad x \in \omega + \omega \leftrightarrow (\exists m \in \omega \; x = m) \vee (\exists n \in \omega \; x = \omega + n)$$

Esercizio Dimostra che esiste un insieme A tale che

$$\forall x \quad x \in A \iff x = \emptyset \vee \exists y \in A \quad x = \{y\}$$

ossia, in sostanza, dimostra che esiste

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots\}$$