$$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}$$

disgiunti

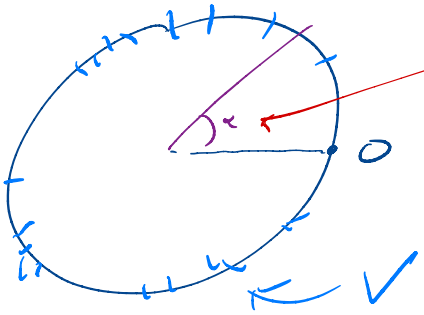
$$\mu\left(\bigcup_{i \in \omega} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$$

$$\mu([0,1[) = 1$$

$$= \{x + y \mid y \in A\}$$

$$\mu(A) = \mu(x + A)$$

Prop. Questa cosa non esiste!



misurato in multipli di 2π

$90° = \frac{1}{4}$ $360° = 1$ etc.

Def $\alpha \sim \beta$ se $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}$

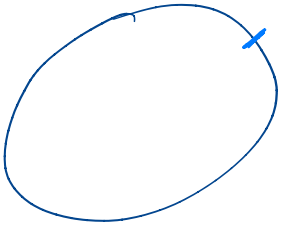
Per ogni classe C di $\sim$-equivalenza scelgo $x_C \in C$

$$V \overset{\text{def.}}{=} \{x_C \mid C \in \mathcal{P}(\text{cerchio}) \text{ classe di } \sim\text{-equiv.}\}$$

Fisso $\{q_i\}_{i \in \omega}$ enumerazione di $\mathbb{Q} \cap [0,1[$

$$A_i \overset{\text{def.}}{=} V + q_i$$

"ruotato di"



Teorema di Cantor - Bendixson

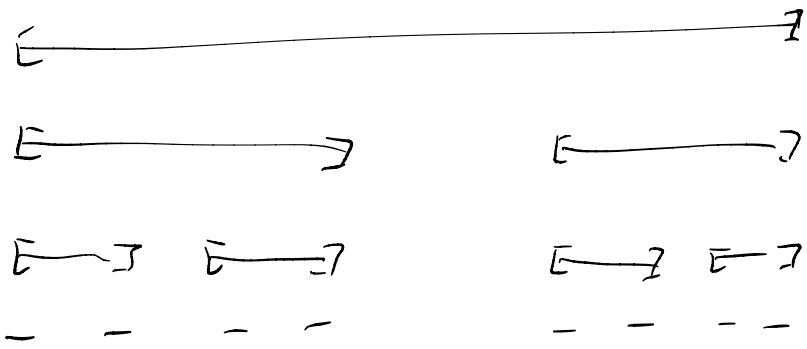
Cor Se $C \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso, allora o $|C| = 2^{\aleph_0}$ o $|C| \in \aleph_0$.

Teo Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ allora esistono P perfetto e A con $|A| \leq \aleph_0$ tali che $P \cap A = \emptyset$ e $P \cup A = C$.

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ $p \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di A se $p \in \overline{A \setminus \{p\}}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad A \cap (]p-\varepsilon, p[\cup]p, p+\varepsilon[) \neq \emptyset$$

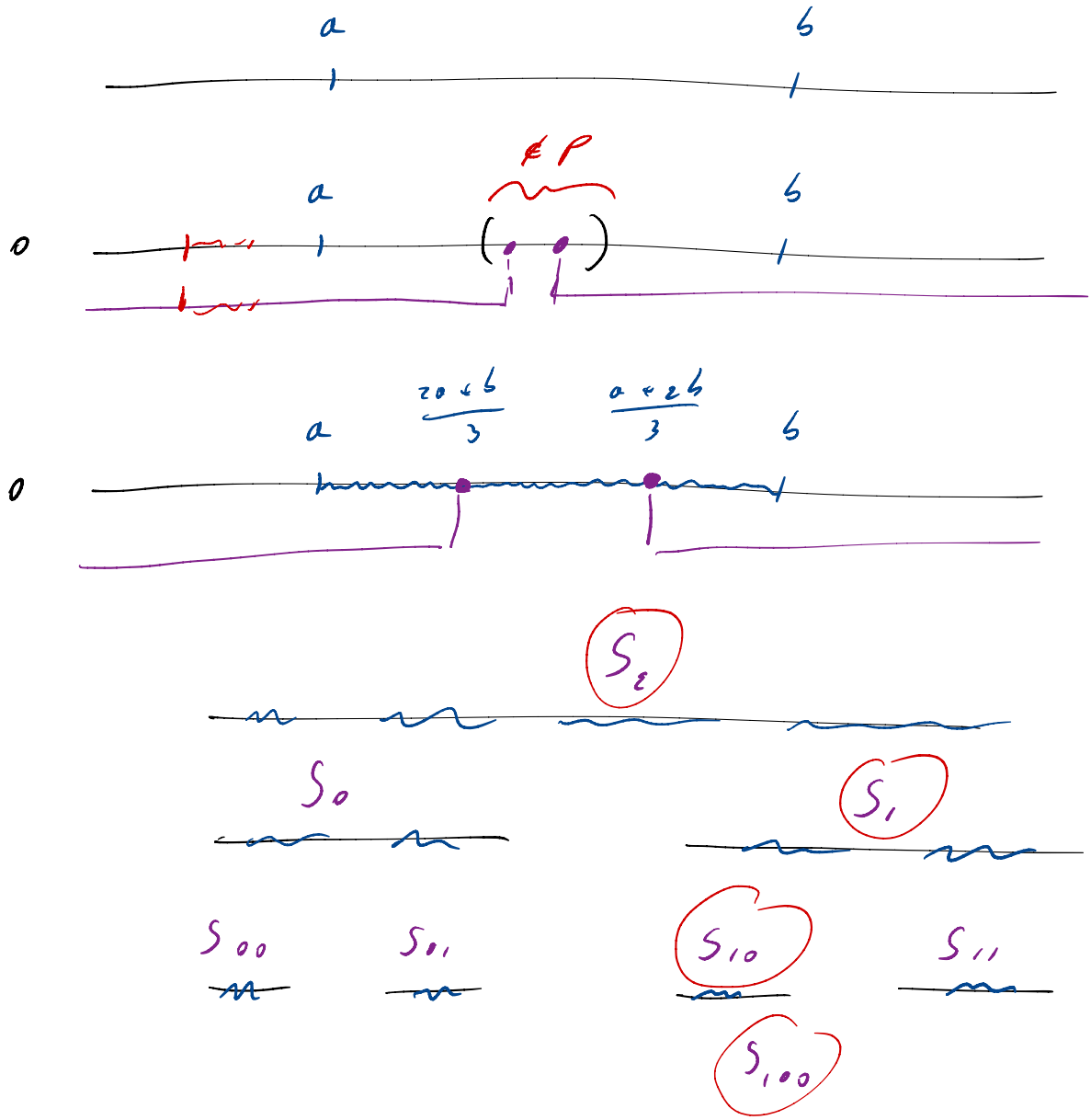
$A \subseteq \mathbb{R}$ è perfetto se coincide con l'insieme dei propri punti di accumulazione = chiuso senza punti isolati.



Oss Se P è perfetto e $P \neq \emptyset$ allora $|P| = 2^{\aleph_0}$.

Dim Idea costruisco $f : {}^{\omega}\{0,1\} \to P$ iniettiva.

Supponiamo che $a, b \in P$ con $a < b$.



Dato $\alpha \in {}^{\omega}\{0,1\}$ definiamo

$$S_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \bigcap \{ S_\tau \mid \tau = \alpha_{\restriction n} \text{ per } n \in \omega \}$$

Siccome questi sono chiusi annidati $S_\alpha \neq \emptyset$.

Per ogni $\alpha \in {}^{\omega}\{0,1\}$ sia $x_\alpha \in S_\alpha$

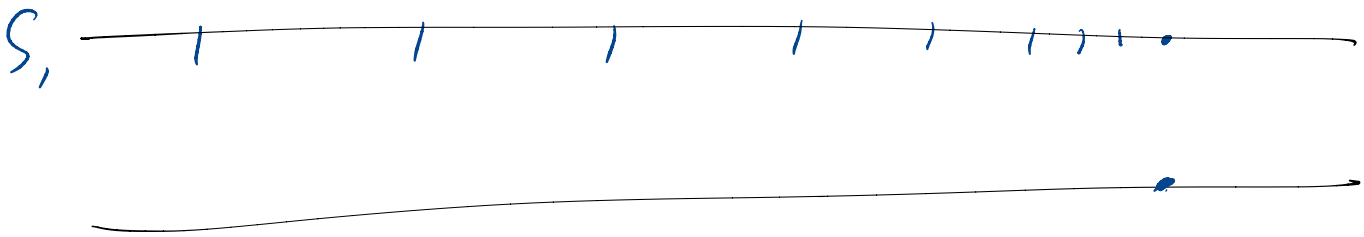
La funzione $\alpha \mapsto x_\alpha$ è iniettiva quindi

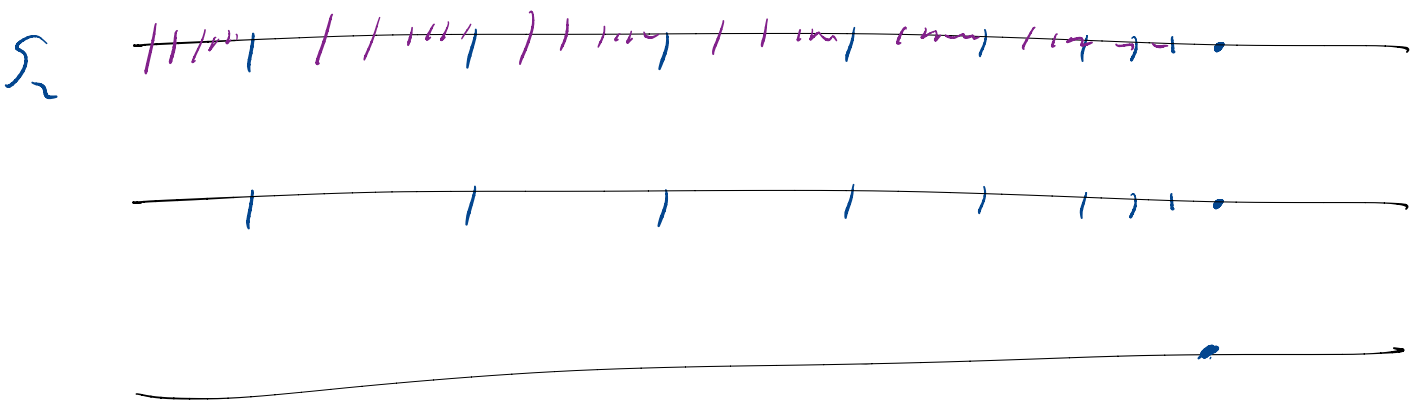
$$2^{\aleph_0} = |{}^{\omega}\{0,1\}| \leq |P| \leq 2^{\aleph_0}$$

Teo Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ allora esistono P perfetto e A con $|A| \leq \aleph_0$ tali che $P \cap A = \emptyset$ e $P \cup A = C$.

Dim

$A' \overset{def.}{=} A \setminus \{\text{p.ti isolati di } A\}$







Definiamo

$$C_0 = C \qquad C_{S(\alpha)} = C_\alpha' \qquad C_\lambda = \bigcap \{C_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$$

$$P = \bigcap_{\alpha \in Ord} C_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \alpha \in Ord \quad x \in C_\alpha\}$$

$A = C \setminus P \quad \rightsquigarrow \quad |A| \leq \aleph_0$

Dimostriamo che P è perfetto.

Intersezione di chiusi $\Rightarrow$ chiuso.

Dobbiamo dire che ogni $x \in P$ è di accumulazione.

Per assurdo sia $x \in P$ isolato. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $P \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[= \{x\}$. Consideriamo

$$A = (C \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[) \setminus \{x\}.$$

Per ogni $y \in A$ sia α_y minimo t.c. $y \notin C_{\alpha_y}$

Consideriamo $\beta = \sup \{\alpha_y \mid y \in A\}$.

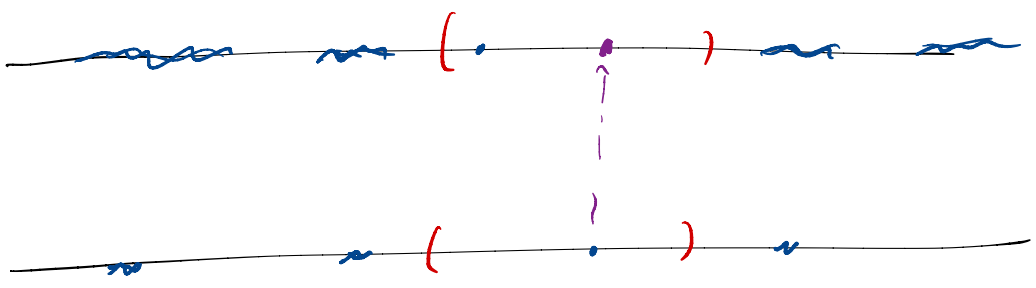
$C_\beta \subseteq C_{\alpha_y} \Rightarrow]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap C_\beta \subseteq \{x\}$

$\Downarrow$

$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap C_{s(\beta)} = \emptyset$.

$\in C \setminus P$.

Dimostriamo che $|A| \leq \aleph_0$



Osserviamo che

$$A = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}_+} \overbrace{C_\alpha \setminus C_{s(\alpha)}}^{D_\alpha}$$

È dato $x \in D_\alpha$ esistono $q_x, r_x \in \mathbb{Q}$ con $]q_x, r_x[\cap C_\alpha = \{x\}$

Dimostriamo che

$$A \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

$$x \mapsto (q_x, r_x)$$

è iniettiva.

Supponiamo $x \in D_\alpha$ $y \in D_\beta$ $\alpha \leq \beta$ $q_x = q_y$ $r_x = r_y$.

$\alpha \leq \beta \Rightarrow C_\beta \subseteq C_\alpha$

$$y \in \underbrace{]q_y, r_y[}_{=} \cap C_\beta \subseteq \underbrace{]q_x, r_x[}_{=} \cap C_\alpha = \{x\}$$

$\Rightarrow y = x$ ∎