L'assioma della scelta

$|\mathbb{R}| \neq \aleph_\alpha$ $\quad$ $|\mathbb{R}| \neq \aleph_\omega$

↓

AD 1906

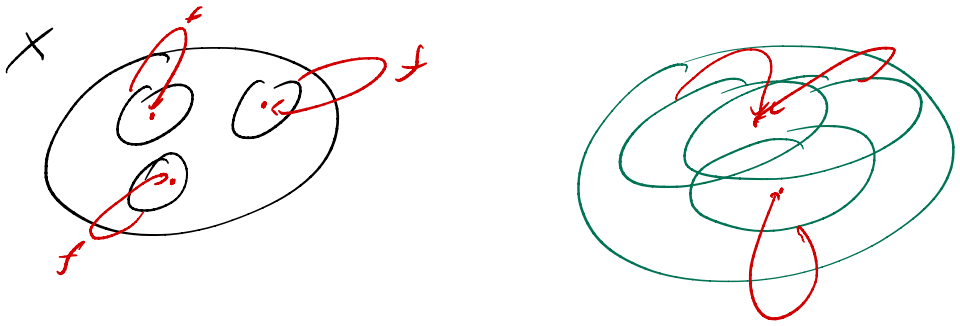
König: $\mathbb{R}$ non è ben ordinabile ← SBAGLIATO!

Zermelo: Se vale AC allora $\mathbb{R}$ è ben ordinabile

(1) Assioma di scelta

Se X è un insieme di insiemi non vuoti, allora esiste $f : X \to \bigcup X$ tale che $\forall a \in X \quad f(a) \in a$

$$\forall X \ (\forall a \in X \ a \neq \emptyset) \to (\exists f \in {}^X(\bigcup X) \ \forall a \in X \ f(a) \in a)$$



$x_n \to \infty$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ considero $x_n > n$ tale che...

Considero $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x > n \wedge \text{tali che ...}\}$

$X = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Per AC esiste $f : X \to \bigcup X \subseteq \mathbb{R}$

$f(A_n) \in A_n$

Definisco $x_n = f(A_n)$.

Tre.

(AC) $\hookrightarrow$ (Lemma di Zorn) $\hookrightarrow$ (Tre. buon ordinamento)
(di Zermelo)

Lemma di Zorn

Sia $(S, <)$ un ordine parziale tale che ogni sottocatena* di S ha un maggiorante,* allora S ha elementi massimali.*

* $A \subseteq S$ totalmente ordinato dall'ordinamento indotto

* $x \in S$ è maggiorante $A \subseteq S$ se $\forall a \in A \quad a \leq x$

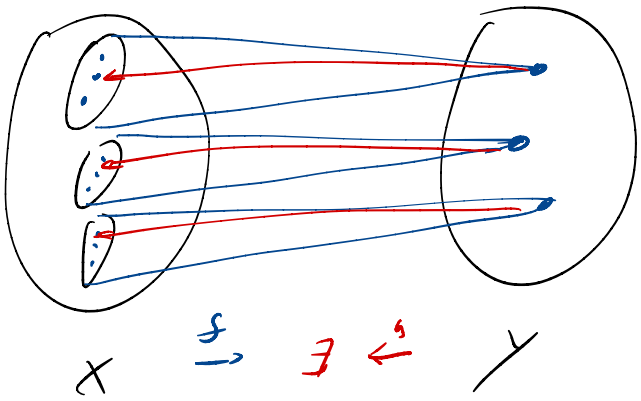
* y è un el. massimale di S se $\neg \exists z \in S \quad y < z$

Teo. (buon ordinamento — di Zermelo)
Ogni insieme è ben ordinabile.

Prop:
AC ⟷ Ogni funzione suriettiva ha un'inversa destra.

Data $f : X \to Y$ suriettiva

Esiste $g : Y \to X$ tale che $f(g(y)) = y$.



AC → ...

$\{x \in X \mid f(x) = y\}$

Considero $S = \{ f^{-1}(y) \mid y \in Y \}$

Quindi c'è $h : S \to \bigcup S \in X$

$h(A) \in A$

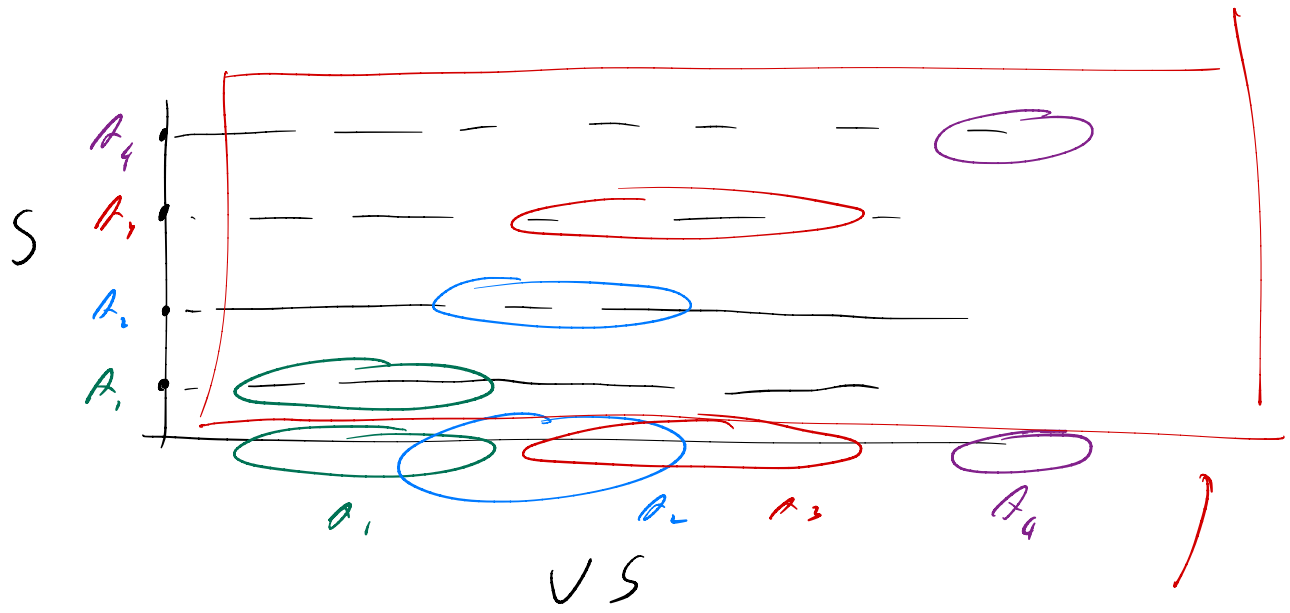
Definiamo $g(y) = h(f^{-1}(y))$.

AC ← ....

Sia S un insieme di insiemi non vuoti.

$\{(A, x) \in S \times \bigcup S \mid A \in S \wedge x \in A\}$

$$X = \{(A, x) \in S \times US \mid A \in S \text{ y } x \in A\}$$



son los siguientes

$$X = \{(A, x) \in S \times US \mid A \in S \text{ y } x \in A\}$$

$f : X \to S$ $\quad$ Considera $g : S \to X$

$(A, x) \mapsto A$ $\quad$ $f(g(A)) = A$

$g(A) = (A, \text{un cualquier } x \in A)$

$b(A) \overset{\text{def}}{=}$ la segunda componente de $g(A)$.

Dim (AC → buon ord. IDEA)

Dato S cerchiamo un b.o. su S.

$\Updownarrow$

una bigezione fra S e un ordinale.

Fissiamo $f : \mathcal{P}^{\neq \emptyset}(S) \to S$ funzione di scelta

$x_0 = f(S)$ $\quad x_1 = f(S \setminus \{x_0\})$ $\quad x_2 = f(S \setminus \{x_0, x_1\})$

Più in generale definisco per ricorsione transfinita

$$x_\alpha = f(S \setminus \{x_\beta \mid \beta < \alpha\})$$

$$g(\alpha) = f(S \setminus g[\alpha])$$

$\square$

Dim (Zorn → b.o.)

Consideriamo

$T = \{ f : \alpha \to S \mid \text{con } \alpha \in \mathrm{Ord} \text{ e } f \text{ iniettiva} \}$

Osserviamo che se $f : \alpha \to S$ è massimale per $\subseteq$ allora è bigettiva.*

* Per assurdo se esiste $y \in S$ $y \in \mathrm{Im}(f)$ allora $f' = f \cup \{\alpha, y\} : s(\alpha) \to S$ è in. e $f \subseteq f'$.

Quindi mi basta verificare le ipotesi di Zorn.

Sia A sottocatena di $(T, \subseteq)$.

$f = \bigcup A$ è un maggiorante di A.

$\blacksquare$

Dim (bo → AC)

Devo costruire $f: S \to \bigcup S$ f. di scelta

Fisso $<$ b.o. su $\bigcup S$ $\qquad A \in S \to A \subseteq \bigcup S$

$$f(A) \overset{def}{=} \min_{<}(A).$$

$\blacksquare$

Dim (AC → Zorn)

Sia $(S, <)$ ordine parziale.

Se, per assurdo, S non ha elementi maggiorati, allora ogni $A \subseteq S$ sottocatena ha un maggiorante stretto.

Fisso $f: \mathcal{P}^{\neq \emptyset}(S) \to S$ f. di scelta.

Definisco per ricorsione transfinita $F: \mathrm{Ord} \to S$

$$F(\alpha) = f(\{\text{maggioranti stretti di } F[\alpha]\})$$

Verifichiamo che F è iniettiva. Per assurdo $F(\alpha) = F(\beta)$, allora sopra $\alpha < \beta$, $F(\alpha) < F(\beta)$.

$F|_{H(S)} : H(S) \to S$ iniettiva $\rightsquigarrow$

$$G(x) = \begin{cases} f(\{\text{maggior. stretti di } x\}) & \text{se ha senso} \\ \emptyset & \text{altrimenti} \\ \in S \end{cases}$$

$\blacksquare$