Applicazioni di AC $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$

Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$

$$x \in \bar{A} \iff \exists \{a_n\}_{n \in \omega} \in {}^{\omega}\mathbb{R} \ \left(\forall n \in \omega \ a_n \in A \right) \wedge \left(\lim_{n \to \infty} a_n = x \right)$$

Dim

$\leftarrow$ immediata

$\rightarrow$ Ossiamo che gli insiemi $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A$ sono $\neq \emptyset$.
Sia $f : \{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \mid \varepsilon > 0 \} \to A$ una f. di scelta. Definiamo

$$a_n = f\left( ]x - \tfrac{1}{n+1}, x + \tfrac{1}{n+1}[\cap A \right).$$

∎

Def Sia V sp. vett. su F.
$X \subseteq V$ è lin. indipendente se $\nexists v_1 \dots v_n \in X$ distinti e $a_1 \dots a_n \in F$ non tutti nulli t.c. $v_1 a_1 + \dots + v_n a_n = 0$.

$B \subseteq V$ è una base se è lin. ind. e per ogni $v \in V$ esistono $v_1 \dots v_n \in B$ $a_1 \dots a_n \in F$ $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = v$.

Oss. B è una base se e solo se B è lin. ind. massimale per inclusione.

Dim

(base $\to$ max) $\quad v = a_1 v_1 + \dots a_n v_n \qquad w_1 \dots w_n \in B$

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + (-1)\, w = 0.$$

(max → base) $a_1 v_1 + \dots a_n v_n + c w = 0 \qquad v_1 \dots v_n \in B$

$$w = -\frac{a_1}{c} v_1 + \dots + -\frac{a_n}{c} v_n$$

□

Prop Dato $X \subseteq V$ lin. ind. esiste una base B di V con $X \subseteq B$.

Dim Consideriamo l'insieme parzialmente ord da $\subseteq$

$$S = \{ Y \subseteq V \mid X \subseteq Y \wedge Y \text{ è lin. indip.} \}$$

Data C catena in S, UC è un maggiorante di C.

Devo dire che UC è lin. ind. Sia

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

con $a_1 \dots a_n \in F \qquad v_1 \dots v_n \in UC$.

Considero $Y_1 \dots Y_n$ tali che $v_1 \in Y_1 \dots v_n \in Y_n$.

Sia Y_k con $k = 1 \dots n$ il max per $\subseteq$ fra $Y_1 \dots Y_n$.

Quindi $v_1 \dots v_n \in Y_k \rightarrow a_1 \dots a_n = 0$.

■

Esempio $\mathbb{R}$ è un $\mathbb{Q}$-sp. vettoriale. Quindi ha una base B

$$x = q_1 b_1 + \dots q_n b_n \qquad q_1 \dots q_n \in \mathbb{Q} \qquad b_1 \dots b_n \in B.$$

Es. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$

$$f(x) \neq kx$$

Sol. Fisso B base di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$.

Dado $x \in \mathbb{R}$ ya sabemos que existe un modo único como

$$x = q_1 b_1 + \dots + q_n b_n$$

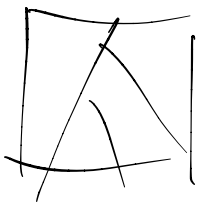
Luego $\bar{b} \in B$.

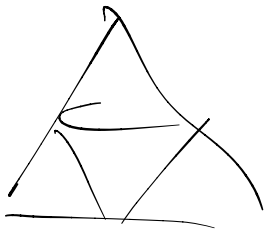
$$f(q\bar{b} + q_1 b_1 + \dots + q_n b_n) = q$$

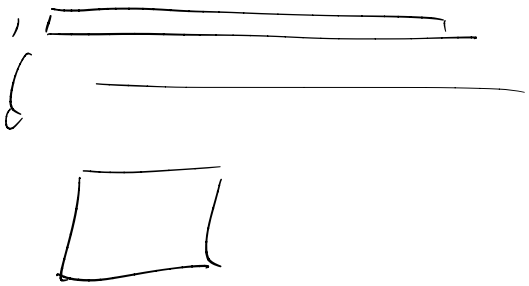
Si $b_1 \in B$ y $b_1 \neq \bar{b}$ $\quad f(b_1) = f(0 \cdot \bar{b} + 1 \cdot b_1) = 0$.

$f(\bar{b}) = f(1 \cdot \bar{b}) = 1$

Ej. Sea B base de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. $|B|$?





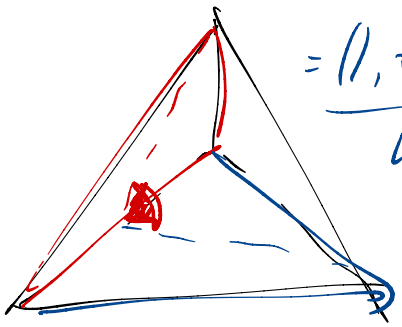


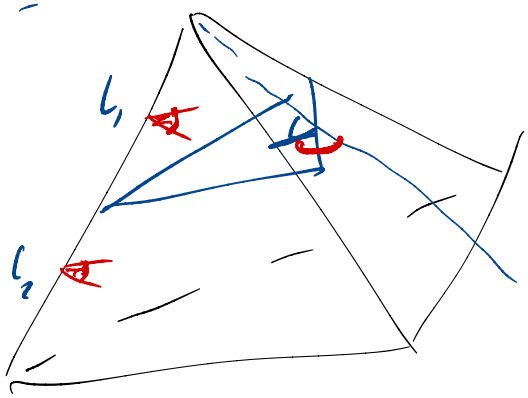


$l_1 f(\alpha) + l_2 f(\alpha) =$

$= (l_1 + l_2) \cdot f(\alpha)$

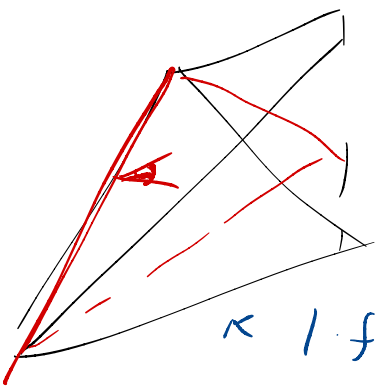
l





$l \cdot f(\alpha_1) + l \cdot f(\alpha_2) =$

$= l \cdot f(\alpha_1 + \alpha_2) = l \cdot f(\pi) = 0$



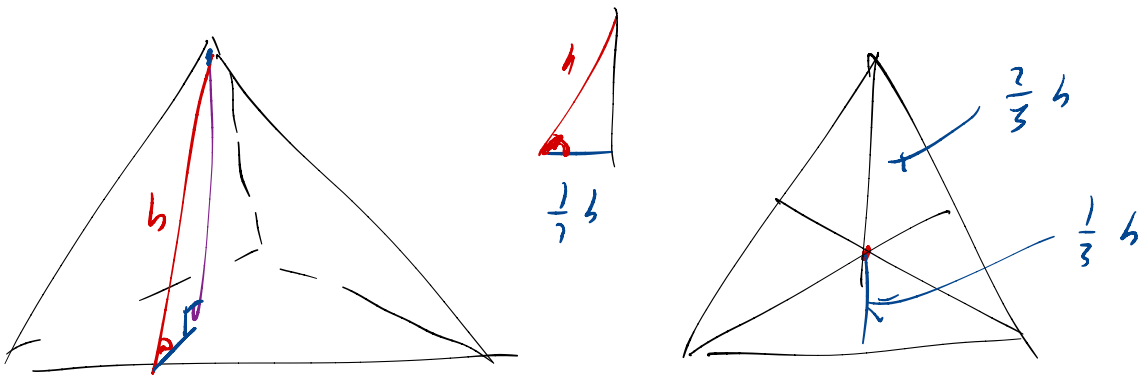
$\kappa \quad l \cdot f(\alpha_1) + l \cdot f(\alpha_2) = l \cdot f(\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2}_{\alpha})$

Uno spigolo lungo l che forma un angolo di α vale $l \cdot f(\alpha)$

f additiva t.c. $f(\pi) = 0$.

$$f(q\pi) = 0 \qquad q \in \mathbb{Q}$$

Vogliamo dire che l'angolo diedro di un tetraedro regolare non è multiplo razionale di π.



$\alpha = \arccos \frac{1}{3}$ $\qquad (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n \notin \mathbb{R}$

$$\left(\frac{1}{3}(1 + 2i\sqrt{2})\right)^n =$$

$$= \frac{1}{3^n}(1+2i\sqrt{2})^n$$

$\hookrightarrow a_n + b_n i\sqrt{2} \qquad a_n, b_n \in \mathbb{Z}$.

$1 + 2i\sqrt{2} \equiv 1 + 2i\sqrt{2} \pmod 3$

$(\quad)^2 \equiv 2 + 1\,i\sqrt{2} \pmod 3$

$(\qquad)^3 \equiv 1 + 2i\sqrt{2} \quad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{z})$

Def μ è una misura σ-additiva su $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ se $\mu : X \to \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ tale che dati A_i per $i \in \omega$ disgiunti $\mu\Big(\underbrace{\bigcup \{A_i \mid i \in \omega\}}_{\in X}\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$

Def μ ... è invariante per traslazioni se

$$\forall A\ \forall r \in \mathbb{R} \quad \mu(A) = \mu(\underbrace{r + A}_{\{r+x \mid x \in A\}})$$

Prop Non esiste una misura σ-additiva, inv. per trasl. su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.c. $\mu([0,1[) = 1$. $\notin \{0, +\infty\}$

Dim

Idea: scrivo $[0,1[= \bigcup_{i \in \omega} A_i$ con gli A_i disgiunti tali che $\mu(A_i) = \mu(A_j)$

$= 0 \to \mu([0,1[) = 0$

$= a > 0 \to \mu(\text{—}) = \sum_{i=0}^{\infty} a = +\infty$

Definisco $\overset{\in \mathbb{R}}{x \sim y} \equiv x - y \in \mathbb{Q}$.

Considero S insieme delle classi.