$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$

Esercizio A

Sia F la funzione classe che manda un cardinale α nel minimo β tale che $\alpha < \alpha^\beta$.

1. Assumendo l'ipotesi generalizzata del continuo ($2^k = k^+$) calcola $F(\aleph_7)$.
2. Dimostra che l'immagine di F è una classe propria.
3. Dimostra che se $\beta = F(\alpha)$ allora β è regolare
4. Dimostra che β è nell'immagine di F se e solo se β è regolare.

1. $\aleph_2^{\aleph_2} = 2^{\aleph_2} > \aleph_2$

$\aleph_2^{\aleph_6} = \left(2^{\aleph_1}\right)^{\aleph_6} = 2^{\aleph_1 \cdot \aleph_6} = 2^{\aleph_6} = \aleph_2$

$F(\aleph_2) = \aleph_2$

2. Vogliamo dimostrare che la classe $\{F(\alpha) \mid \alpha \text{ card.}\}$ è illimitata.

Dato γ esibiamo α_γ t.c. $F(\alpha_\gamma) > \gamma$

$\forall \beta \leq \gamma$ card. infinito $\alpha_\gamma^\beta = \alpha_\gamma$

$\alpha_\gamma := 2^\gamma$ $\quad \alpha_\gamma^\beta = \left(2^\gamma\right)^\beta = 2^{\gamma \cdot \beta} = 2^\gamma = \alpha_\gamma$.

$\in \beta = \cos(\beta)$

3. $\beta = F(\alpha) \longrightarrow \beta$ è regolare

Per assurdo supponga $\gamma = \cos(\beta) < \beta$

$$\beta = \sum_{\delta \in \gamma} \beta_\delta \quad \text{con} \quad \forall \delta \in \gamma \ \ \beta_\delta < \beta$$

$$\alpha \leq \alpha^\beta = \alpha^{\sum_{\delta<\gamma} \beta_\delta} = \prod_{\delta \in \gamma} \alpha^{\beta_\delta} = \prod_{\delta \in \gamma} \alpha = \alpha^\gamma = \alpha$$

Esercizio C

Calcola la cardinalità degli insiemi seguenti:

1. $\{f\colon \omega_2 \to \omega_2 \mid \forall \alpha \in \omega_2\ f(\alpha) \leqslant \alpha\}$,
2. $\{f\colon \omega \to \omega_\omega \mid \forall n \in \omega\ f(n) < \omega_n\}$.
3. Dimostra che, se la cardinalità dell'insieme al punto 2 è $\aleph_{\omega_1}$, allora $2^{\aleph_1} > \aleph_2$.
4. Trova tutte le cardinalità

$$\left|\{f\colon \omega \to \omega \mid f \text{ è iniettiva e } f \subseteq S\}\right|$$

che si possono ottenere al variare di $S \in \mathcal{P}(\omega \times \omega)$.

$2^{\aleph_2}$

$\aleph_1^{\aleph_2}$

(1.)

$$\aleph_1^{\aleph_2} = \prod_{\substack{\alpha \in \omega_2 \\ \alpha \geq \omega_1}} \aleph_1 \leq \prod_{\alpha \in \omega_2} |\alpha+1| \leq \prod_{\alpha \in \omega_2} \aleph_1 = \aleph_1^{\aleph_2}$$

$\alpha \in \omega_2 \setminus \omega_1$

$|\omega_2 \setminus \omega_1| = \aleph_2$

$$2^{\aleph_2} \leqslant \aleph_1^{\aleph_2} \leqslant \aleph_2^{\aleph_2} \leqslant \left(2^{\aleph_2}\right)^{\aleph_2} = 2^{\aleph_2 \cdot \aleph_2} = 2^{\aleph_2}$$

$\aleph_\omega^{\aleph_0} = \mathfrak{I}(\aleph_\omega)$

(2.)

$\aleph_\omega^{\aleph_0}$

$$\prod_{n \in \omega} \aleph_n \leq \prod_{n \in \omega} \aleph_\omega = \aleph_\omega^{\aleph_0}$$

$\prod_{i \in \omega} \aleph_\omega$

$=$

$\prod_{i \in \omega} \prod_{j \in \omega} \aleph_{f(i,j)} = \prod_{(i,j) \in \omega \times \omega} \aleph_{f(i,j)}$

$i, j \leq f(i,j)$

$2^i(2j+1)$

$\geq$

$\prod_{j \in \omega} \aleph_j \geq \sup_{j \in \omega} \aleph_j = \aleph_\omega$

$n \geq 2 \to \aleph_n^{\aleph_1} = \aleph_n$

3. $\aleph_w^{\aleph_0} = \aleph_{w_1} \longrightarrow 2^{\aleph_1} > \aleph_2$ ↑

Supponiamo per assurdo $\aleph_w^{\aleph_0} = \aleph_{w_1}$ $\quad 2^{\aleph_1} = \aleph_2$

$$\operatorname{cof}(\aleph_n^{\aleph_0}) = \operatorname{cof}(\aleph_{w_1}) = \operatorname{cof}(w_1) = \aleph_1$$

$$\aleph_w^{\aleph_1} = \left(\aleph_w^{\aleph_0}\right)^{\aleph_1} > \aleph_w^{\aleph_0}$$

$$\aleph_w^{\aleph_1} = \left(\prod_{n \in w} \aleph_{n+2}\right)^{\aleph_1} = \prod_{n \in w} \aleph_{n+2}^{\aleph_1} = \prod_{n \in w} \aleph_{n+2} = \aleph_w^{\aleph_0}$$

$\aleph_w^{\aleph_0}$

$=$

$2^{\aleph_1} = \aleph_2 \Rightarrow \dots$

$n \geq 2 \to \aleph_n^{\aleph_1} = \aleph_n$ • $\aleph_2^{\aleph_1} = \left(2^{\aleph_1}\right)^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1 \cdot \aleph_1} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$

• $\aleph_{n+1}^{\aleph_1} = \aleph_n^{\aleph_1} \cdot \aleph_{n+1} = \aleph_1 \cdot \aleph_{n+1} = \aleph_{n+1}$

Esercizio C

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$ scriviamo $A_{<x} = \{y \in A \mid y < x\}$ e $A_{>x} = \{y \in A \mid y > x\}$.

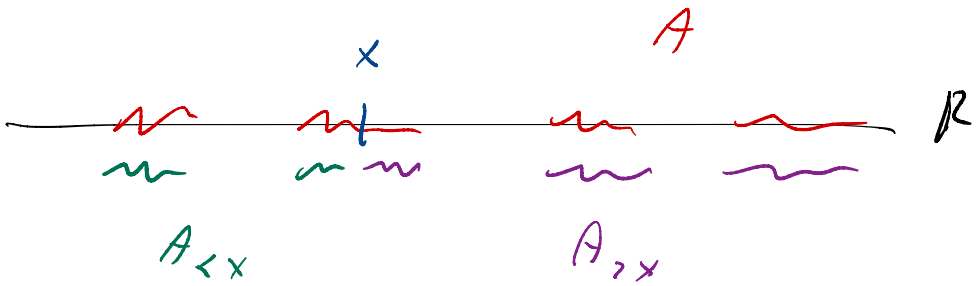
1. Dimostra che $\operatorname{cof}|\mathbb{R}| > \aleph_0$.
2. Dimostra che se $\kappa < |\mathbb{R}|$ e $\operatorname{cof}\kappa = \aleph_0$, allora esiste $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $|A| = \kappa$ e $\forall x \in \mathbb{R}\ |A_{<x}| \neq |A_{>x}|$.
3. Dimostra che se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\operatorname{cof}|A| > \aleph_0$ allora esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $|A_{<x}| = |A_{>x}|$.
4. Dimostra che se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\operatorname{cof}|A| > \aleph_0$ allora esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $|A_{<r}| = |A_{>r}|$.

1. $\operatorname{cof}|\mathbb{R}| > \aleph_0$ $\qquad 2^{\aleph_0}$

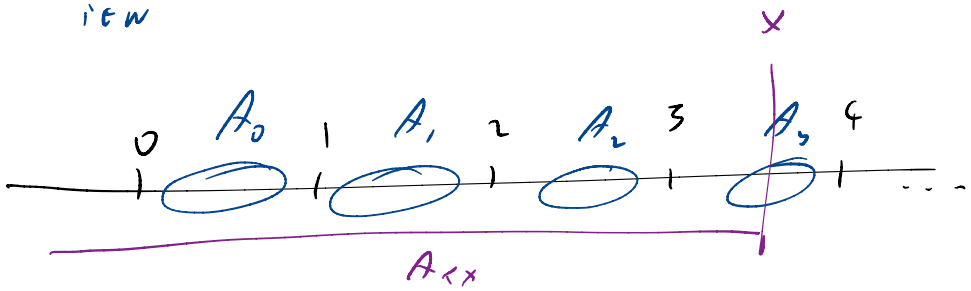
Per assurdo, $\operatorname{cof}|\mathbb{R}| = \aleph_0$

$$|\mathbb{R}|^{\operatorname{cof}|\mathbb{R}|} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$$

2.



$$\kappa = \sum_{i \in \omega} \kappa_i$$



Consideriamo $A_i \subseteq]i, i+1[$ con $|A_i| = \kappa_i$

$$A = \bigcup \{A_i \mid i \in \omega\}$$

$$|A| = \sum_{i \in \omega} |A_i| = \sum_{i \in \omega} \aleph_i = \aleph$$

$$A_{<\alpha} \subseteq \bigcup \{ A_i \mid i < \alpha \}$$

$$|A_{<\alpha}| \leq \sum_{i<\alpha} \aleph_i = \max \{ \aleph_i \mid i < \alpha \} < \aleph$$

$\Rightarrow$ $|A_{>\alpha}| = \aleph$

3. Suppongo $\forall \alpha \quad |A_{<\alpha}| \neq |A_{>\alpha}|$

$\exists \alpha_0 \quad \forall \alpha < \alpha_0 \quad |A_{<\alpha}| < |A|$

$\exists \alpha_0 \quad |A_{<\alpha_0}| < |A|$

Supponiamo per assurdo $\forall \alpha_0 \quad |A_{<\alpha_0}| = |A|$

$|A_{>\alpha_0}| < |A|$

$$A = \bigcup_{\alpha_0 \in \mathbb{Z}} A_{>\alpha_0} \qquad |A| = \sum_{\alpha_0 \in \mathbb{Z}} |A_{>\alpha_0}|$$