# L'assioma dell'infinito e i numeri naturali

Il nostro prossimo obiettivo è definire i numeri naturali. I soli oggetti della teoria degli insiemi sono gli insiemi, per cui va da sé che i numeri saranno determinati insiemi. Il nostro scopo non è quindi tanto definire, quanto codificare i numeri naturali per mezzo di insiemi opportuni. La scelta della codifica non è obbligata: per esempio potremmo decidere che

n parentesi

$$\text{"codifica buffa di } n\text{"} = \{\{\{\dots\emptyset\dots\}\}\}$$

Sceglieremo, invece, quest'altra codifica

$$n = \{0, 1, \dots, n-1\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x < n\}$$

$$0 = \emptyset \qquad 1 = \{0\} \qquad 2 = \{0, 1\} \qquad 3 = \{0, 1, 2\} \qquad \&c.$$

che presenta alcuni vantaggi: per esempio $n$ è rappresentato da un insieme di $n$ elementi, e dire $m < n$ equivale semplicemente a dire $m \in n$.

L'ostacolo è ora parlare di questi oggetti in maniera precisa nel linguaggio della teoria degli insiemi. A dire il vero, potremmo già scrivere una formula $\Phi(n)$ che dice "$n$ è un numero naturale" si tratta di un esercizio difficile, che sarà reso più facile da idee che vedremo più avanti. Noi non scriviamo questa formula, ma, anche a farlo, non potremmo comunque dimostrare

che esiste un insieme i cui elementi sono i numeri naturali, questo perché gli assiomi visti finora non permettono di uscire dalla classe degli insiemi finiti (degli insiemi "evidentemente finiti", ad essere precisi: definiremo questo concetto a tempo debito).

Servirà un nuovo assioma. L'idea da sfruttare è che, siccome $n = \{0, \dots, n-1\}$, per ottenere il successore di $n$, ossia $n+1 = \{0, \dots, n-1, n\}$ dobbiamo aggiungere a $n$ l'elemento $n$ stesso: $n+1 = n \cup \{n\}$. Avendo una formula per denotare il successore, possiamo postulare l'esistenza di un insieme chiuso per successori, e questo ci darà $\mathbb{N}$.

**Def.** (successore) $\quad s(x) \overset{\text{def.}}{\equiv} x \cup \{x\}$

**Def.** (insiemi induttivi)
Diciamo che un insieme $A$ è induttivo se contiene $\emptyset$ ed è chiuso per successori, ossia

$$A \text{ è induttivo} \overset{\text{def.}}{\iff} \emptyset \in A \wedge \forall x \in A \; s(x) \in A$$

(7) Assioma dell'infinito

"Esiste un insieme induttivo"

$$\exists A \, (\emptyset \in A \wedge \forall x \in A \; s(x) \in A)$$

Finalmente definiamo l'insieme dei numeri naturali — che, per

qualche buffa ragione, chiamiamo $w$ (omega) — come l'intersezione della classe, non vuota per l'assioma dell'infinito, di tutti gli insiemi induttivi.

**Def.** L'insieme $w$ è l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi, ossia $w$ è l'unico insieme tale che

$$\forall x \left( x \in w \longleftrightarrow \left( \forall A \text{ "}A \text{ è induttivo"} \rightarrow x \in A \right) \right)$$

Adesso che abbiamo $w$, possiamo facilmente dimostrare che ogni dato numero naturale vi appartiene

**Def** $0 \overset{\text{def}}{\equiv} \emptyset$ $\quad 1 \overset{\text{def}}{\equiv} s(0)$ $\quad 2 \overset{\text{def}}{\equiv} s(1)$ $\quad 3 \overset{\text{def}}{\equiv} s(2)$ &c.

**Esercizio** Dimostra che $0, 1, 2, 3 \in w$.

Un esercizio un po' più difficile è esibire insiemi che non appartengano a $w$

**Esercizio** Dimostra che $\{\{\emptyset\}\} \notin w$

**Idea** Esibisci un insieme induttivo che non contiene $\{\{\emptyset\}\}$.

Per convincerci, però, che $w$ è, a buon diritto, l'insieme dei numeri naturali, serve qualcosa di più. Classicamente, i numeri naturali si definiscono per mezzo degli assiomi di Peano. Questi assiomi, che caratterizzano a meno di isomorfismi l'insieme $\mathbb{N}$ dotato della funzione

successore, per noi diventano dei teoremi che dimostreremo a proposito dell'insieme $\omega$. In questo senso, quindi, $\omega$ codifica legittimamente i numeri naturali.

Qualunque cosa questo significhi...

**Def** (assiomi di Peano del secondo ordine)
Dato un insieme $\mathbb{N}$, un elemento $0 \in \mathbb{N}$, e una funzione $succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, diciamo che $(\mathbb{N}, 0, succ)$ soddisfa gli assiomi di Peano se

A. il successore è iniettivo

$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad succ(m) = succ(n) \to m = n$

B. lo zero non è un successore

$\nexists n \in \mathbb{N} \quad succ(n) = 0$

C. principio di induzione

Data una qualunque formula insiemistica (proprietà) $\Phi(n)$

$\left( \varphi(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N} \; \Phi(n) \to \Phi(succ(n)) \right) \to \forall n \in \mathbb{N} \; \Phi(n)$

Nota:

Qui ci deve essere un typo...

***Axiomata.***

1. $1 \in \mathrm{N}$.
2. $a \in \mathrm{N} . \supset . a = a$.
3. $a, b, c \in \mathrm{N} . \supset : a = b . = . b = a$.
4. $a, b \in \mathrm{N} . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c$.
5. $a = b . b \in \mathrm{N} : \supset . a \in \mathrm{N}$.
6. $a \in \mathrm{N} . \supset . a + 1 \in \mathrm{N}$.
7. $a, b \in \mathrm{N} . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1$.
8. $x \in \mathrm{N} . \supset . a + 1 - = 1$.
9. $k \in \mathrm{K} \therefore 1 \in k \therefore x \in \mathrm{N} . x \in k : \supset_x . x + 1 \in k :: \supset . \mathrm{N} \supset k$.

Appariranno così in "Arithmetices Principia", nel 1889.

**Teo** La funzione $succ: w \to w$, $succ(n) = s(n)$, è ben definita e $(w, \emptyset, succ)$ soddisfa gli assiomi di Peano.

**Dim** Per controllare che succ sia ben definita, occorre assicurarsi che se $n \in w$ allora $s(n) \in w$. Fissiamo $n \in w$ e consideriamo un qualunque insieme induttivo $A$. Siccome $A$ è induttivo, $w \in A$, quindi $n \in A$, e, di conseguenza $s(n) \in A$. Per l'arbitrarietà di $A$, allora, $s(n)$ appartiene a ogni insieme induttivo. Quindi $s(n) \in w$.

Iniziamo ora col dimostrare B e C, poi passeremo ad A.

B. Supponiamo, per assurdo, $s(n) = \emptyset$. Abbiamo allora

$$n \in n \cup \{n\} = s(n) = \emptyset$$

contro la definizione di $\emptyset$.

C. Dimostriamo che l'insieme $A = \{n \in w \mid \Phi(n)\}$ è induttivo, da cui $w = A$, quindi $\forall n \in w\ \Phi(n)$.

1. Per ipotesi abbiamo $\Phi(\emptyset)$, quindi $\emptyset \in A$.
2. $n \in A \Rightarrow \Phi(n) \Rightarrow \Phi(s(n)) \Rightarrow s(n) \in A$.
   ($\Phi(n)$: per ipotesi; $\Phi(s(n))$: perché $n \in w \to s(n) \in w$)

A. Lemma 1: $\forall n \in w\ \bigcup n \subseteq n$

**Dim.** Per induzione (C.) con $\Phi(n) \overset{\text{def.}}{\equiv} \bigcup n \subseteq n$

$\Phi(\emptyset)$: $\bigcup \emptyset = \emptyset \subseteq \emptyset$

$\Phi(n) \to \Phi(s(n))$: $\bigcup(s(n)) = \bigcup(n \cup \{n\}) \overset{*}{=} (\bigcup n) \cup n \overset{\blacktriangle}{=} n \subseteq s(n)$

$$* \quad x \in \bigcup(n \cup \{n\}) \iff \exists y \; x \in y \wedge y \in n \cup \{n\}$$
$$\iff \exists y \; x \in y \wedge (y \in n \vee y = n)$$
$$\iff \exists y \; (x \in y \wedge y \in n) \vee (x \in y \wedge y = n)$$
$$\iff \exists y \; (x \in y \wedge y \in n) \vee \exists y \; (x \in y \wedge y = n)$$
$$\iff x \in \bigcup n \quad \vee \quad x \in n$$
$$\iff x \in (\bigcup n) \cup n$$

▲ Per ipotesi induttiva $\bigcup n \subseteq n$, quindi $(\bigcup n) \cup n \subseteq n \cup n = n$.

□ Lemma 1

Lemma 2: $\forall n \in \omega \quad \bigcup s(n) = n$

Dim. Come nel passo induttivo della dimostrazione precedente

$$\bigcup(s(n)) = \bigcup(n \cup \{n\}) = (\bigcup n) \cup n \overset{▲}{=} n$$

Dove in ▲ abbiamo $\bigcup n \subseteq n$, non per ipotesi induttiva, ma per il lemma 1.

□ Lemma 2.

Finalmente $s(m) = s(n) \Rightarrow m = \bigcup s(m) = \bigcup s(n) = n$. □

Conviene, adesso, sviluppare un po' di tecnologia per manipolare i numeri interi. Dopo, dimostreremo altresì che gli assiomi di Peano hanno un unico modello $(\mathbb{N}, 0, \mathrm{succ})$ a meno di isomorfismi.

Def. Dati $m, n \in \omega$, scriviamo $m < n \overset{\text{def.}}{\iff} m \in n$

Prop. La relazione $<$ è un ordine totale su $\omega$.

Per dimostrare questa proposizione, sono comodi alcuni lemmi.

Osservazione

1. $m \in n \to m \in s(n)$ Infatti $n \subseteq n \cup \{n\} = s(n)$

2. $m \in s(n) \to (m \in n \vee m = n)$ Infatti $m \in n \cup \{n\} = s(n)$

$\iff m \in n \vee m \in \{n\}$

$\iff m \in n \vee m = n$

Lemma $\forall a, b \in \omega \quad a \in b \to (s(a) \in b \vee s(a) = b)$

Dim Induzione su $b$

- caso $b = 0$: $a \in \emptyset \to \dots$ vera a vuoto, perché $a \in \emptyset$ è falsa.
- caso $b = s(n)$: l'ipotesi induttiva è $a \in n \to (s(a) \in n \vee s(a) = n)$

Dobbiamo dimostrare $a \in s(n) \to (s(a) \in s(n) \vee s(a) = s(n))$

$a \in s(n) \Rightarrow a \in n \cup \{n\} \Rightarrow a \in n \vee a = n$

Due casi: $a \in n \Rightarrow s(a) \in n \vee s(a) = n \Rightarrow s(a) \in s(n)$

$a = n \Rightarrow s(a) = s(n)$ ∎

Dim (della proposizione)

transitività: $a \in b \wedge b \in c \to a \in c$ Induzione su $c$

- caso $c = 0$: la premessa $b \in c$ è falsa, quindi l'implicazione è vera a vuoto.
- caso $c = s(n)$: assumiamo l'ipotesi induttiva $a \in b \wedge b \in n \to a \in n$

Sapendo $a \in b \wedge b \in s(n)$ vogliamo dedurre $a \in s(n)$

Due casi: $b = n \Rightarrow a \in b = n \Rightarrow a \in s(n)$ (oss 2., oss 1.)

$b \in n \Rightarrow a \in b \in n \Rightarrow a \in n$ (oss 1.)

irriflessività: $\neg\, a \in a$

Per induzione

- caso $a = 0$: $\neg\, \emptyset \in \emptyset$ per definizione di $\emptyset$
- caso $a = s(n)$: assumiamo l'ipotesi induttiva $\neg\, n \in n$

  Per assurdo supponiamo $s(n) \in s(n)$

  Due casi: (oss. 2) $s(n) = n \Rightarrow n \in n$ ↯

  (transitiv.) $s(n) \in n \Rightarrow n \in s(n) \in n \Rightarrow n \in n$ ↯

tricotomia: $a \in b \;\vee\; a = b \;\vee\; b \in a$

Per induzione su $a$

- caso $a = 0$: $\emptyset \in b \;\vee\; \underbrace{\emptyset = b}_{\text{impossibile}} \;\vee\; b \in \emptyset$

  Induzione secondaria su $b$

  - caso $b = 0$: $0 \in \emptyset \;\vee\; \emptyset = \emptyset$ ✓
  - caso $b = s(m)$: ipotesi induttiva $\emptyset \in m \;\vee\; \emptyset = m$

    Due casi: $\emptyset \in m \overset{\text{oss. 1}}{\Rightarrow} \emptyset \in s(m) \Rightarrow \emptyset \in b$

    $\emptyset = m \Rightarrow \emptyset \in \{\emptyset\} = s(m)$
- caso $a = s(n)$: L'ipotesi induttiva è $n \in b \;\vee\; n = b \;\vee\; b \in n$

  Tre casi: $n \in b \overset{\text{lemma}}{\Rightarrow} \underbrace{s(n) \in b}_{a \in b} \;\vee\; \underbrace{s(n) = b}_{a = b}$

  $\left.\begin{matrix} n = b \\ b \in n \end{matrix}\right\} \overset{\text{oss. 1}}{\Rightarrow} b \in s(n) \Rightarrow b \in a$

∎

Con: "Un numero naturale è l'insieme dei numeri naturali minori di lui" $\quad \forall m \in \omega \quad m = \{n \in \omega \mid n < m\}$

Dim Vogliamo dire che $m = \{n \in w \mid n \in m\}$, ossia che $m \subseteq w$.

Per induzione. $\emptyset \subseteq w$. $m \in w \Rightarrow S(m) = m \cup \{m\} \in m$

$\subseteq w$ in quanto $m \in w$ ∎

Cor $\forall m, n \in w \quad m \leq n \longleftrightarrow m \subseteq n$

Dim Siccome $w$ è totalmente ordinato, si danno due casi:

$m \leq n \Rightarrow \forall x \in w \; x < m \to x < n \Rightarrow \forall x \in w \; x \in m \to x \in n \Rightarrow m \subseteq n$

$n < m \Rightarrow n \in m$ tuttavia $n \notin n$ quindi $m \not\subseteq n$ ∎

## Seconda forma dell'induzione, principio del minimo

Teo (principio di induzione — forma forte)

Data una formula insiemistica $\Phi(x)$, vale

$$\left(\forall n \in w \; \left(\forall x < n \; \Phi(x)\right) \to \Phi(n)\right) \longrightarrow \forall n \in w \; \Phi(n)$$

"Se, assumendo $\Phi(x)$ per tutti gli $x < n$, ho $\Phi(n)$. Allora $\Phi(n)$ è vera per tutti i numeri $n$"

Oss Chiamiamo questa forma "forte" perché permette di assumere un'ipotesi induttiva più forte dell'induzione di Peano. In quella, infatti, si deve dedurre $\Phi(n)$ a partire da $\Phi$ del numero precedente. Qui, invece, possiamo far conto di sapere $\Phi$, non solo per il precedente, ma per tutti i numeri minori di $n$.

Dim Assumiamo l'antecedente

$$\forall n \in w \; \left(\forall x < n \; \Phi(x)\right) \to \Phi(n) \qquad (*)$$

Inizialmente, dimostriamo per induzione $\forall m \in \omega\ \Psi(m)$ dove

$$\Psi(m) \overset{\text{def}}{\equiv} \forall x < m\ \Phi(x)$$

- caso $m = 0$. $\forall x < \emptyset\ \Phi(x)$ è vera a vuoto.
- caso $m = S(n)$. Per ipotesi induttiva $\forall x < n\ \Phi(x)$.

  Se $x < m = S(n)$, sappiamo già che $x < n \vee x = n$.

  - Nel caso $x < n$, abbiamo $\Phi(x)$ per ipotesi induttiva.
  - Nel caso $x = n$, l'ipotesi induttiva, combinata con $(*)$ ci dà $\Phi(n)$ ossia $\Phi(x)$.

  Per l'arbitrarietà di $x < m$ abbiamo dimostrato $\forall x < m\ \Phi(x)$

Ora sappiamo $\forall m \in \omega\ \forall x < m\ \Phi(x)$. Dato un $n \in \omega$ qualunque, considerando $m = n+1$ e $x = n$ otteniamo $\Phi(n)$. ∎

Teo (Principio del minimo)
Sia $A \subseteq \omega$. Se $A \neq \emptyset$ allora esiste $n \in A$ tale che $\forall x \in A\ n \leq x$.
"Ogni sottoinsieme non vuoto di $\omega$ ha un minimo elemento"

Dim (idea) Si dimostra per induzione forte che, se $n \in A$, allora $A$ ha un minimo. Poi, siccome $A$ non è vuoto, deve esserci qualche $n \in A$, quindi $A$ ha minimo. L'induzione funziona così. Se $n \in A$, si danno due casi. O esiste $x < n$ con $x \in A$, e allora $A$ ha minimo per ipotesi induttiva, oppure $\forall x < n\ x \notin A$, ma allora $n$ è il minimo di $A$.

Dim. Considerando la contronominale, dobbiamo dimostrare che se $A$ non ha un minimo elemento, allora $A$ è vuoto. Assumiamo quindi $\forall n \in A\ \exists x \in A\ x < n$, dobbiamo dimostrare che $\forall n \in \omega\ n \notin A$. Procediamo per induzione, forma forte. Ci serve dire che $(\forall x < n\ \ x \notin A) \to n \notin A$. Questa, però, è immediata, perché equivale a

$$(\neg \exists x < n\ \ x \in A) \to n \notin A$$
$$\Leftrightarrow\ (\neg \exists x\ \ x < n \wedge x \in A) \to n \notin A$$
$$\Leftrightarrow\ (\neg \exists x \in A\ \ x < n) \to n \notin A$$
$$\Leftrightarrow\ n \in A \to \exists x \in A\ x < n$$

che è appunto l'assunto. ∎

Def. Un insieme totalmente ordinato $(S, <)$ si dice **bene ordinato** se ogni suo sottoinsieme non vuoto ha un minimo.

$$\forall A \subseteq S\ \ A \neq \emptyset \to \exists m \in A\ \forall x \in A\ m \leq x$$

La nozione di buon ordine è stata introdotta da Cantor agli albori della teoria degli insiemi, e giocherà un ruolo centrale in questo corso.

Esempio $(\omega, <)$ è un insieme bene ordinato.

Esercizio Dimostra che $X = S(S(S(\omega)))$ è bene ordinato dalla relazione $a < b \overset{\text{def.}}{\equiv} a \in b$.