Ora, dato un qualunque insieme $A$, possiamo definire la classe $\hat{A}$ degli $x$ tali che $x \in A$. Se $\hat{A} = \hat{B}$, per definizione

$$\forall x \quad x \in A \iff x \in B$$

quindi $A = B$ per estensionalità. Ha quindi senso, con un leggero abuso di notazione, omettere il cappelletto $\hat{}$ e identificare la classe $\hat{A}$ semplicemente con $A$. In questo senso, abbiamo classi che sono insiemi — formalmente $C$ è un insieme se $C = \hat{A}$ per qualche insieme $A$ — e classi che non sono insiemi. Chiamiamo classe propria una classe che non è un insieme.

Esempio $V$ è una classe propria.

L'intuizione, che sarà più chiara via via che procediamo nel corso, è che le classi proprie sono troppo grandi per essere insiemi.

## L'assioma del paio e la coppia di Kuratowski

I primi assiomi ci dicono, a grandi linee, che, entro i limiti di quanto si può fare rinunciando al principio di collezione — che esiste $\{x \mid$ una qualunque proprietà$\}$ —, gli insiemi sono delle specie di collezioni. Sono determinati dai loro elementi, e li si può dividere in collezioni più

piccole in maniera arbitraria. Ci troviamo, però, adesso, nella necessità di procurarci qualche insieme con cui lavorare. I prossimi assiomi serviranno per giustificare le costruzioni con cui, usualmente, si definiscono nuovi insiemi. Per esempio, abbiamo bisogno di costruire certi insiemi di base, tipo l'insieme dei numeri interi o insiemi finiti i cui elementi siano elencati esplicitamente, fare prodotti di insiemi esistenti, considerare le funzioni fra insiemi esistenti, &c.

④ Assioma del paio

"Dati $a$ e $b$ esiste l'insieme $\{a, b\}$"

$$\forall a\, \forall b\, \exists P\, \forall x\ \ x \in P \leftrightarrow (x = a \vee x = b)$$

Prop. Fissati $a$ e $b$, l'insieme $\{a, b\}$ è univocamente determinato

$$\forall a\, \forall b\, \exists! P\, \forall x\ \ x \in P \leftrightarrow (x = a \vee x = b)$$

Esercizio dimostra la proposizione precedente.

"singoletto di $a$"

Prop. Dato $a$, esiste ed è unico $\{a\}$.

$$\forall a\, \exists! S\, \forall x\ \ x \in S \leftrightarrow x = a$$

Dim Ponendo $b = a$ nella proposizione precedente

$$\exists! P\, \forall x\ \ x \in P \leftrightarrow (x = a \vee x = a)$$

Ora $x = a \vee x = a$ equivale semplicemente a $x = a$. ∎

Notazione. $P = \{a, b\} \overset{def.}{\equiv} \forall x \; x \in P \leftrightarrow (x = a \vee x = b)$

$S = \{a\} \overset{def.}{\equiv} \forall x \; x \in S \leftrightarrow x = a$

Oss. $\{a, b\} = \{b, a\}$

Dim Usiamo il fatto che la $\vee$ è commutativa

$$x \in \{a, b\} \leftrightarrow (x = a \vee x = b) \leftrightarrow (x = b \vee x = a) \leftrightarrow x \in \{b, a\}$$

Quindi, per estensionalità, $\{a, b\} = \{b, a\}$. ∎

Il paio $\{a, b\}$ è, quindi, una coppia non ordinata. È possibile codificare le coppie ordinate con questo trucco

Def (coppia di Kuratowski)

$(a, b) \overset{def.}{\equiv} \{\{a\}, \{a, b\}\}$

Prop La coppia di Kuratowski $(a, b)$ rappresenta la coppia ordinata di $a$ e $b$, ossia $(a, b) = (a', b') \leftrightarrow (a = a' \wedge b = b')$

Dim Dato $c = (a, b)$, vogliamo determinare univocamente $a$ e $b$. Intanto, $a$ è determinato da

$$x = a \leftrightarrow \forall y \in c \; x \in y$$

La freccia $\rightarrow$ è infatti immediata, mentre $\leftarrow$ segue da $\{a\} \in c$, per cui $\forall y \in c \; x \in y \Rightarrow x \in \{a\} \Rightarrow x = a$.

Veniamo ora a $b$. Studiamo prima il caso in cui $\exists! x \; x \in c$

$\exists! x \; x \in c \Leftrightarrow \{a\} = \{a, b\}$ in quanto $\{a\} \in c$ e $\{a, b\} \in c$

$\{a\} = \{a, b\} \Leftrightarrow b = a$ per estensionalità

In questo caso, $b$ è quindi determinato.

Altrimenti, $x = \{a,b\} \leftrightarrow (x \in c \wedge x \neq \{a\})$, $\{a,b\}$ è quindi univocamente determinato da $c$, e $x = b \leftrightarrow (x \in \{a,b\} \wedge x \neq a)$. ∎

**Def**
$$(a,b,c) \overset{\text{def.}}{\equiv} ((a,b),c)$$
$$(a,b,c,d) \overset{\text{def.}}{\equiv} (((a,b),c),d)$$
$$(a_1,a_2,\dots,a_n) \overset{\text{def.}}{\equiv} ((a_1,\dots,a_{n-1}),a_n)$$

**Nota** Quest'ultima definizione è, in realtà, uno schema di definizioni: una per ogni $n$. Per ora, NON siamo in grado di scrivere, per esempio, una formula insiemistica che dica "Esiste un $n$ ed una $n$-tupla $(a_1 \dots a_n)$ tale che ...". Però, per ogni $n$ dato, diciamo 92, possiamo scrivere esplicitamente una formula che dice $x = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{92})$.

**Prop**
$$(a,b,c) = (a',b',c') \leftrightarrow a = a' \wedge b = b' \wedge c = c'$$
$$(a_1 \dots a_n) = (a_1' \dots a_n') \leftrightarrow a_1 = a_1' \wedge \dots \wedge a_n = a_n'$$

**Dim** Esercizio: dimostra la prima e convinciti che, dato un qualunque $n$ esplicito, potresti dimostrare la seconda.

## L'assioma dell'unione

(5) Assioma dell'unione

"Dato un insieme $A$ esiste un insieme $B$ i cui elementi sono gli elementi degli elementi di $A$"

"Dato un insieme $A$ esiste l'unione degli elementi di $A$"

$$\forall A\ \exists B\ \forall x\ x \in B \leftrightarrow \exists y \in A\ x \in y$$

**Prop.** $\forall A\ \exists! B\ \forall x\ x \in B \leftrightarrow \exists y \in A\ x \in y$

**Dim** Esercizio.

"unione di $A$"

**Def.** $B = \bigcup A \overset{\text{def.}}{\equiv} \forall x\ x \in B \leftrightarrow \exists y \in A\ x \in y$

**Esercizio** Dimostra che l'assioma dell'unione segue da

$$\forall A\ \exists B\ \forall y \in A\ \forall x \in y\ x \in B$$

Combinando l'assioma dell'unione e il paio possiamo definire $a \cup b$

**Def.** $a \cup b \overset{\text{def.}}{\equiv} \bigcup \{a, b\}$

**Prop.** $x \in a \cup b \leftrightarrow (x \in a \vee x \in b)$

**Dim** Dire che $x$ è un elemento di $a \cup b$ significa dire che $x$ è un elemento di un elemento di $\{a, b\}$, ossia che $x$ è un elemento di uno fra $a$ e $b$. ∎

Ora definiremo le intersezioni: riesci a vedere perché, a differenza delle unioni, non ci servirà un nuovo assioma?

quindi, in particolare, $C$ può essere un insieme

**Def** Sia $C$ una classe non vuota. L'insieme $B$ è l'intersezione di $C$ se $B = \bigcap C \overset{\text{def.}}{\equiv} \forall x\ x \in B \leftrightarrow \forall y \in C\ x \in y$

**Prop.** Data una classe non vuota $C$, l'intersezione $\bigcap C$ esiste ed è unica. In particolare, nel caso dell'intersezione di un insieme vale:

$$\forall A \left( A \neq \emptyset \to \exists! B \ \forall x \left( x \in B \leftrightarrow \forall y \in A \ x \in y \right) \right)$$

**Nota:** L'ipotesi $C \neq \emptyset$ è necessaria perché si avrebbe che $\bigcap \emptyset$ è la classe universale $V$, che non è un insieme.

**Dim** L'unicità segue per estensionalità al solito modo. Veniamo all'esistenza. Dal momento che $C$ non è vuota, possiamo prendere uno $z \in C$. Ora consideriamo

$$B = \{ x \in z \mid \forall y \in C \ x \in y \}$$

Chiaramente $x \in B \to \forall y \in C \ x \in y$. D'altro canto, $\forall y \in C \ x \in y$ implica, in particolare, $x \in z$, quindi $x \in B$. Abbiamo così provato che $x \in B \leftrightarrow \forall y \in C \ x \in y$, ossia $B = \bigcap C$. ∎

**Def.** $a \cap b \overset{def.}{\equiv} \bigcap \{a, b\}$

$a \setminus b \overset{def.}{\equiv} \{ x \in a \mid x \notin b \}$

**Prop** $x \in a \cap b \leftrightarrow (x \in a \wedge x \in b)$

$x \in a \setminus b \leftrightarrow (x \in a \wedge x \notin b)$

**Dim** Esercizio (La seconda è semplicemente la definizione)

**Prop.** Alcune proprietà delle operazioni $\cup$ $\cap$ $\setminus$

commutatività: $a \cup b = b \cup a$

$a \cap b = b \cap a$

associatività:

$$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c \overset{\text{def.}}{=} a \cup b \cup c$$

$$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c \overset{\text{def.}}{=} a \cap b \cap c$$

distributività:

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$

leggi di de Morgan:

$$a \setminus (b \cup c) = (a \setminus b) \cap (a \setminus c)$$

$$a \setminus (b \cap c) = (a \setminus b) \cup (a \setminus c)$$

Dim Tutte queste proprietà si deducono immediatamente dalle corrispondenti proprietà dei connettivi logici, le quali, a loro volta, si vedono tramite le tabelle di verità. Per esempio, dimostriamo la prima delle leggi di de Morgan.

$$x \in a \setminus (b \cup c) \iff x \in a \wedge x \notin (b \cup c)$$

$$\iff x \in a \wedge \neg (x \in b \vee x \in c)$$

$$\iff x \in a \wedge x \notin b \wedge x \notin c$$

ripetiti invano?

$$\iff x \in a \wedge x \notin b \wedge x \in a \wedge x \notin c$$

$$\iff x \in a \setminus b \wedge x \in a \setminus c$$

$$\iff x \in (a \setminus b) \cap (a \setminus c)$$

□

Ora possiamo costruire insiemi finiti elencandone gli elementi, come si fa di solito, con la notazione $\{\dots\}$.

Def.

$$\{a, b, c\} \overset{\text{def.}}{=} \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$$

$$\{a, b, c, d\} \overset{\text{def.}}{=} \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\} \cup \{d\}$$

$$\{a_1, \dots, a_n\} \overset{\text{def.}}{=} \{a_1\} \cup \dots \cup \{a_n\}$$

**Prop** $x \in \{a, b, c\} \leftrightarrow (x = a \vee x = b \vee x = c)$

$x \in \{a_1, \dots, a_n\} \leftrightarrow (x = a_1 \vee \dots \vee x = a_n)$

**Dim** Esercizio

## Assioma delle parti, prodotti cartesiani, &c.

Abbiamo definito la coppia $(x,y)$, però, per esempio, ancora nulla ci assicura che dati $A$ e $B$ esista

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

Le funzioni $A \to B$ saranno, poi, sottoinsiemi di $A \times B$, e vorremo parlare dell'insieme $^AB$ delle funzioni $A \to B$.
Per tutto questo ci manca un solo ingrediente: l'insieme delle parti.

⑥ Assioma delle parti

"Dato un insieme $A$ esiste l'insieme $\mathcal{P}(A)$ i cui elementi sono i sottoinsiemi di $A$"

$$\forall A \, \exists B \, \forall x \; x \in B \leftrightarrow x \subseteq A$$

**Prop:** $\forall A \, \exists! B \, \forall x \; x \in B \leftrightarrow x \subseteq A$

**Dim** A questo punto, non vale neanche più la pena di fare l'esercizio.

**Def** ("insieme delle parti" o "insieme potenza" di $A$)

$$B = \mathcal{P}(A) \overset{\text{def.}}{\equiv} \forall x \; x \in B \leftrightarrow x \subseteq A$$

**Prop** Dati $A$ e $B$ esiste un unico insieme $A \times B$ tale che

$$\forall z \quad z \in A \times B \iff \exists x \in A \; \exists y \in B \; z = (x,y)$$

Ossia, informalmente, $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

**Dim** L'unicità è conseguenza immediata dell'assioma di estensionalità. Per l'esistenza, definiamo

$$A \times B \overset{def.}{=} \{ z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid \exists x \in A \; \exists y \in B \; z = (x,y) \}$$

Dobbiamo dimostrare che ogni coppia $(x,y)$ con $x \in A$ e $y \in B$ appartiene a questo insieme. Basta dimostrare che tutte queste coppie appartengono a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

$$a \in A \wedge b \in B \Rightarrow \{a\}, \{a,b\} \overset{*}{\subseteq} A \cup B$$

$$\overset{*}{\text{Nota: poniamo}} \Rightarrow \{a\}, \{a,b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$$

$$a, b, \ldots \in z \overset{def.}{=} a \in z \wedge b \in z \wedge \ldots \Rightarrow (a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$

$$a, b, \ldots \in z \overset{def.}{=} a \in z \wedge b \in z \wedge \ldots \Rightarrow (a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$$

■

Nota: avremmo potuto costruire $A \times B$ usando, anziché l'assioma delle parti, l'assioma del rimpiazzamento, che vedremo più avanti.

Ora rivedremo alcuni concetti ben noti dai primi corsi del primo anno (o dalla scuola superiore?). Lo faccio molto rapidamente, essenzialmente completezza, e per fissare le notazioni.

**Def** Una **relazione binaria** fra $A$ e $B$ è un sottoinsieme di $A \times B$

**Notazione** Data una relazione $R \subseteq A \times B$, $a \; R \; b \overset{def}{=} (a,b) \in R$.

Per esempio scriviamo $a < b$ per $(a,b) \in <$.

**Def.** Una relazione $\sim \subseteq A \times A$ è una *relazione di equivalenza* se è

riflessiva: $\forall x \in A \quad x \sim x$

simmetrica: $\forall x, y \overset{*}{\in} A \quad x \sim y \hookrightarrow y \sim x$ *Nota: $\forall x_1 \dots x_n \overset{\text{def.}}{=} \forall x_1 \dots \forall x_n$

transitiva: $\forall x, y, z \in A \quad (x \sim y \wedge y \sim z) \to x \sim z$

e lo stesso con $\exists$ e coi quantificatori limitati

**Def.** $\leq \subseteq A \times A$ è una *relazione d'ordine (largo)* se è

riflessiva: $\forall x \in A \quad x \leq x$

antisimmetrica: $\forall x, y \in A \quad (x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y$

transitiva: $\forall x, y, z \in A \quad (x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z$

**Def.** $< \subseteq A \times A$ è una *relazione d'ordine stretto* se è

irriflessiva: $\forall x \in A \quad \neg(x < x)$

transitiva: $\forall x, y, z \in A \quad (x < y \wedge y < z) \to x < z$

**Esercizio** Dimostra che una relazione di ordine stretto $<$ su $A$ è automaticamente asimmetrica: $\forall x, y \in A \quad x < y \to \neg(y < x)$

**Prop:** Data una relazione di ordine stretto $<$ su $A$, la relazione

$$\leq \overset{*}{=} \{(x, y) \in A \times A \mid x < y \vee x = y\}$$

è una relazione di ordine largo. Vice versa, se $\leq$ è una relazione di ordine largo, la relazione seguente è di ordine stretto.

$$< \overset{*}{=} \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq y \wedge x \neq y\}$$

Inoltre, in questo modo, le relazioni di ordine stretto e di ordine largo sono poste in corrispondenza uno-a-uno.

*Formalmente: $\{z \in A \times A \mid \exists x, y \in A \; z = (x, y) \wedge \dots\}$

**Dim** Definiamo la diagonale

$$\Delta_A \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\}$$

Allora è facile verificare che, se $<$ è una relazione di ordine stretto, allora $< \cap \Delta_A = \emptyset$ e $< \cup \Delta_A$ è la relazione di ordine largo corrispondente. Vice versa, se $\leq$ è una relazione di ordine largo, allora $\Delta_A \subseteq \leq$ e $\leq \setminus \Delta_A$ è la relazione di ordine stretto corrispondente. ∎

**Notazione** Fissata una relazione di ordine largo $\leq$ su $A$, ci sentiremo liberi di usare la corrispondente relazione di ordine stretto $<$ sidando che la scelta del simbolo sia indizio sufficiente dell'operazione. Inoltre scriveremo $x > y$ per $y < x$ e $x \geq y$ per $y \leq x$.

**Def** Una relazione di ordine totale su $A$ è una relazione di ordine $\leq$ tale che $\forall x, y \in A \quad x \leq y \vee x = y \vee y \leq x$

**Esercizio** Formula la definizione precedente per ordini stretti.

**Def** Data una relazione $R \subseteq A \times B$, $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$

$$R|_{A' \times B'} \overset{\text{def.}}{=} R \cap (A' \times B') \quad \text{"restrizione di } R \text{ a } A' \times B'\text{"}$$

**Esercizio** Data $R$ relazione di equivalenza/ordine su $A$ e $A' \subseteq A$ dimostra che $R|_{A' \times A'}$ è una relazione di equivalenza/ordine su $A'$.

**Def.** Data una relazione $R \subseteq A \times B$, definiamo

$\mathrm{Dom}(R) \overset{\text{def.}}{=} \{x \in A \mid \exists y \in B \ \ x R y\}$ dominio di $R$

$\mathrm{Im}(R) \overset{\text{def.}}{=} \{y \in B \mid \exists x \in A \ \ x R y\}$ immagine di $R$

**Def.** Chiamiamo funzione $f : A \to B$ una relazione $f \subseteq A \times B$ tale che $\forall x \in A \ \exists! y \in B \ (x,y) \in f$.

Intuitivamente $f$ è l'insieme delle coppie $(x, f(x))$ per $x \in A$.

**Notazione** Data una funzione $f$, scriviamo

$y = f(x) \overset{\text{def.}}{=} (x,y) \in f$.

Dato $S \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, scriviamo

$f[S] \overset{\text{def.}}{=} \{y \in \mathrm{Im}(f) \mid \exists x \in S \ y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in S\}$ (informalmente)

**Def** Una funzione $f : A \to B$ è

iniettiva se $\forall y \in \mathrm{Im}(f) \ \exists! x \in \mathrm{Dom}(f) \ f(x) = y$

suriettiva se $B = \mathrm{Im}(f)$ ossia $\forall y \in B \ \exists x \in A \ f(x) = y$

biiettiva se è sia iniettiva sia suriettiva.

**Def** Data $f$ iniettiva

$f^{-1} \overset{\text{def.}}{=} \{(y,x) \in B \times A \mid f(x) = y\}$

**Oss** Data $f$ iniettiva, $f^{-1}$ è una funzione: $\mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Dom}(f)$ iniettiva. In particolare se $f$ è biiettiva: $A \to B$, allora $f^{-1}$ è biiettiva: $B \to A$.

**Def** Data $f: A \to B$ e $A' \subseteq A$

$$f|_{A'} \stackrel{def}{=} \{(x,y) \in A' \times B \mid f(x) = y\}$$

$f|_{A'}$ "$f$ ristretta ad $A'$" è una funzione $A' \to B$.

**Def** Date $g: A \to B$ e $f: B \to C$

$$f \circ g \stackrel{def}{=} \{(x,z) \in A \times C \mid z = f(g(x))\}$$

↳ o, più formalmente $\exists y (y = g(x) \wedge z = f(y))$

$f \circ g$ "$f$ composta con $g$" è una funzione $A \to C$.

**Notazione** Indichiamo con $Id_A$ la funzione identità su $A$

$$Id_A \stackrel{def}{=} \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\} \quad (= \Delta_A)$$

**Oss.** Data $f: A \to B$ biiettiva e $g: B \to A$, sono equivalenti:

$$g = f^{-1} \qquad g \circ f = Id_A \qquad f \circ g = Id_B$$

**Esercizio** Date $g: A \to B$ e $f: B \to C$, sotto quali condizioni $f \circ g$ è iniettiva, suriettiva, biiettiva?

**Esercizio** Data una relazione di equivalenza $\sim$ su $A$, dimostra che esiste un insieme $A/\sim$ ed una funzione surgettiva $i_\sim$ da $A$ a $A/\sim$ tale che $\forall x,y \in A \quad x \sim y \leftrightarrow i_\sim(x) = i_\sim(y)$

**Esercizio:** Data una relazione di equivalenza $\sim$ su $A$ e $f: A \to B$, affinché esista $\tilde{f}: A/\sim \to B$ tale che $f = \tilde{f} \circ i_\sim$, è necessario e sufficiente che $\forall x,y \in A \quad x \sim y \to f(x) = f(y)$.