Giochi di parole

Descrivere un oggetto matematico non basta per crearlo. Se bastasse, si incorrebbe in contraddizioni come questa.

Paradosso di Russell

Tipicamente le collezioni — uso questa parola perché daremo, al termine "insieme", un senso tecnico preciso — non sono membre di se stesse: la collezione di tutti i numeri primi non è un numero primo. Però ci sono anche collezioni che sono membre di se stesse: per esempio la collezione di tutte le collezioni. Consideriamo

$$N = \{ \text{collezioni } X \mid X \notin X \}$$

la collezione delle collezioni che non sono membre di se stesse — N per collezioni normali.

$N \in N$ oppure no?

$N \in N$ se e solo se, per definizione $N \notin N$. ↯

Il paradosso di Russell ci dice che, del principio di collezione — ossia l'idea che data una proprietà ben definita P si possa costruire la collezione $\{X \mid P(X)\}$ — non ci si può fidare.

Paradosso di Berry

L'Italiano annovera un numero finito di parole, è quindi possibile formare solo un numero finito di frasi di meno di cento parole. Alcune di queste descrivono un numero naturale, altre no. Comunque, solo un numero finito di numeri naturali può essere descritto con meno di cento parole. Per il principio del minimo, esiste

b = "il più piccolo numero naturale che l'Italiano non può descrivere con meno di cento parole".

Il guaio, chiaramente, è che lo abbiamo appena descritto con sedici parole.

Quindi non ci si può fidare troppo neppure dell'Italiano, o meglio, non è possibile descrivere precisamente cosa sia una descrizione precisa.

In conclusione, occorre fissare un linguaggio formale in cui si esprimono le proposizioni della teoria degli insiemi, e occorre fissare un sistema di assiomi, espressi in questo linguaggio, che dicano quali costruzioni sono lecite: quali insiemi esistono. Il ruolo della teoria degli insiemi è, poi, di fondare l'edificio della matematica. L'ambizione, quindi, è che il linguaggio e gli assiomi della teoria degli insiemi siano, in realtà, il linguaggio e gli assiomi della matematica.

Scopi del corso

Questo corso persegue due obiettivi:

1. Studiare i *fondamenti della matematica*, nella forma più comunemente accettata nel ~~XX~~ secolo e fino ad ora, la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel con l'assioma della scelta (ZFC)
2. Studiare *tecniche e strumenti* che sono stati sviluppati grazie alla teoria degli insiemi, per esempio: la teoria delle cardinalità, la teoria dei numeri ordinali, l'induzione e la ricorsione transfinita.

In questo corso non ci occupiamo dei modelli della teoria degli insiemi. Mi spiego. Per esempio, in teoria dei gruppi, si assiomatizza cosa sia un gruppo, e poi si studia come possano essere fatti i diversi gruppi. In teoria degli insiemi, si assiomatizza l'universo di tutti gli insiemi, però, per il teorema di incompletezza di Gödel, questa assiomatizzazione non può essere completa. Quindi esistono tanti universi insiemistici possibili. Indagare queste possibilità — i *modelli della teoria degli insiemi* — è argomento di corsi più avanzati.

Il linguaggio della teoria degli insiemi

Per non incorrere in contraddizione, accettiamo che le sole proposizioni ad avere senso siano quelle esprimibili mediante **formule insiemistiche**. Le formule si costruiscono ricorsivamente.

- Le lettere $a, b, c \ldots, A, B, C \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ rappresentano **variabili**. I valori delle variabili sono sempre insiemi, e non ci sono altri oggetti salvo gli insiemi
- Le **formule atomiche** sono "appartiene a"

  variabile = variabile variabile $\in$ variabile

  es. $x = y$, $x = x$, $\alpha = C$ es. $x \in y$, $x \in x$, $\alpha \in C$
- Le formule si combinano fra loro mediante
  - **connettivi logici**

    $\neg$ "non" formula formula $\wedge$ "e" formula formula $\vee$ "o" formula

    $\neg \Phi \equiv$ "Φ è falsa"

    $\Phi \wedge \Psi \equiv$ "Φ e Ψ sono entrambe vere"

    $\Phi \vee \Psi \equiv$ "almeno una fra Φ e Ψ è vera"

  - **quantificatori**

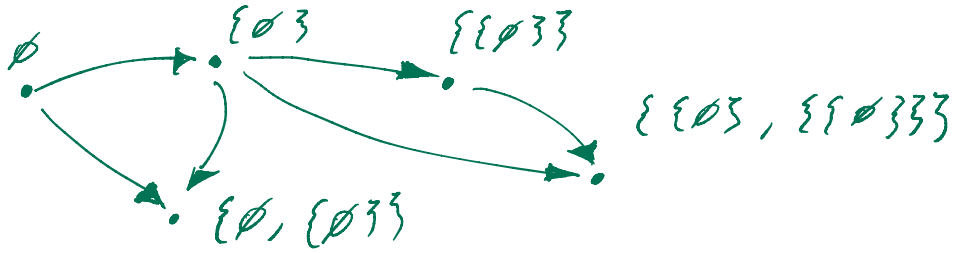
    $\forall x$ "per ogni x" formula $\exists x$ "esiste x" formula

    $\forall x\, \Phi \equiv$ "Φ è vera qualunque sia l'insieme x"

    $\exists x\, \Phi \equiv$ "c'è un insieme x che fa sì che Φ sia vera"

    Es. chiaramente varranno: $\forall x\ x = x$, $\forall x\, \exists y\ x = y$, $\neg \exists x\, \forall y\ x = y$

L'intuizione è che l'universo insiemistico sia un gigantesco grafo diretto (aciclico) i cui vertici sono gli insiemi, ed in cui le frecce rappresentano la relazione di appartenenza.



Possiamo solo fare affermazioni a proposito di vertici e frecce di questo grafo. Per esempio

"a è un elemento di un elemento di b" ≡

"c'è un percorso di due frecce fra a e b" ≡

$\exists x \; a \in x \wedge x \in b$

"a è un sottoinsieme di b" ≡

"ogni elemento di a è un elemento di b" ≡

"non c'è un insieme che è elemento di a e non di b" ≡

"non c'è un vertice con una freccia verso a e non verso b" ≡

$\neg \exists x \; x \in a \wedge \neg x \in b$

Parentesi. Ad essere precisi, avremmo dovuto definire le formule includendo un mucchio di parentesi, allo scopo di eliminare ogni possibilità di formare una combinazione di simboli ambigua. Per esempio $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vee \Phi_3$ è ambigua, perché si potrebbe leggere $(\Phi_1 \wedge \Phi_2) \vee \Phi_3$ o $\Phi_1 \wedge (\Phi_2 \vee \Phi_3)$.

In una notazione completamente parentesizzata, per esempio, la formula per "a è un sottoinsieme di b" sarebbe

$$\neg\left(\exists x\left((x\in a)\wedge(\neg(x\in b))\right)\right)$$

Non useremo, in generale, questa notazione, ma useremo le parentesi selettivamente per evitare ambiguità.

Abbreviazioni: Le formule appena descritte costituiscono il linguaggio della teoria degli insiemi *puro*. Durante il corso estenderemo più volte questo linguaggio mediante abbreviazioni, che semplicemente rimpiazzano formule più lunghe con scritture convenzionali più compatte, e quindi non alterano la potenza espressiva del linguaggio. Vediamo le prime abbreviazioni:

$x\neq y \overset{def.}{\equiv} \neg x=y$ $\quad x\notin y \overset{def.}{\equiv} \neg x\in y$ $\quad \not\exists x\,\Phi \overset{def.}{\equiv} \neg\exists x\,\Phi$

$\Phi\to\Psi \overset{def.}{\equiv} \Psi\vee\neg\Phi$ $\quad \Phi\leftrightarrow\Psi \overset{def.}{\equiv} (\Phi\to\Psi)\wedge(\Psi\to\Phi)$

$\exists x\in y\ \Phi \overset{def.}{\equiv} \exists x\,(x\in y\wedge\Phi)$ $\quad \forall x\in A\ \Phi \overset{def.}{\equiv} \forall x\,(x\in A\to\Phi)$

$\exists! x\,\Phi(x) \overset{def.}{\equiv} \exists x\,(\Phi(x)\wedge\forall y\,(\Phi(y)\to y=x))$

$\exists! x\in A\ \Phi(x) \overset{def.}{\equiv} \exists! x\,(x\in A\wedge\Phi(x))$

$A\subseteq B \overset{def.}{\equiv} \forall x\,(x\in A\to x\in B)$ $\quad A\not\subseteq B \overset{def.}{\equiv} A\subseteq B\wedge A\neq B$

$C=A\cup B \overset{def.}{\equiv} \forall x\ \ x\in C\leftrightarrow(x\in A \underset{\sim}{\vee} x\in B)$

$C=A\cap B \overset{def.}{\equiv} \forall x\ \ x\in C\leftrightarrow(x\in A \underset{\sim}{\wedge} x\in B)$

Nota: il fatto che possiamo dire $C=A\cup B$ o $C=A\cap B$ non significa né che questi oggetti esistano né che siano unici. Dimostreremo fra poco l'esistenza e unicità di unione e intersezione.

Esercizi: esprimi queste proposizioni mediante formule insiemistiche pure

- gli elementi degli elelementi di A sono elementi di A
- B è l'insieme dei sottoinsiemi di A
- l'unione degli elementi di A è l'intersezione di quelli di B

  (qui assumi che unione e intersezione esistano e siano uniche)
- ogni insieme è disgiunto da uno dei suoi elementi

Le regole di inferenza

La teoria assiomatica degli insiemi si compone di tre parti: il linguaggio formale che abbiamo appena descritto, gli assiomi della teoria che studieremo durante il corso, ed un sistema di regole formali che specificano precisamente quali passaggi sono leciti nelle dimostrazioni. Possiamo immaginare quest'ultima componente come una specie di algebra dei ragionamenti, che permette di verificare i passaggi di una dimostrazione in maniera puramente meccanica, come se fossero semplici manipolazioni algebriche. Noi non vedremo le regole di inferenza, e voglio qui spiegare perché.

1. Sono argomento del corso di logica.
2. In realtà, scrivere le dimostrazioni in maniera formale, le renderebbe lunghissime e praticamente incomprensibili.

3. In pratica, non si sbaglia facendo ragionamenti che non reggono; si sbaglia dicendo cose fumose che non possono essere espresse nel linguaggio della teoria. Per esempio, le parole "e così via" sono assai pericolose.
4. Conoscere le regole — falsatori — non aiuta né a trovare né a capire le dimostrazioni.

Pur senza dare un sistema completo di regole, vediamo qualche manipolazione formale che potrebbe servire.

Tavole di verità Due combinazioni mediante connettivi logici ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) delle stesse formule — "combinazioni booleane" — alle volte, dicono la stessa cosa. Per esempio, $\neg\Phi \vee \neg\Psi \overset{\text{"equivale a"}}{\equiv} \neg(\Phi \wedge \Psi)$. Per verificare questo fatto basta considerare tutte le possibili combinazioni di valori di verità che possono assumere le formule combinate — nello esempio Φ e Ψ — compilando una "tabella di verità"

Φ	Ψ	$\neg\Phi$	$\neg\Psi$	$\neg\Phi \vee \neg\Psi$	$\Phi \wedge \Psi$	$\neg(\Phi \wedge \Psi)$
V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V

Queste due colonne coincidono!

Conviene tenere a mente alcune equivalenze elementari

$$\neg\neg\Phi \equiv \Phi \qquad \Phi \wedge (\Psi \vee \Theta) \equiv (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Theta)$$

$$\Phi \vee (\Psi \wedge \Theta) \equiv (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \Theta)$$

$$\neg(\Phi \wedge \Psi) \equiv \neg\Phi \vee \neg\Psi \qquad \Phi \to \neg\Psi \equiv \Psi \to \neg\Phi$$

$$\neg(\Phi \vee \Psi) \equiv \neg\Phi \wedge \neg\Psi \qquad \Phi \to \Psi \equiv \neg\Psi \to \neg\Phi$$

Esercizio Dimostrale.

Per quanto riguarda i quantificatori ricordiamo le regole seguenti, che tuttavia non sono esaustive.

$$\neg\forall x\,\Phi \equiv \exists x\,\neg\Phi \qquad \neg\forall x\,\neg\Phi \equiv \exists x\,\Phi$$

$$\neg\exists x\,\Phi \equiv \forall x\,\neg\Phi \qquad \neg\exists x\,\neg\Phi \equiv \forall x\,\Phi$$

Esercizio Convinciti della validità delle equivalenze precedenti

Esercizio Dimostra che

$$\neg\forall x\in A\,\Phi \equiv \exists x\in A\,\neg\Phi \qquad \neg\exists x\in A\,\Phi \equiv \forall x\in A\,\neg\Phi$$

Esercizio Dimostra che

$$\forall x\,(x\in A \to x\in B) \equiv \neg\exists x\,(x\in A \wedge \neg x\in B)$$

Esercizio Secondo te, la seguente formula è vera?

$$\forall A\left((\exists x\; x\in A) \to \forall B\;\exists x\in A\,(x\in B \to \forall y\in A\; y\in B)\right)$$

Infine vi sono regole per la relazione di uguaglianza, che dicono, in sostanza, che se $x=y$ allora x e y non sono distinguibili, ossia vale $\Phi(x) \leftrightarrow \Phi(y)$ qualunque sia Φ. Per quanto ci riguarda, se $x=y$ allora x e y sono nomi della stessa cosa.

I primi assiomi

① Assioma dell'insieme vuoto

"Esiste un insieme vuoto"

$\exists x \, \forall y \; y \notin x$

Nota: Questo assioma non sarebbe strettamente necessario, in quanto potremmo ottenere un insieme vuoto anche come sottoprodotto, per esempio, dall'assioma dell'infinito che vedremo in seguito. Tuttavia è bello poter partire avendo per le mani almeno un insieme.

② Assioma di estensionalità

"Un insieme è determinato dalla collezione dei suoi elementi"

"Due insiemi coincidono se e solo se hanno i medesimi elementi"

$\forall a \, \forall b \quad a = b \leftrightarrow \forall x \; (x \in a \leftrightarrow x \in b)$

Esercizio: dimostra che la freccia $a = b \to \forall x \dots$, in realtà, segue dal fatto che se $a = b$ allora a e b sono indistinguibili.

Convenzione Le variabili libere (= non quantificate), se non specificato altrimenti, si intendono implicitamente quantificate universalmente all'inizio della formula. Per cui possiamo scrivere l'assioma di estensionalità semplicemente nella forma:

$$a = b \leftrightarrow \forall x \; (x \in a \leftrightarrow x \in b)$$

Prop. C'è un unico insieme vuoto $\exists! x \, \forall y \; y \notin x$

Dim Consideriamo due insiemi vuoti x_1 e x_2, ossia supponiamo $\forall y \; y \notin x_1$ e $\forall y \; y \notin x_2$. Allora

$$\forall y \; y \in x_1 \leftrightarrow y \in x_2$$

perché $y \in x_1$ e $y \in x_2$ sono entrambe necessariamente false. Quindi, per estensionalità, $x_1 = x_2$. ∎

Dim 2 Questo livello di pedanteria non è necessario, ma, per una volta, proviamo a dimostrare in ogni dettaglio la formula $\exists! x \, \forall y \; y \notin x$. Per definizione di $\exists!$, questa equivale a

$$\exists x_1 \left[(\forall y \; y \notin x_1) \wedge \forall x_2 \, (\forall y \; y \notin x_2) \to x_2 = x_1 \right]$$

Per l'assioma del vuoto, $\exists x_1 \, \forall y \; y \notin x_1$: fissiamo questo x_1. Resta da dimostrare che

$$(\forall y \; y \notin x_1) \wedge \forall x_2 \, (\forall y \; y \notin x_2) \to x_2 = x_1$$

Per costruzione, $\forall y \; y \notin x_1$ è vera, quindi resta

$$\forall x_2 \, (\forall y \; y \notin x_2) \to x_2 = x_1$$

Ora prendiamo un x_2 qualunque: dobbiamo dimostrare

$$(\forall y \; y \notin x_2) \to x_2 = x_1 \qquad (*)$$

Si danno due casi: o $\forall y \; y \notin x_2$ è vera o è falsa. Nel secondo caso l'implicazione $(*)$ è vera per via della tabella di verità. Nel primo abbiamo sia $\forall y \; y \notin x_1$, per costruzione, sia $\forall y \; y \notin x_2$ per ipotesi. Quindi, preso un qualunque y, $y \in x_1$ e $y \in x_2$ sono entrambe false.

La tabella di verità di $\leftrightarrow$ ci dice quindi che vale

$y \in x_1 \leftrightarrow y \in x_2$, e, per l'arbitrarietà di y

$$\forall y \ (y \in x_1 \leftrightarrow y \in x_2)$$

Dall'assioma di estensionalità

$$(\forall y \ (y \in x_1 \leftrightarrow y \in x_2)) \rightarrow x_1 = x_2$$

Abbiamo quindi $x_1 = x_2$, da cui segue $(*)$. ☕

Chiaramente, ho voluto scrivere questa dimostrazione delirante per convincervi che NON è UNA BUONA IDEA.

Notazione L'unicità dell'insieme vuoto ci giustifica ad introdurre una nuova abbreviazione

$$x = \emptyset \overset{\text{def.}}{\equiv} \forall y \ y \notin x \qquad \emptyset \in x \overset{\text{def.}}{\equiv} \exists z \ z = \emptyset \wedge z \in x$$

(3) Assioma* di separazione

"Se A è un insieme, e $\Psi(x)$ una formula insiemistica qualunque, allora $\{x \in A \mid \Psi(x)\}$ è un insieme"

$$\forall A \ \exists B \ \forall x \ x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \Psi(x))$$

* Nota: tecnicamente l'assioma di separazione è uno schema di assiomi, ossia una regola che, per ogni possibile formula Ψ, ci permette di scrivere un assioma.

Prop Fissati A e $\Psi(x)$, l'insieme $\{x \in A \mid \Psi(x)\}$ è univocamente definito. Ossia

$$\forall A \ \exists! B \ \forall x \ x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \Psi(x))$$

Dim Come per l'unicità dell'insieme vuoto, supponiamo di avere B_1 e B_2 tali che

$$\forall x \; x \in B_1 \leftrightarrow (x \in A \wedge \Psi(x)) \qquad \forall x \; x \in B_2 \leftrightarrow (x \in A \wedge \Psi(x))$$

Allora $x \in B_1 \leftrightarrow (x \in A \wedge \Psi(x)) \leftrightarrow x \in B_2$, quindi, per estensionalità, $B_1 = B_2$. ∎

Esercizio: Verifica che se $\Psi \to \Phi$ e $\Phi \to \Theta$, allora $\Psi \to \Theta$.

Notazione Vista l'unicità, scriviamo

$$B = \{ x \in A \mid \Psi(x) \} \overset{\text{def.}}{\equiv} \forall x \; x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \Psi(x))$$

Osserviamo che l'assioma di separazione è una forma indebolita del principio di collezione. Rimpiazzando questo con quello, il paradosso di Russell diventa una proposizione

Prop Non esiste l'insieme di tutti gli insiemi. $\nexists V \; \forall x \; x \in V$

Dim Supponiamo, per assurdo, che esista questo V. Allora, per separazione con la formula $\Psi(x) \equiv x \notin x$, esiste

$$N = \{ x \in V \mid x \notin x \}$$

che ha, per definizione, la proprietà

$$\forall x \; x \in N \leftrightarrow (x \in V \wedge x \notin x)$$

Per ipotesi assurda, $x \in V$ è sempre vera, quindi

$$\forall x \; x \in N \leftrightarrow x \notin x$$

Prendendo, ora, $x = N$, abbiamo $N \in N \leftrightarrow N \notin N$ ↯

Classi e classi proprie

Sebbene, abbiamo detto, gli unici oggetti della teoria degli insiemi sono gli insiemi, usualmente ci si riferisce alla collezione di tutti gli insiemi che soddisfano una certa formula come ad una specie di insieme: una **classe**. Più precisamente, data una formula $\Psi(x)$, se diciamo:

"sia C la classe degli insiemi x tali che $\Psi(x)$"

intendiamo dire che useremo la scrittura $x \in C$ come una semplice abbreviazione per la formula $\Psi(x)$.

Non avrebbe senso scrivere $C \in$ qualcosa, perché il simbolo $\in$ in $x \in C$ non ha senso, se non nel tutt'uno $\in C$. In altri termini, se scriviamo $x \in C$ in luogo di $\Psi(x)$ è solo come ausilio all'intuizione: avremmo potuto decidere di scrivere x , o nient'altro che $\Psi(x)$.

Def V, la classe universale, è la classe di tutti gli insiemi.

$$x \in V \overset{def.}{\equiv} x = x$$

Insomma, scrivere $x \in V$ non dice molto: è una formula sempre vera.

Date due classi C e D, che, ricordiamo, non significa altro che "date due formule ...", definiamo l'abbreviazione

$$C = D \overset{def.}{\equiv} \forall x \; x \in C \leftrightarrow x \in D$$

Ora, dato un qualunque insieme A, possiamo definire la classe $\hat{A}$ degli x tali che $x \in A$. Se $\hat{A} = \hat{B}$, per definizione

$$\forall x \quad x \in A \iff x \in B$$

quindi $A = B$ per estensionalità. Ha quindi senso, con un leggero abuso di notazione, omettere il cappelletto $\hat{}$ e identificare la classe $\hat{A}$ semplicemente con A. In questo senso, abbiamo classi che sono insiemi — formalmente C è un insieme se $C = \hat{A}$ per qualche insieme A — e classi che non sono insiemi. Chiamiamo classe propria una classe che non è un insieme.

Esempio V è una classe propria.

L'intuizione, che sarà più chiara via via che procediamo nel corso, è che le classi proprie sono troppo grandi per essere insiemi.