Teo $V = V_*$

$$\forall x \; \exists \alpha \in Ord \quad x \in V_\alpha$$

Dim Basta dimostrare che

se $\forall y \in x \quad y \in V_*$ allora $x \in V_*$

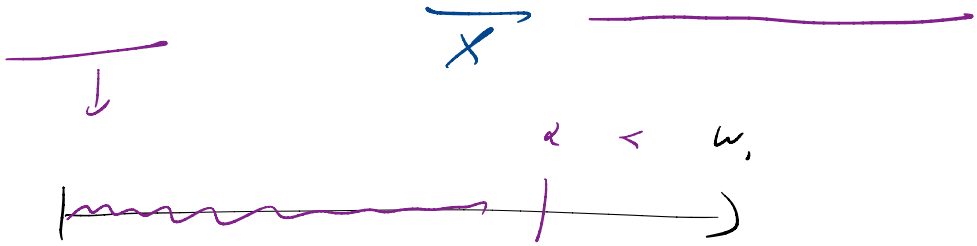
$\Downarrow$

$\forall y \in x \; \exists \alpha_y$ minimo $y \in V_{\alpha_y}$

$\beta = \sup \{ \alpha_y \mid y \in x \}$ $\qquad \mathcal{P}(V_\beta)$

$\forall y \in x \quad y \in V_\beta \Rightarrow x \subseteq V_\beta \Rightarrow x \in V_{S(\beta)}$

$\square$



$$X = \bigcup \{ \mathcal{P}(\alpha) \mid \alpha \in \omega_1 \}$$

$$|X| \leq \sum_{\alpha \in \omega_1} |\mathcal{P}(\alpha)| \leq \sum_{\alpha \in \omega_1} 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_1$$

$|\alpha| \leq \aleph_\alpha$

$$= 2^{\aleph_0}$$

Esercizio A

Trova tutti gli ordinali α che risolvono l'equazione $\alpha^2 = (\omega+7)\alpha$.

$\alpha = \omega^\beta \cdot a + \dots$ $\quad \beta \in On \quad a \in \omega \setminus \{0\}$ FORMA NORM.

$\alpha^2 \geq (\omega^\beta \cdot a)^2 = \omega^{\beta+\beta} \cdot a$ $\quad$ se vale anche $\beta \geq 1$

$(\omega+7)\cdot\alpha \leq \omega \cdot 2 \cdot \omega^\beta \cdot (a+1) = \omega^{1+\beta}\cdot(a+1)$

$\omega^{1+\beta}\cdot(a+1) \geq \omega^{\beta+\beta}\cdot a$

so $\beta \geq \omega$ $\quad \omega^\beta \cdot (a+1)$ $\quad \omega^\beta(\omega^\beta \cdot a)$ $\quad$ no

quindi $\beta \in \omega$

$\omega^{\beta+1}\cdot(a+1) \geq \omega^{\beta\cdot 2}\cdot a$

$\Rightarrow \beta \leq 1$

$\beta = 0 \Rightarrow \alpha \in \omega \Rightarrow \alpha^2 = (\omega+7)\alpha \to \alpha = 0$

α fin. $\quad (\omega+7)\alpha$ infinito

$\beta = 1 \Rightarrow \alpha = \omega \cdot a + b$ con $a \neq 0$

$\alpha^2 = \underbrace{(\omega\cdot a + b)\cdot\omega\cdot a}_{\omega^2\cdot a} + \underbrace{(\omega\cdot a + b)\cdot b}$

$b = 0 \to 0$

$b > 0 \to \omega \cdot ab + b$

$$(\omega+7)(\omega\cdot a+b) = \omega^2\cdot a + \begin{cases} b=0 \to 0 \\ b>0 \to \omega\cdot b+7 \end{cases}$$

caso $b=0$ $\quad \alpha = \omega\cdot a$ con $a\neq 0$

caso $b>0$ $\quad \omega^2\cdot a + \omega\cdot \underbrace{a}_{1} b + \underbrace{b}_{7} = \omega^2\cdot a + \omega\cdot \underbrace{b}_{7} + \underline{7}$

$$\alpha = \omega + 7$$

In conclusione $\alpha = \omega+7$ o $\alpha = \omega\cdot a$ con $a\in\omega$.

Esercizio B

Trova il più piccolo ordinale $\alpha > 0$ isomorfo, come ordine, all'insieme degli ordinali limite minori di α.

$\alpha < \omega^\omega$

forma normale

$\alpha = \omega^{n_1} a_1 + \dots + \omega^{n_k}\cdot a_k \qquad n_i, a_i \in \omega$

α è limite $\iff n_k > 0$

$$\omega^\omega \longrightarrow \omega^\omega$$
$$\alpha \longmapsto \omega\cdot\alpha$$

$\Rightarrow$ se α è successore, $n_k = 0$

$\alpha = s(\beta)$

$$\beta = \omega^{m_1} b_1 + \dots + \omega^{m_k} \cdot b_k$$

$$\alpha = \beta + 1 \longrightarrow m_k = 0 \longrightarrow \omega^{m_1} b_1 + \dots + \omega^{m_k} \cdot (b_k + 1)$$

$$\searrow m_k > 0 \longrightarrow \omega^{m_1} b_1 + \dots + \omega^{m_k} \cdot b_k + \omega^0 \cdot 1$$

$\Leftarrow$ se $n_k = 0$ allora α è successore

$$\alpha = \omega^{n_1} a_1 + \dots + \omega^{n_k = 0} \cdot a_k$$

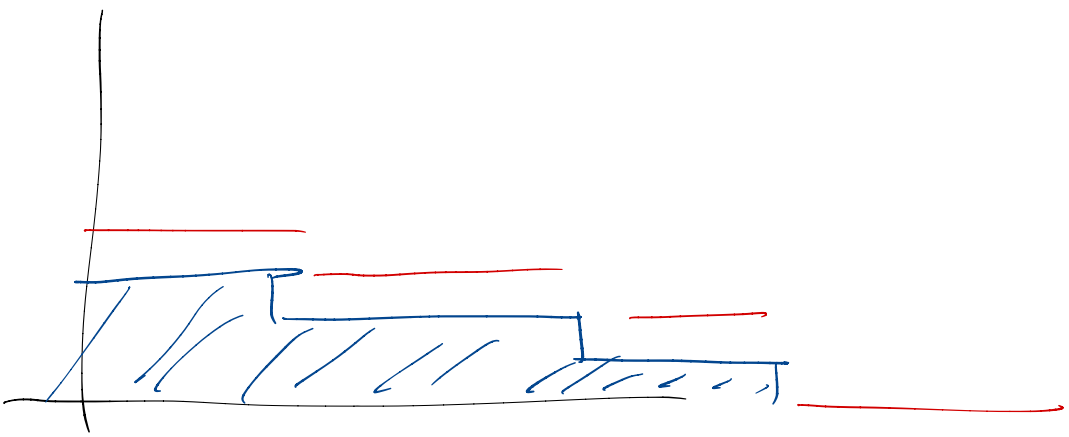
$$\alpha = \underbrace{\omega^{n_1} a_1 + \dots + \omega^{n_k} \cdot (a_k - 1)}_{\beta} + 1$$

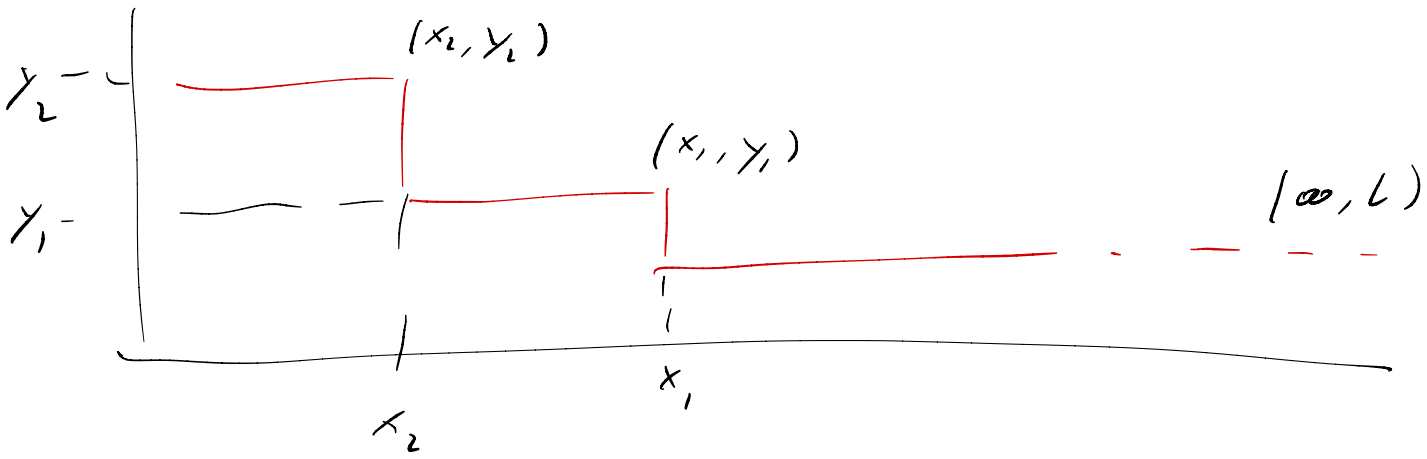
α è limite sse $\alpha = \omega \cdot$ qualcosa

$\cancel{\text{qualcosa} \cdot \omega}$

$$\omega^\omega = \omega \cdot \omega^\omega$$

$\omega^\omega = x \cdot \omega$ non ha soc.





$A = \{$ ordi. limite $< \alpha \} \sim \alpha$

$\parallel$

$\omega \cdot \alpha$

Esercizio A

Sia F la funzione classe che manda un cardinale α nel minimo β tale che $\alpha < \alpha^{\beta}$.

1. Assumendo l'ipotesi generalizzata del continuo ($2^k = k^+$) calcola $F(\aleph_7)$.
2. Dimostra che l'immagine di F è una classe propria.
3. Dimostra che se $\beta = F(\alpha)$ allora β è regolare
4. Dimostra che β è nell'immagine di F se e solo se β è regolare.

$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$

1. $\aleph_2^{\aleph_2} = 2^{\aleph_2} > \aleph_2$

$\aleph_2^{\aleph_6} = \left(2^{\aleph_1}\right)^{\aleph_6} = 2^{\aleph_1 \cdot \aleph_6} = 2^{\aleph_6} = \aleph_7$

$F(\aleph_2) = \aleph_2$