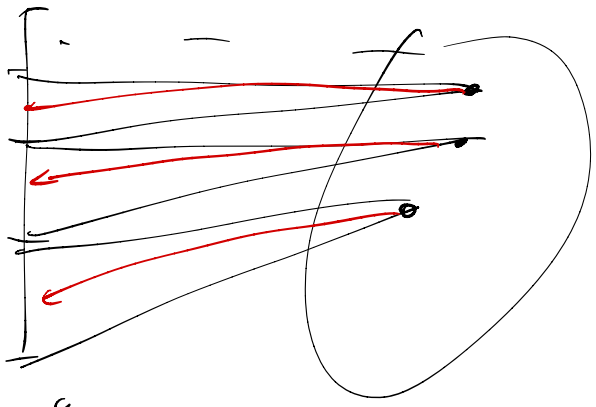
## Conseguenze immediate di AC



$\xrightarrow{f}$ $\exists$ $\xleftarrow{g}$ $\qquad f(g(y)) = y$

$\neq \emptyset$

$$X \longmapsto \begin{cases} \min\left(X \cap \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}\right) & \text{se ci} \\ \max\left(X \cap \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq 0\}\right) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

---

**Prop** Ogni insieme è equipotente a un ordinale.
Per ogni $X$ infinito esiste $\alpha \in Ord$ t.c. $|X| = \aleph_\alpha$.

**Rip** Ora Zermelo $X$ è ben ordinabile
Sia $(X, <)$ un ben ordinamento. Esiste $\eta \in Ord$.
tale che $(X, <) \sim \eta$. Quindi $|X| = |\eta|$. ☐

**Oss.** L'enunciato precedente implica AC.

Cor Le cardinalità sono "totalmente ordinate"

Cor Se le cardinalità sono ben ordinate allora vale $\mathbb{AC}$.

Dim Dato $X$ o $|X| \leq |\mathcal{H}(X)|$ o $|\mathcal{H}(X)| \leq |X|$

impossibile!

$\downarrow$

Quindi è vero

$\exists f : X \to \mathcal{H}(X)$ iniettiva

Dati $a, b \in X$ $a \leq b \overset{\text{def}}{\iff} f(a) < f(b)$. ☐

Cor $\forall X$ infinito $|X| = |X \times X|$

Teo (Tarski)

$(\forall X \text{ infinito } |X| = |X \times X|) \longrightarrow \mathbb{AC}$.

Cor $X$ infinito $\to |X| \geq \aleph_0$ *

Dim Ovvio perché ogni cardinale è un aleph.

* $X$ infinito $\to \exists Y \subseteq X$ $Y$ è numerabile

Cor $X$ è infinito $\iff$ $X$ è Dedekind-infinito

Dim

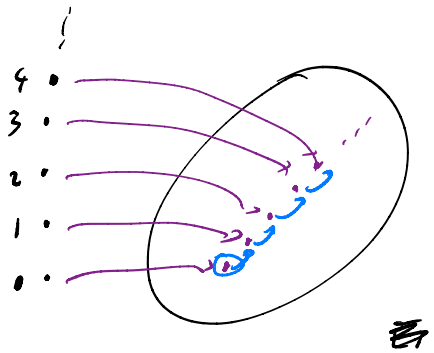
$\leftarrow$ già vista.

$\to$ Fissiamo $f : \omega \to X$ iniettiva

Definisco $g : X \to X \setminus \{f(0)\}$ iniettiva

$\hookrightarrow |X| = |X \setminus \{f(0)\}|$

$$g(a) = \begin{cases} f(s(f^{-1}(a))) & a \in \mathrm{Im}\, f \\ a & a \notin \mathrm{Im}\, f \end{cases}$$




∎

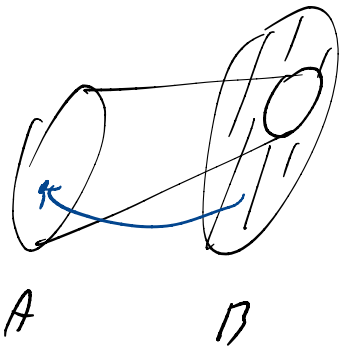
**Def** $|A| \leq |B|$ se esiste $f : A \to B$ iniettiva

**Prop** $0 < |A| \leq |B| \iff \exists f : B \to A$ suriettiva

**Dim**

$\to$ Fisso $a_0 \in A$, fisso $g : A \to B$ iniettiva

$f : B \to A$ suriettiva




$$f(y) = \begin{cases} g^{-1}(y) & \text{se } y \in \mathrm{Im}\, g \\ a_0 & \text{se } y \notin \mathrm{Im}\, g \end{cases}$$

$\leftarrow$ Fisso $f : B \to A$ suriettiva

$g : A \to B$ iniettiva.

Prendo un'inversa destra di $f$. $f(g(y)) = y$

$$g(y_1) = g(y_2)$$

$$y_1 = f(g(y_1)) = f(g(y_2)) = y_2$$

∎

**Prop.** Se $|S| \leq \aleph_\alpha$ e $\forall A \in S \ |A| \leq \aleph_\alpha$
allora $|\bigcup S| \leq \aleph_\alpha$.

**Dim** Sia $f : w_\alpha \to S$ suriettiva.

Per ogni $\beta \in w_\alpha$ esiste una funzione $g : w_\alpha \to f(\beta)$ sur.

Per ogni $\beta < w_\alpha$ scelgo $g_\beta : w_\alpha \to f(\beta)$ suriettiva.

Definisco $h : w_\alpha \times w_\alpha \longrightarrow \bigcup S$

$$(\beta, \gamma) \longmapsto g_\beta(\gamma)$$

Dato $y \in \bigcup S$ esiste $z \in S$ t.c. $y \in z$

$\to$ esiste $\beta \in w_\alpha$ t.c. $z = f(\beta)$

$\to$ esiste $\gamma < w_\alpha$ $g_\beta(\gamma) = y \in z = f(\beta)$.

Quindi $y = g_\beta(\gamma) = h(\beta, \gamma)$. ∎

**Prop.** Sia $X$ infinito, $n \in \omega$, $n > 0$. $|\mathcal{P}^{\leq n}(X)| = |X|$

$\{A \in \mathcal{P}(X) \mid |A| \leq n\}$

**Dim.** $|\mathcal{P}^{\leq n}(X)| \geq |X|$

Perché $x \longmapsto \{x\}$ è iniettiva.

$$|\mathcal{P}^{\leq n}(X)| \leq |X|$$

$$\downarrow \{f : n \to X\}$$

$$F : {}^nX \longrightarrow \mathcal{P}^{\leq n}(X)$$

$$f \longmapsto \mathrm{Im}(f).$$

$$|\mathcal{P}^{\leq n}(X)| \leq |{}^nX| = |X|^n = |X|$$

$$|X|^2 = |X|. \qquad \blacksquare$$

<u>Prop</u> $X$ infinito $\to |\mathcal{P}^{fin}(X)| = |X|$

<u>Dim</u> Sia $|X| = \aleph_\alpha$

$$\mathcal{P}^{fin}(X) = \bigcup \underbrace{\{\overbrace{\mathcal{P}^{\leq n}(X)}^{|\,| = \aleph_\alpha} \mid n \in \omega\}}_{= \aleph_0 \leq \aleph_\alpha}$$

$$|\mathcal{P}^{fin}(X)| \leq \aleph_\alpha. \qquad \blacksquare$$

---

<u>Prop</u>: Dato un ordine totale $(A, <)$

$(A, <)$ è b.o. sse $\neg \exists \{a_n\}_{n \in \omega}$ decrescente di elementi di $A$

$$(\forall n \; a_n \in A) \wedge (\forall m < n \quad a_n < a_m).$$

Dim $\exists \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow A$ non è l.o.

Considero $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ questo non ha minimo

$A$ non è l.o. $\longrightarrow \exists \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Sia $S \subseteq A$ che non ha un minimo.

Fissiamo $f : \mathcal{P}^{\neq\emptyset}(S) \to S$

Definisco per ricorsione

$$a_{s(n)} = f(\{x \in S \mid x < a_n\}).$$

---

Ricordiamo $B$ è una base dello sp. vett. $V$ su $K$.

se $B$ è lin. indipendente* e

$$\forall v \in V \ \exists n \in \mathbb{N} \ \exists a_1 \dots a_n \in B \ \exists x_1 \dots x_n \in K$$

$$v = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

"ogni $v \in V$ si scrive come combinazione lineare FINITA degli elementi di $B$"

* o non è comb. lineare finita non banale di elementi di $B$.

Prop Ogni sp. vett. ha una base

Es: Dimostrare che esiste $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
additiva $\forall x, y \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$
tale che $\forall k \in \mathbb{R} \quad \exists x \quad f(kx) \neq k f(x)$.

↑
"non lineare".