$$A = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \dots\}$$
$$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$$
$$\omega = \{\emptyset,\ s(\emptyset),\ s(s(\emptyset)),\ \dots\}$$

Prop Data una formula $\varphi(x)$

se $\forall \alpha \in Ord \quad (\forall \beta < \alpha \ \varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha)$

allora $\forall \alpha \in Ord \ \varphi(\alpha)$

Data una classe C $\qquad \forall \alpha \in Ord \quad \alpha \subseteq C \to \alpha \in C$

se $\forall \alpha \in Ord \quad (\forall \beta < \alpha \ \beta \in C) \to \alpha \in A$

allora $\forall \alpha \in Ord \quad \alpha \in C$

$Ord \subseteq C$

Dim Per assurdo supponiamo per assurdo $\neg \varphi(\alpha)$

$$\neg \varphi(\alpha) \Rightarrow \exists \beta < \alpha \ \neg \varphi(\beta)$$

Considero il minimo β tale che $\neg \varphi(\beta)$

Ho $\forall \gamma < \beta \ \varphi(\gamma) \Rightarrow \varphi(\beta)$ $\lightning$ ∎

Def. Un ordinale α è

- 0 se $\alpha = 0$
- successore se $\exists \beta \ \alpha = s(\beta)$
- limite altrimenti.

Prop (induzione transfinita – v.2)

Data una formula φ. Se:

- $\varphi(0)$
- $\forall \gamma \in Ord \quad \varphi(\gamma) \to \varphi(s(\gamma))$
- $\forall \lambda$ ordinale limite $(\forall \eta < \lambda \ \varphi(\eta)) \to \varphi(\lambda)$

Allora $\forall \alpha \in Ord \ \varphi(\alpha)$.

Dim Dobbiamo verificare che, dato $\alpha \in Ord$

$$(\forall \eta < \alpha \ \varphi(\eta)) \to \varphi(\alpha).$$

Se $\alpha \in 0$ ovvio

Se α è limite, è l'ipotesi.

Resta il caso $\alpha = s(\gamma)$.

$$\forall \eta < \alpha \ \varphi(\eta) \Rightarrow \varphi(\gamma) \Rightarrow \varphi(s(\gamma)) \equiv \varphi(\alpha)$$

□

$$g : W^{<W} \to W \rightsquigarrow f : W \to W$$

$$f(x) = g(f_{|x})$$

Def Data $F : C \to V$ funzione classe, e dato un insieme $X \subseteq C$, esiste la funzione

$$F_{|X} : X \to F[X] \qquad a \mapsto F(a)$$

Dim Per separazione in $X \times F[X]$

esiste per simplicità.

Teo (ricorsione transfinita)

Data una funzione classe $G : V \to V$ esiste una unica* funzione classe $F : Ord \to V$ tale che

$$\forall \alpha \in Ord \quad F(\alpha) = G(F_{|\alpha})$$

* Date F_1, F_2 come sopra, vale

$$\forall \alpha \in Ord \quad F_1(\alpha) = F_2(\alpha).$$

Dim

$$f = H(\alpha) \overset{def.}{\equiv} \begin{cases} f \text{ è una funzione} \\ \wedge \ Dom(f) = \alpha \\ \wedge \ \forall \beta \in \alpha \quad f(\beta) = G(f_{|\beta}) \end{cases}$$

- $\forall \alpha \in Ord \quad \exists f \quad f = H(\alpha)$

Dim: per induzione transfinita — v. 2.

- caso $\alpha = 0$ prendo $f = \emptyset$
- caso $\alpha = s(\beta)$ per ipotesi ind. esiste $g = H(\beta)$

$f \overset{def}{=} g \cup \{(\beta, G(g))\}$

Verifica: facile $f(\beta) = G(g) = G(f_{|\beta})$

unicità:

Osserviamo che $f|_n = H(n)$ e questa è unica per ipotesi induttiva. $f(n) = G(f|_n) = G(H(n))$.

Dom $f = s(n) = n \cup \{n\}$

- caso $\alpha = \lambda$ limite (esista per rimpiazzamento)

Vogliamo dire che $H(\lambda) = \bigcup \{H(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$

Prima verifichiamo che dati $\alpha_1 < \alpha_2$, $H(\alpha_1) = H(\alpha_2)|_{\alpha_1}$

$$\mathrm{Dom}(H(\lambda)) = \bigcup \{\mathrm{Dom}(H(\alpha)) \mid \alpha < \lambda\}$$
$$= \bigcup \{\alpha \mid \alpha < \lambda\} = \lambda.$$

Ora abbiamo la funzione cercata H.

$$\beta = F(\alpha) \overset{\text{def.}}{\equiv} \beta = H(s(\alpha))(\alpha)$$
$$\exists f \quad f = H(s(\alpha)) \wedge \beta = f(\alpha)$$

Dobbiamo verificare

$$\forall \alpha \in Ord \quad F(\alpha) = G(F|_\alpha)$$

Basta dire che

$$F|_\alpha = H(s(\alpha))|_\alpha$$

Ossia, che dato $\beta < \alpha$

$$F(\beta) = H(s(\alpha))(\beta)$$

Sia $f = H(s(\alpha))$ $\quad g = H(s(\beta))$

$$g(\beta) = f(\beta)$$

Ma abbiamo già osservato che

$$g = H(s(\beta)) = H(s(\alpha))_{|s(\beta)} = f_{|s(\beta)}$$

Unicità di F (ind. tr. $\rightsquigarrow \forall \alpha \in Ord \; F_1(\alpha) = F_2(\alpha)$)

$$\left(\forall \beta < \alpha \;\; F_1(\beta) = F_2(\beta)\right) \longrightarrow F_1(\alpha) = F_2(\alpha)$$

$$F_1|_\alpha = F_2|_\alpha \qquad G(F_{1|\alpha}) \quad G(F_{2|\alpha})$$

∎

Def. Date A, B classi, la classe $A \times B$ è

$$x \in A \times B \overset{def}{\equiv} \exists a \in A \; \exists b \in B \; x = (a, b).$$

Prop. Dati: x_0

una funzione classe $G_1 : Ord \times V \to V$

una funzione classe $G_2 : V \to V$

Esiste un'unica F funzione classe tale che

$F(0) = x_0$

$\forall \alpha \in On \quad F(S(\alpha)) = G_1(\alpha, F(\alpha))$

$\forall \lambda$ ord. limite $\quad F(\lambda) = G_2(F|_\lambda)$

Dim

Applico il teo. con la seguente G

$F(\alpha) \quad F|_\alpha$

$\downarrow \quad \downarrow$

$$x = G(f) \equiv \begin{cases} Dom(f) = \emptyset \wedge x = x_0 \\ \vee \begin{pmatrix} \exists n \; Dom(f) = S(n) \\ \wedge \forall n \; Dom(f) = S(n) \quad x = G_1(n, f(n)) \end{pmatrix} \\ \vee \begin{pmatrix} \neg \exists n \; Dom(f) = S(n) \wedge Dom(f) \neq \emptyset \\ \wedge x = G_2(f) \end{pmatrix} \end{cases}$$

□

Def

$\alpha + 0 = \alpha$

$\alpha + S(n) = S(\alpha + n)$

$\alpha + \lambda = \sup\{\alpha + n \mid n < \lambda\}$ con λ limite

$\alpha \cdot 0 = 0$

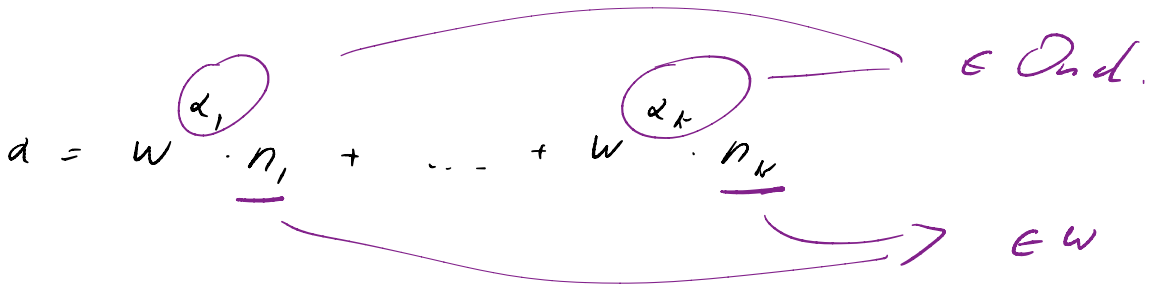
$\alpha \cdot S(n) = \alpha \cdot n + \alpha$

$\alpha \cdot \lambda = \sup\{\alpha \cdot n \mid n < \lambda\}$ con λ limite

$\alpha^0 = 1$

$\alpha^{S(n)} = \alpha^n \cdot \alpha$

$\alpha^\lambda = \sup\{\alpha^n \mid n < \lambda\}$ con λ limite



$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_k$$

$$\varepsilon_0 = w^{\varepsilon_0}$$