Esercizio B

Sia $F\colon V \to V$ una funzione classe biunivoca.

1. Dimostra che, se $\forall x, y\ x \in y \leftrightarrow F(x) \in F(y)$, allora $\forall x\ F(x) = x$.
   Diciamo che $x \in_F y$ quando $x \in F(y)$. Rimpiazzando la relazione di appartenenza $\in$ con $\in_F$:
2. dimostra che lo schema di assiomi di separazione rimane valido,
3. l'assioma delle parti rimane necessariamente valido?
4. l'assioma di buona fondazione rimane necessariamente valido?

(1) $F: V \to V$ f. classe biunivoca

$\forall x, y \quad x \in y \longleftrightarrow F(x) \in F(y)$

$\to \quad \forall x \quad F(x) = x$

$x \in \emptyset \longleftrightarrow F(x) \in F(\emptyset)$

$x \in \{\emptyset\} \longleftrightarrow F(x) \in F(\{\emptyset\})$

$\emptyset = F(\emptyset) \in F(\{\emptyset\}) \to F(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \dots\}$

$F(y) \quad \emptyset \in \{\emptyset\}$

$x \in F(\{\emptyset\}) \to x = \emptyset$

$y \in \{\emptyset\} \to y = \emptyset \to x = F(y) = F(\emptyset) = \emptyset.$

Principio di $\in$-induzione

$$\forall y \, (\forall x \in y \;\; \varphi(x)) \to \varphi(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall y \;\; \varphi(y) \qquad \varphi(\square) \equiv \; \square = F(\square)$$

$$\forall y \, (\forall x \in y \;\; x = F(x)) \to y = F(y)$$

$F : V \to V$ f. classe biunivoca

$$\forall x, y \quad x \in y \leftrightarrow F(x) \in F(y) \qquad (*)$$

Assumiamo $\forall x \in y \;\; x = F(x)$ $\qquad y = F(y)$ per estrazionalità.

Vogliamo dimostrare $\forall x \;\; x \in y \leftrightarrow x \in F(y)$

$\to$ $\quad x \in y \qquad x = F(x) \in F(y)$

$\leftarrow$ $\quad x \in F(y) \to z \in y \to x \in y$

$x = F(z)$ $\qquad z = F(z)$

---

(2) separazione Per ogni data φ

$$\forall x \; \exists y \; \forall z \quad z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z))$$

$$\forall x \exists y \forall z \quad z \in F(y) \leftrightarrow \left(z \in F(x) \wedge \varphi_F(z) \right)$$

Fisso x

$$t = \{ z \in F(x) \mid \varphi_F(z) \}$$

Considero y t.c. $t = F(y)$

$$z \in F(y) \iff z \in t \iff z \in F(x) \wedge \varphi_F(z)$$

---

(3) Parti

$$\forall x \exists y \forall z \quad z \in y \leftrightarrow z \subseteq x$$

$$\forall x \exists y \forall z \quad z \in y \leftrightarrow \left(\forall t \; t \in z \to t \in x \right)$$

$$\forall x \exists y \forall z \quad z \in F(y) \leftrightarrow \left(\forall t \; t \in F(z) \to t \in F(x) \right)$$

$$F(z) \subseteq F(x)$$

$$\forall x \exists \square \forall z \quad z \in \square \iff F(z) \subseteq F(x)$$

$$\{ z \mid F(z) \subseteq F(x) \}$$

$$= \{ z \mid F(z) \in \mathcal{P}(F(x)) \}$$

$$= F^{-1}[\mathcal{P}(F(x))]$$

$$y = F^{-1}\left(F^{-1}\left[\mathcal{P}\left(F(x)\right)\right]\right)$$

$$\forall z \qquad z \in F(y) \leftrightarrow \left(\forall t \; t \in F(z) \rightarrow t \in F(x)\right)$$

$z \in F(y)$

$\Updownarrow$

$z \in F^{-1}\left[\mathcal{P}(F(x))\right]$

$\Updownarrow$

$\exists t \in \mathcal{P}(F(x)) \qquad z = F^{-1}(t)$

$\Updownarrow$

$\exists t \subseteq F(x) \qquad t = F(z)$

$\Updownarrow$

$F(z) \subseteq F(x)$

(4.) $\qquad a \in b$

$$F(x) = \begin{cases} b & x = a \\ a & x = b \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

$$a \in b = F(a) \qquad a \in_F a$$

$$\forall x \left(\exists y\ y \in x\right) \to \left(\exists y\ y \in x \wedge \forall z\ \ z \in x \to z \notin y\right)$$

$$F(x) = \begin{cases} \emptyset & x = \{\emptyset\} \\ \{\emptyset\} & x = \emptyset \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\forall x \underbrace{\left(\exists y\ y \in_F x\right)}_{V} \to \left(\exists y\ y \in_F x \wedge \underbrace{\forall z\ \ z \in_F x \to z \notin_F y}_{1}\right)$$

(*)

$x = \emptyset \qquad \emptyset \in \{\emptyset\} = F(\emptyset) \qquad \emptyset \in_F \emptyset$

(*) $\quad y \in_F x \leftrightarrow y \in F(x) = \{\emptyset\} \leftrightarrow y = \emptyset$

Es Dimostrare che senza rimpiazzamento non si può dimostrare l'esistenza di $\underbrace{\omega + \omega}_{\alpha}$

$$x \in \alpha \longleftrightarrow x \in \omega \vee \exists y \in \omega\ \ x = \omega + y$$

Idea: relativizzando a $V_{\omega+\omega}$ valgono tutti gli assiomi, eccetto il rimpiazzamento.

Esercizio C

Sia α un cardinale, definiamo la *radice buffa* di α, denotata $\sqrt[\aleph_0]{\alpha}$, come il minimo cardinale β tale che $\alpha^{\aleph_0} = \beta^{\aleph_0}$.

C.1 – Dimostra che, se γ è un cardinale infinito, allora $(\sqrt[\aleph_0]{\alpha})^\gamma = \alpha^\gamma$ per ogni α.
C.2 – Calcola $\sqrt[\aleph_0]{\aleph_1}$.
C.3 – Calcola $\sqrt[\aleph_0]{\aleph_2}$ assumendo che l'ipotesi del continuo sia vera, e assumendo che l'ipotesi del continuo sia falsa.
C.4 – Dimostra che, per infiniti k infiniti, l'equazione $\sqrt[\aleph_0]{\alpha} = k$ non ha soluzioni α.

1

$$\alpha^\gamma = (\alpha^{\aleph_0})^\gamma = \left(\left(\sqrt[\aleph_0]{\alpha}\right)^{\aleph_0}\right)^\gamma = \left(\sqrt[\aleph_0]{\alpha}\right)^\gamma$$

2

$$\underbrace{\aleph_1^{\aleph_0}} = \underline{x^{\aleph_0}} \quad 2$$

$$\aleph_0^{\aleph_0} \cdot \aleph_1 = \underbrace{2^{\aleph_0}}_{\substack{> \aleph_0 \\ \geq \aleph_1}} \cdot \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$$

3

$$\aleph_2^{\aleph_0} = x^{\aleph_0} \qquad * \quad 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

$\underline{CH^*}$ vera

$$\aleph_2^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0} \cdot \aleph_2$$

$$= \aleph_1 \cdot \aleph_2 = \aleph_2$$

$$x = \aleph_2$$

$\underline{CH^*}$ falsa

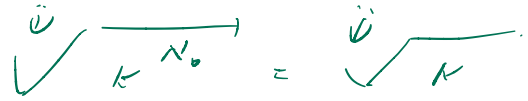
$$2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$$

$$\aleph_2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_2 = 2^{\aleph_0}$$

$$x = 2$$

(4) $\kappa^{\aleph_0} > \kappa$

$$\left(\kappa^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = \kappa^{\aleph_0}$$



$$\sqrt[\text{ii}]{\kappa^{\aleph_0}} = \sqrt[\text{ii}]{\kappa}$$

$$\underline{\kappa^{\aleph_0}}$$

Dopo dire che ci sono infiniti κ t.c. $\mathrm{cof}(\kappa) = \aleph_0$

$$\kappa = \aleph_{\lambda + \omega}$$