Esercizio C

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$ scriviamo $A_{<x} = \{y \in A \mid y < x\}$ e $A_{>x} = \{y \in A \mid y > x\}$.

1. Dimostra che $\operatorname{cof}|\mathbb{R}| > \aleph_0$.
2. Dimostra che se $\kappa < |\mathbb{R}|$ e $\operatorname{cof}\kappa = \aleph_0$, allora esiste $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $|A| = \kappa$ e $\forall x \in \mathbb{R}\ |A_{<x}| \neq |A_{>x}|$.
3. Dimostra che se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\operatorname{cof}|A| > \aleph_0$ allora esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $|A_{<x}| = |A_{>x}|$.
4. Dimostra che se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\operatorname{cof}|A| > \aleph_0$ allora esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $|A_{<r}| = |A_{>r}|$.

$B = \{x \mid |A_{<x}| = |A|\}$

$B \neq \emptyset$ $\quad A = \bigcup_{x \in \mathbb{N}} A_{<x} \quad \Rightarrow \quad |A| = \sum_{x \in \mathbb{N}} |A_{<x}|$ con ass. $< |A|$

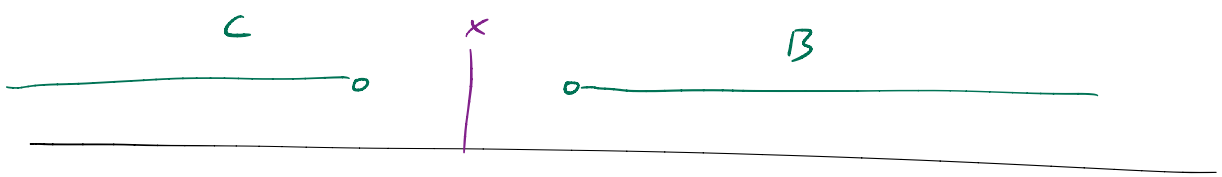
B è una semiretta destra

$x_1 < x_2 \qquad x_1 \in B$

$\hookrightarrow \quad |A| = |A_{<x_1}| \leq |A_{<x_2}| \leq |A|$

$\subseteq$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid |A_{>x}| = |A|\}$

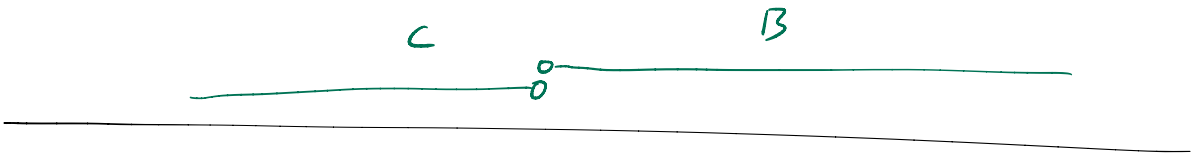


$A = A_{<x} \cup A_{>x} \cup (A \cap \{x\})$

$|A| \leq |A_{<x}| + |A_{>x}| + 1$

$\Rightarrow \quad B \cup C = \mathbb{R}$

$B \cap C \neq \emptyset$



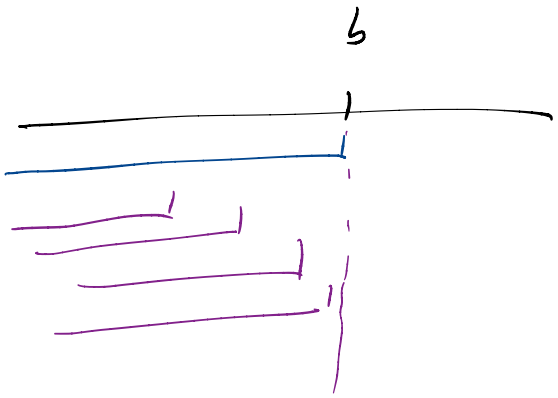
$a = \sup C \notin C \qquad b = \inf B \notin B$

$a < b \qquad a = b \qquad b < a$

$\frac{a+b}{2} \notin B \cup C \qquad a = b \notin B \cup C$

$B = \{ x \mid |A_{<x}| = |A| \} \qquad b = \inf B$

$\{b_i\}_{i \in \omega} \qquad b_i \uparrow b$



$A_{<b} = \bigcup_{i \in \omega} A_{<b_i}$

$|A_{<b}| \leq \sum_{i \in \omega} |A_{<b_i}|$ ($|A_{<b_i}| < |A|$; $\sum_{i \in \omega} |A_{<b_i}| < |A|$)

$\Rightarrow b \in B$

Esercizio B

Se α e β sono ordinali, diciamo che $\alpha \mid \beta$ se esiste un ordinale γ tale che $\alpha\gamma = \beta$.

B.1 – Calcola $(2 \cdot \omega^2 + \omega \cdot 3 + 7)^3$ in forma normale di Cantor.
B.2 – Quali ordinali α soddisfano $\alpha \mid \omega^2 + \omega \cdot 12$?
B.3 – Dimostra che, dati α e β ordinali, esiste un ordinale γ tale che $\delta \mid \alpha$ e $\delta \mid \beta$ se e solo se $\delta \mid \gamma$.
B.4 – Per quali ordinali α l'insieme $\{\beta : \beta \mid \alpha\} \cup \{0\}$ è un ordinale?

$\alpha \mid \beta \equiv \exists \gamma \in Ord \quad \alpha \cdot \gamma = \beta$

(2) $\alpha \overset{?}{\downarrow} \mid \omega^2 + \omega \cdot 12$

$\alpha \cdot \gamma = \omega^2 + \omega \cdot 12 \Rightarrow \alpha \leq \omega^2 + \omega \cdot 12$

(1) $\alpha = \omega^2 + \omega a + b$ $\qquad \alpha = \omega a + b$

(2) $b > 0$ $\qquad$ (3) $a = 0$

(1) $\gamma \geq 2 \Rightarrow \alpha \cdot \gamma \geq \omega^2 \cdot \gamma \geq \omega^2 \cdot 2 > \omega^2 + \omega \cdot 12$ ↯

$\gamma = 1 \Rightarrow \alpha = \omega^2 + \omega \cdot 12$

(2) $(\omega \cdot a + b) \cdot \gamma = \omega^2 + \omega \cdot 12$ ($a \overset{>0}{\downarrow}$)

$\gamma \geq \omega$ altrimenti, se $\gamma = n \in \omega$

$(\omega \cdot a + b) \cdot n = \omega \cdot a \cdot n + b < \omega^2 + \ldots$

$\gamma < \omega^2$ altrimenti.

$(\omega \cdot a + b) \cdot \gamma \geq (\omega \cdot a + b) \cdot \omega^2 \geq \omega^3 > \omega^2 + \ldots$

$$(w \cdot \overset{>0}{a} + b)(w \cdot \overset{>0}{x} + y) = w^2 + w \cdot 12$$

$y \neq 0 \qquad w^2 x + way + b = w^2 + w \cdot 12$

$y = 0 \qquad w^2 x = w^2 + w \cdot 12$

$\to \quad x = 1 \qquad ay = 12 \qquad b = 0$

$\alpha = w \cdot 1, \quad w \cdot 2, \quad w \cdot 3, \quad w \cdot 4, \quad w \cdot 6, \quad w \cdot 12$

(3) $\alpha = n \in W$

$n \cdot \gamma = w^2 + w \cdot 12$

$w^2 \cdot 2 \geq \gamma \geq w^2 \qquad \gamma = w^2 + wa + b$

$n\gamma = w^2 + wa + n \cdot b$

$n \cdot (w^2 + w \cdot 12) = \underbrace{nw^2}_{w^2} + \underbrace{nw}_{w} \cdot 12 = w^2 + w \cdot 12$

$\alpha \in W \setminus \{0\}$

$n_0 > n_1 > n_2$

n_2

$n_0 = n_1 \cdot q + r$ con $0 \le r < n_1$

$m \mid n_0 \quad m \mid n_1 \iff m \mid n_1 \quad m \mid n_2$

$a_0 > a_1$

a_{i+2}

se $a_{i+1} \neq 0$ $\quad a_i = a_{i+1} \cdot$ quoziente $+$ resto

se $a_{i+1} = 0$ $\quad a_{i+2} = 0$

se $a_{i+1} \neq 0$ $\quad \delta \mid a_i \wedge \delta \mid a_{i+1} \iff \delta \mid a_{i+1} \wedge \delta \mid a_{i+2}$

Supponiamo $\delta \mid a_{i+1}$ e dimostriamo $\delta \mid a_i \iff \delta \mid a_{i+2}$

$a_{i+1} = \delta \cdot \ell_1$

$\leftarrow \quad a_{i+2} = \delta \cdot \ell_2$

$a_i = a_{i+1} \cdot$ quoziente $+ a_{i+2}$

$= \delta \cdot \ell_1 \cdot$ quoziente $+ \delta \cdot \ell_2 = \delta (\ell_1 \cdot$ quoz $+ \ell_2)$

$\rightarrow \quad a_i = \delta \cdot \ell_3$

$\delta \cdot$ qualcosa

$\delta \cdot \ell_3 = \delta \cdot \ell_1 \cdot$ quoziente $+ a_{i+2}$

Per ipotesi $a_{i+2} = \delta \cdot \xi_q + \rho \quad \rho < \delta \quad \rho \neq 0$

$\delta \cdot \xi_3 = \delta \left(\xi_1 \cdot \text{quoziente} + \xi_q \right) + \rho$

$\exists i \in \mathbb{N} \quad a_i = 0$

altrimenti avrei una succ. decrescente di naturali.

$a_{i-1} \qquad a_i = 0$

$\delta \mid a_{i-1} \wedge \underbrace{\delta \mid a_i}_{V} \iff \delta \mid a_0 \wedge \delta \mid a_1$

Esercizio C

Determina condizioni necessarie e sufficienti sugli ordinali α e β affiché:

C.1 – $\alpha + \beta$ sia un ordinale limite,

C.2 – $\alpha \cdot \beta$ sia un ordinale limite,

C.3 – α^β sia un ordinale limite.

① $\beta > 0$ limite o $\beta = 0$ e α limite

$\beta = S(\gamma) \iff \alpha + \beta = \alpha + S(\gamma) = S(\alpha + \gamma)$

$\beta > 0 \wedge \alpha + \beta = \gamma + 1 \iff$

$\alpha \leq \gamma \qquad \gamma = \alpha + \delta$

$\alpha + \beta = \alpha + \delta + 1 \iff \beta = \delta + 1$

per assurdo $\gamma < \alpha \qquad \gamma + 1 \leq \alpha < \alpha + \beta$ ↯

② $\alpha, \beta \neq 0$ e almeno uno dei due è limite

Assumiamo $\alpha, \beta \neq 0$

$\alpha = S(\gamma) \quad \beta = S(\delta) \implies \alpha \cdot \beta$ è succ.

$\alpha = \gamma + 1 \qquad \beta = \delta + 1 \qquad \alpha\beta = \underbrace{(\gamma+1)\cdot\delta + \gamma + 1}_{\downarrow} + 1$

$\alpha = \gamma \cdot \omega \quad \leftarrow \quad$ Es. α è limite

$\Downarrow$

$\exists \gamma \in Ord \quad \gamma > 0 \wedge \alpha = \gamma \cdot \omega$

$$\alpha \cdot \beta = \gamma \cdot \overbrace{\omega \cdot \beta}^{\delta \cdot \omega}$$

$$\beta = \omega^{\varepsilon_1} n_1 + \dots + \omega^{\varepsilon_n} \cdot n_n$$

$$\omega \beta = \omega^{\underline{1+\varepsilon_1}} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\underline{1+\varepsilon_n}} n_n$$

tutti gli esponenti sono > 0

$\beta = \delta \omega$

$$\alpha \beta = \alpha \cdot \delta \omega = (\alpha \delta) \cdot \omega$$