Elementi di teoria degli insiemi

Pisa, a.a. 2021-22

docente: Marcello Mamino (marcello.mamino@unipi.it)

orario: Lunedì 11:00 – 12:45 aula Fib E1

Martedì 16:00 – 17:45 aula Fib G

Giovedì 16:00 – 17:45 aula Fib G

ricevimento studenti: appena dopo la lezione del martedì

testo consigliato: Hrbacek-Jech, Introduction to set theory

sito del corso: https://ciovil.li/eti21

esame: scritto + orale

argomento: teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel

Prologo nel XIX Secolo

La nascita della teoria degli insiemi è una storia complicata di cui so pochissimo. Però, persone che ne sanno molto più di me hanno sostenuto l'opinione che il problema seguente abbia avuto un ruolo. Come che sia, è almeno una introduzione possibile.

Problema Data una serie trigonometrica

$$S(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(ix) + b_i \cos(ix)$$

se, per ogni $x \in \mathbb{R}$, sappiamo che $S(x)$ converge a 0, possiamo dire che i coefficienti c_0, a_i, b_i sono tutti 0?

Risolto positivamente da Georg Cantor nel 1870.

Def. Diciamo che $X \subseteq \mathbb{R}$ è un *insieme di unicità* se, per ogni serie trigonometrica

$$S(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(ix) + b_i \cos(ix)$$

vale la seguente implicazione

$$\left.\begin{array}{l} S(x) \text{ converge a } 0 \text{ per} \\ \text{tutti gli } x \notin X \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{tutti i coefficienti } c_0, \\ a_i, b_i \text{ sono nulli} \end{array}\right.$$

Esempio per il risultato di Cantor, $\emptyset$ è di unicità.

Problema Quali sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono di unicità?

Fatto $X \subseteq \mathbb{R}$ è di unicità se (ma non solo se):

(*) ogni funzione continua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfi le ipotesi seguenti è necessariamente lineare: $f(x) = ax + b$

- per ogni intervallo $]a,b[$ con $]a,b[\cap X = \emptyset$, $f|_{]a,b[}$ è lineare,
- per ogni $x \in \mathbb{R}$, se f ha derivate DX e SX in x, allora queste coincidono. "f non ha punti angolosi"

Esempio $X = \{\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots\} = \{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ con $\dots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \dots$, $\lim_{i \to +\infty} a_i = +\infty$, $\lim_{i \to -\infty} a_i = -\infty$ ha la proprietà (*), quindi è di unicità.

NON esempi: l'intervallo $[0,1]$ e $\mathbb{R}$ non hanno (*).

NON esempio buffo: l'insieme di Cantor non ha (*).

$C_0 = [0, 1]$

$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$



$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$



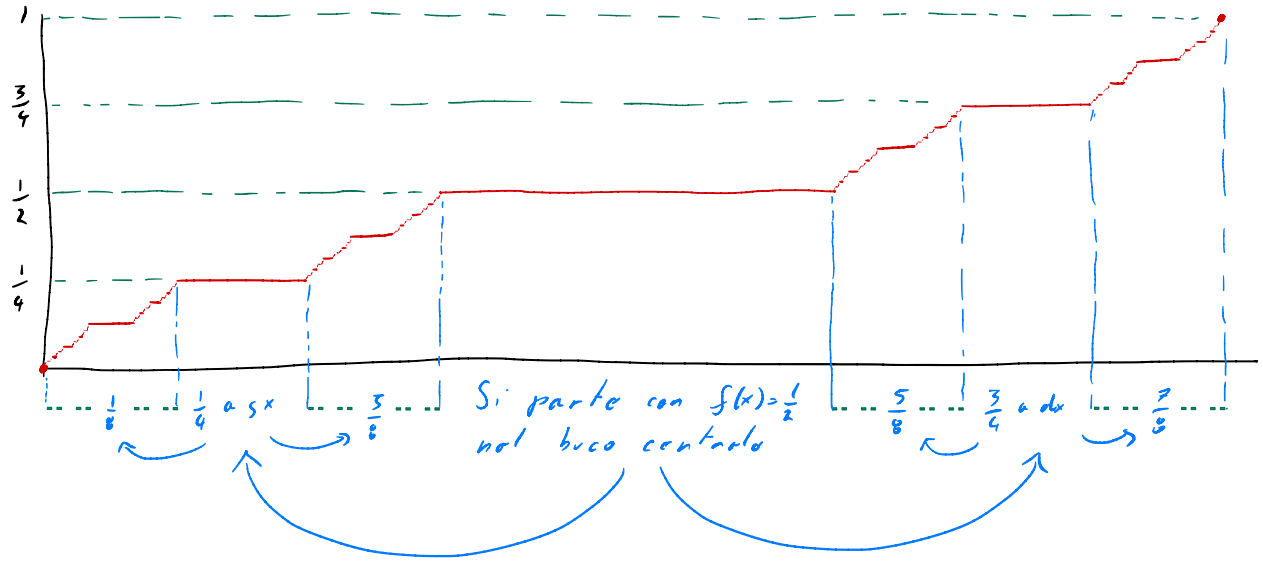
$C_3 = [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1]$



etc.

$C = C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots$ ← detto insieme di Cantor.

Esiste una funzione continua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, detta scala di Cantor — o del diavolo, tale che $f'(x) = 0$ per $x \notin C$ e non è derivabile in $x \in C$.



Nota $\mathbb{Q}$ e C non hanno $(*)$ ma, in realtà, sono di unicità.

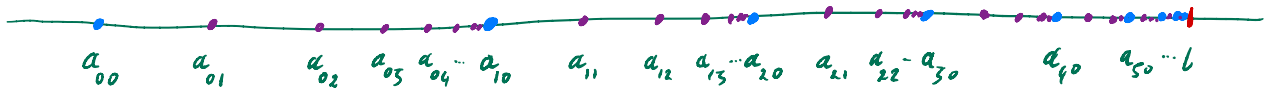
Esempio buffo (Una successione crescente col suo limite)



$X = \{a_0, a_1, a_2, \dots, l\} = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ con $a_i \uparrow l$.

Dim La funzione f è lineare in $]-\infty, a_0[$, $]a_0, a_1[$, $]a_1, a_2[$, ...
Quindi nei punti $a_0, a_1, a_2 \dots$ ammette derivata dx e sx.
Siccome questi punti non possono essere angolosi, $f_{|]-\infty, a_0[}$, $f_{|]a_0, a_1[}$, etc. hanno lo stesso coefficiente angolare, quindi, sfruttando la continuità, $f_{|]-\infty, l[}$ è lineare. Siccome $f_{|]l, +\infty[}$ è lineare, usando nuovamente l'assenza di punti angolosi abbiamo la tesi.

Esempio più buffo (Una succ. crescente di succ. crescenti)



$X = \{ a_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N} \} \cup \{l\}$

dove $a_{i0} \uparrow l$ per $i \to +\infty$

$a_{ij} \uparrow a_{(i+1)0}$ per $j \to +\infty$ con i fissato.

Dim. In ciascuno degli intervalli $]a_{i0}, a_{(i+1)0}]$, f è lineare ragionando come nell'esempio precedente, e ora ci siamo ridotti alla situazione — di nuovo — dell'esempio precedente con $a'_i = a_{i0}$.

Digressione: insiemi numerabili

Def Un insieme X è *numerabile* se è il supporto di una successione, $X = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, con $a_i \neq a_j$ per ogni $i \neq j$.

Esempi

$\mathbb{N}$	$0, 1, 2, 3 \dots$	$a_i = i$
{n. dispari}	$1, 3, 5, 7 \dots$	$a_i = 2i + 1$
{n. primi}	$2, 3, 5, 7 \dots$	$a_i = b, h\,?\ p_i\,?$
$\not\exists$	$0, -1, 1, -2, 2 \dots$	$a_i = (-1)^i \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil$

Esempio meno immediato: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$

Dim. La funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$(x, y) \longmapsto 2^x(1 + 2y) - 1$$

è biunivoca (perché?) quindi $a_i = f^{-1}(i)$ enumera $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Prop. Un sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è, a sua volta, numerabile.

Dim Sia $Y \subseteq X$ con Y infinito e $X = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.
La sottosuccessione $b_j = a_{i_j}$ degli a_i che appartengono a Y enumera Y. A essere precisi bisognerebbe dire esattamente chi sono gli indici i_j. Per ricorsione:

$$i_0 = \min\{i \mid a_i \in Y\} \qquad i_{j+1} = \min\{i > i_j \mid a_i \in Y\}$$

dove i minimi esistono perché Y non è finito.

Prop. Se X e Y sono numerabili, $X \times Y = \{(a,b) \mid a \in X, b \in Y\}$ è anch'esso numerabile

Dim Fissiamo $X = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ $Y = \{b_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.
Siccome $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(i_t, j_t) \mid t \in \mathbb{N}\}$.
Quindi $X \times Y = \{(a_{i_t}, a_{j_t}) \mid t \in \mathbb{N}\}$

Esempio $\mathbb{Q}$ è numerabile

Dim $\mathbb{Q}$ è in corrispondenza biunivoca con

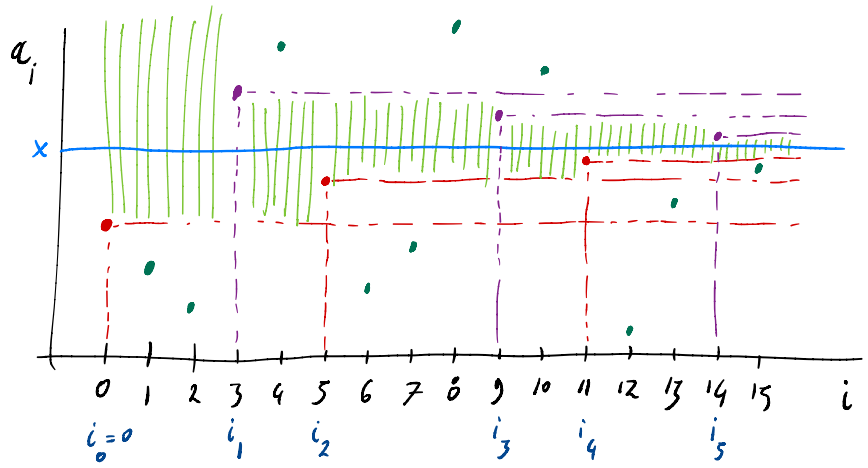
$$F = \{(num, den) \mid num \in \mathbb{Z} \wedge den \in \mathbb{N}^{>0} \wedge MCD(num, den) = 1\}$$
$$\subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}.$$

NON esempio $\mathbb{R}$ non è numerabile

Dim. Supponendo, per assurdo, che $\mathbb{R} = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, cerchiamo un $x \in \mathbb{R}$ che non compare fra gli a_i. Allo scopo, costruiamo una la sottosuccessione a_{i_j} definita per ricorrenza da

$i_0 = 0 \qquad i_1 = \min\{i \mid a_i > a_0\}$

$i_{j+1} = \min\{i \mid a_i \text{ è compreso fra } a_{i_{j-1}} \text{ e } a_{i_j}\}$



Si vede facilmente (esercizio!) che la successione $\{a_{i_{2k}}\}_k$ è crescente, $\{a_{i_{2k+1}}\}_k$ è decrescente e $\lim_{k\to\infty} a_{i_{2k}} \leq \lim_{k\to\infty} a_{i_{2k+1}}$.
Fissiamo x tale che $\lim_{k\to\infty} a_{i_{2k}} \leq x \leq \lim_{k\to\infty} a_{i_{2k+1}}$. Chiaramente x non è nessuno degli a_{i_j}, perché $a_{i_{2k}} < x < a_{i_{2k+1}}$. Supponiamo $x = a_n$, allora ci sarà un j tale che $i_j < n < i_{j+1}$, ma questo è assurdo perché allora $x = a_n$ è compreso fra $a_{i_{j-1}}$ e a_{i_j}, però $n < i_{j+1}$ contro la minimalità di quest'ultimo.
(Esercizio: hai notato il caso $n < i_1$? Aggiustalo!)

Esercizio Dimostra che l'insieme di Cantor C non è numerabile.

Tornando agli insiemi di unicità

Teo (Cantor-Lebesgue) Se $X \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso e numerabile, allora X soddisfa (*), ed è, quindi, di unicità.

La strategia dimostrativa passa attraverso una definizione.

Def Dato $X \subseteq \mathbb{R}$, il *derivato di Cantor-Bendixson* di X è

$$X' = X \setminus \{\text{punti isolati di } X\}$$

(Dove $a \in X$ è un punto isolato se $\exists \varepsilon > 0 \;]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap X = \{a\}$)

Oss Se X è chiuso e X' ha (*), allora anche X ha (*).

Dim Occorre dimostrare che se f è continua, lineare ristretta agli intervalli aperti che non intersecano X, e non ha punti angolosi, allora f è lineare ristretta agli intervalli aperti che non intersecano X'. Fatto questo, usando l'ipotesi su X', f è lineare — abbiamo quindi mostrato che X ha (*).

Sia $]a,b[\cap X' = \emptyset$, dobbiamo dire che $f_{|]a,b[}$ è lineare.

Ci basta dire che per ogni $\varepsilon > 0$ $f_{|[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}$ è lineare.

Siccome $]a,b[\cap X' = \emptyset$, $]a,b[\cap X \subseteq \{\text{punti isolati di } X\}$.

Quindi $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \cap X$ è finito — se così non fosse, avrebbe un punto di accumulazione α che non può essere un punto isolato di X, per cui $f_{|[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}$ è lineare a tratti, e, siccome non ha punti angolosi, è lineare.

Cor Sia $X^{(n)} = X'''\cdots'$ (n volte). Se $X^{(n)} = \emptyset$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, allora X ha (*).

Dim Induzione su n.

Il guaio è che ci sono chiusi numerabili per cui $X^{(n)} \neq \emptyset$ qualunque sia n.

Esempio Vogliamo costruire X chiuso e numerabile tale che $X^{(n)} \neq \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Cominciamo col rivedere alcuni esempi già visti.

- $X = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ con $a_i \uparrow +\infty$ per $i \to \infty$.



Tutti i punti sono isolati, $X' = \emptyset$.

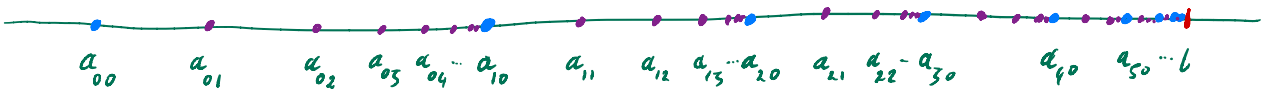
- $X = \{a_0, a_1, a_2, \dots, l\}$ con $a_i \uparrow l$ per $i \to \infty$.



"Successione con punto limite"

Tutti i punti sono isolati salvo l, quindi $X' = \{l\}$ e $X'' = \emptyset$.

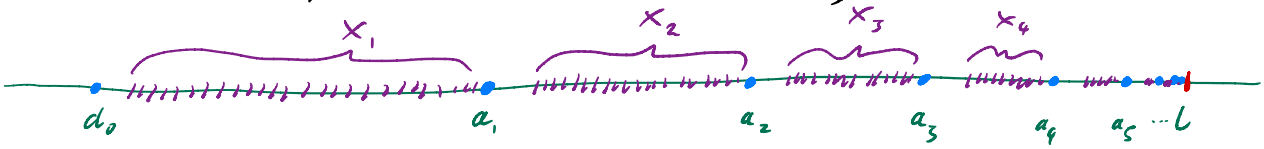
- $X = \{a_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ con $a_{i0} \uparrow l$ e $a_{ij} \uparrow a_{(i+1)0}$.



"Successione di successioni"

$X' = \{a_{10}, a_{20}, a_{30}, \dots, l\}$ $X'' = \{l\}$ $X''' = \emptyset$

Si vede che possiamo proseguire, in questo modo, costruendo una successione di successioni di successioni, etc. n volte, X_n. Avremo $X_n^{(n)} \neq \emptyset$, $X_n^{(n+1)} = \emptyset$. Ora costruiamo X_ω fatto così:



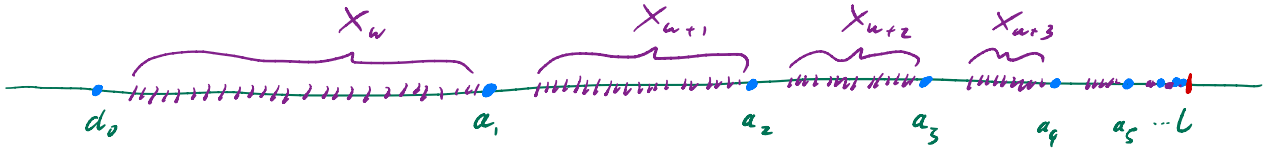
È chiaro che, per ogni n, $X_w^{(n)} \neq \emptyset$. D'altro canto, X_w soddisfa $(*)$, perché f deve essere lineare in ciascuno degli intervalli $[a_n, a_{n+1}]$, perché X_{n+1} soddisfa $(*)$, quindi ci si riduce al caso della successione.

Esercizio: perché X_w è numerabile?

Ora potremmo pensare che, pazienza se X_w non si smonta a furia di derivati, sarà un caso particolare. Però, adesso, possiamo fare una successione di insiemi come X_w, chiamiamola X_{w+1}, e una successione di questi X_{w+2}, etc.
Al diavolo, serve un nuovo corollario!

Cor 2 Se $X^{(n)}$ è "tipo X_w", allora X ha $(*)$.

Ok, questo corollario copre X_w, X_{w+1}, X_{w+2}, ma copre anche $X_{w\cdot 2}$?



No: occorre un nuovo corollario.

Cor 3 Se $X^{(n)}$ è "tipo $X_{w\cdot 2}$", allora X ha $(*)$.

E poi un altro per $X_{w\cdot 3}$, e un altro per $X_{w\cdot 4}$, etc.
E ora abbiamo finito? No, perché possiamo costruire una successione con X_w, $X_{w\cdot 2}$, $X_{w\cdot 3}$, etc.

Se chiamiamo questa follia $X_{w.w}$, ecco che si riparte a fare successioni di $X_{w.w}$. Ora si sarà capito che definiremo una specie di aritmetica di queste cose, per cui potremo fare anche w^w, w^{w^w}, etc.

È questa la soluzione, allora?

No, ogni sforzo di trovare l'induzione a capo delle induzioni è vano. Se ho X_w, X_{ww}, X_{www}, etc., allora, ecco che faccio una successione con queste cose, la batterezzo in qualche modo — chessò, X_{ε_0} — e si riparte!

Per smontare ogni possibile insieme chiuso e numerabile occorre un nuovo tipo di induzione, l'induzione transfinita, che è strettamente più potente dell'induzione aritmetica. Questa tecnica è stata sviluppata da Cantor, forse prendendo le mosse dal problema degli insiemi di unicità, e sarà uno degli argomenti centrali del corso.

Esercizio (per la fine del corso)
Dimostra il teorema di Cantor–Lebesgue.