(i) $|X| = \aleph_\alpha$

$\exists\, \alpha \in Ord$

(ii) $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta) = \aleph_{\max(\alpha,\beta)}$

Oss. Dati $\alpha, \beta \in Ord$ o $|\alpha| < |\beta|$

o $|\alpha| = |\beta|$

o $|\beta| < |\alpha|$.

Def.

$\alpha \in Ord$ è INIZIALE se $\forall \beta < \alpha \quad |\beta| < |\alpha|$

Teo (Hartogs)

Dato un insieme X esiste un ordinale α che non è equipotente ad alcun sottoinsieme di X.

$$\forall X \; \exists \alpha \in Ord \; \forall X' \subseteq X \quad |X'| \neq |\alpha|.$$

Dim

$Y = \{ R \in \mathcal{P}(X \times X) \mid R$ è un buon ordine su qualche $X' \subseteq X \}$.

Sia F la f. classe b.o. $\longrightarrow$ ordinale isomorfo

$$\alpha = s\left(\sup\left(F[Y]\right)\right)$$

Supponiamo per assurdo $|\alpha| = |X'|$ con $X' \subseteq X$.

Sia $f : X' \to \alpha$ bigezione

Dati $a, b \in X'$ $\quad a <^* b \equiv f(a) < f(b)$ $\quad \in \alpha$.

$<^*$ è un b.o. su X' e $(X', <^*) \sim \alpha$.

Quindi $\alpha \in F[Y]$

$$\alpha \leq \sup F[Y] < s(\sup F[Y]) = \alpha \quad \rightsquigarrow \quad \blacksquare$$

<u>Def</u> $H(X)$ "numero di Hartogs di X"

$\shortparallel$ def.

il minimo ordinale che non si immerge in X.

<u>Oss.</u> $H(X)$ è iniziale

<u>Dim</u> Per assurdo suppongo $\alpha < H(X)$ con $|\alpha| = |H(X)|$

$\Downarrow$

$\exists X' \subseteq X \quad |\alpha| = |X'| \quad \rightsquigarrow$

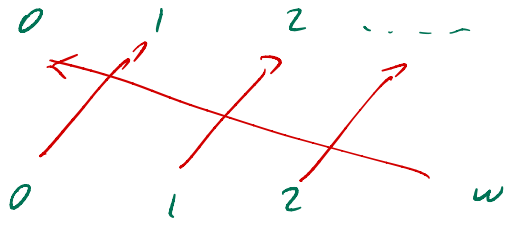
<u>Com.</u> La classe degli ordinali iniziali è una classe propria.

<u>Dim</u> Se fosse un insieme X. Considero

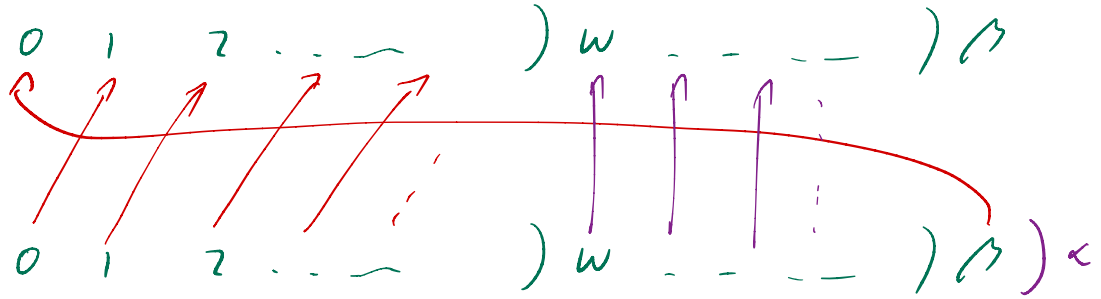
$$\sup X < \underline{H(\sup X)} \quad \rightsquigarrow \quad \blacksquare$$

Es. Sia $\alpha \in Ord$ iniziale e infinito, dimostrare che α è limite.

N.B. Supponiamo per assurdo $\alpha = s(\beta)$ allora $|\alpha| = |\beta|$ quindi α non è iniziale.



$w \leq \beta$



somma ordinale

$$|s(\beta)| = 1 + |\beta| = |1 \cup \beta| = |\underbrace{1 + \beta}_{= \beta}| = |\beta|$$

Esercizio RAGIONAMENTO SBAGLIATO

$$\alpha = \sup \{ \beta \in Ord \mid |\beta| = \aleph_0 \}$$

chiaramente $|s(\alpha)| > \aleph_0$.

Prop Data una classe propria di ordinali C (unica) esiste una funzione classe $F : Ord \to C$ crescente e biunivoca.

Dim Costruiamo

$h(\alpha)$ = il minimo elemento di C che $\notin h[\alpha]$

Esistenza di F ossia h è crescente (1) e biunivoca (2).

(1) $\alpha_1 < \alpha_2$ supponiamo che $h(\alpha_2) \geq h(\alpha_1)$

$h[\alpha_2] \supseteq h[\alpha_1]$

(2) $\alpha \in C \to \exists \beta \quad \alpha = h(\beta)$

$\alpha < s(\alpha) \leq h(s(\alpha)) \Rightarrow \alpha \in h[s(\alpha)]$ ☐

Def $\alpha \mapsto \omega_\alpha$ enumera gli ordinali infiniti (infiniti) in modo crescente.

Prova $\omega_0 = \omega$

$\omega_{s(\alpha)} = H(\omega_\alpha)$

$\omega_\lambda = \sup \{ \omega_\alpha \mid \alpha < \lambda \}$.

Prop: $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta) = \aleph_{\max(\alpha,\beta)}$

$$|\aleph_\alpha| + n = |\aleph_\alpha| \cdot n = \aleph_\alpha$$
$$\uparrow \neq 0$$

Lemma $\forall \alpha \in Ord \quad \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

Dim (prop.) Supponiamo $\beta \leq \alpha$

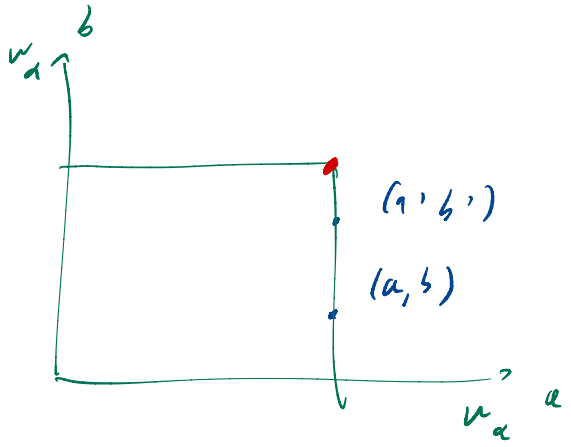
$$\aleph_\alpha \leq \aleph_\beta + \aleph_\alpha \leq 2 \cdot \aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$$

□

Dim (lemma) $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$

Per induzione transfinita.
Assumiamo per ipotesi induttiva $\forall \beta < \alpha \quad \aleph_\beta^2 = \aleph_\beta$
Dobbiamo mostrare $|W_\alpha \times W_\alpha| = |W_\alpha|$
Strategia: costruiamo un buon ordine $\prec$ su $W_\alpha \times W_\alpha$ tale che $(W_\alpha \times W_\alpha, \prec) \simeq W_\alpha$

$$(a,b) \prec (a',b') \equiv \max(a,b) < \max(a',b')$$
$$\vee \ (\max = \max \wedge a < a')$$
$$\vee \ (\max = \max \wedge a = a' \wedge b < b').$$

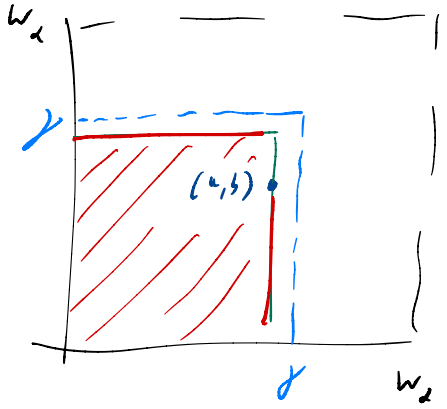


$\omega_\alpha \precsim (\omega_\alpha \times \omega_\alpha, \prec)$ facile.

$(\omega_\alpha \times \omega_\alpha, \prec) \precsim \omega_\alpha$

Supponiamo per assurdo $\omega_\alpha \prec (\omega_\alpha \times \omega_\alpha, \prec)$

$\omega_\alpha \sim (\omega_\alpha \times \omega_\alpha, \prec)_{(a,b)}$



$\gamma = \mathrm{otp}(\mathrm{pred}(a,b)) < \omega_\alpha$

$|\omega_\alpha| = |(\omega_\alpha \times \omega_\alpha, \prec)_{(a,b)}| \leq |\gamma \times \gamma| = |\gamma| < |\omega_\alpha|$

↯

∎