Ricorsione numerabile

La ricorsione è il procedimento per cui si costruisce una funzione $f: W \to$ quello che sia definendo $f(s(n))$ a partire da $f(n)$, o, più in generale da $f(\emptyset) \dots f(n)$. Questo è un procedimento fondamentale: potremmo dire che è il modo di precisare gli infidi puntini (...). Per esempio

Def. (operazioni aritmetiche)

$$\begin{cases} a + 0 = a \\ a + s(b) = s(a+b) \end{cases} \qquad \begin{cases} a \cdot 0 = 0 \\ a \cdot s(b) = a \cdot b + a \end{cases}$$

Anziché $a+b = \underbrace{s(s(\dots a \dots))}_{b \text{ successori}}$ Anziché $a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ volte}}$

Def. (potenza, fattoriale)

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{s(b)} = a^b \cdot a \end{cases} \qquad \begin{cases} 0! = 1 \\ s(a)! = a! \cdot s(a) \end{cases}$$

Anziché $a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ volte}}$ Anziché $a! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (a-1) \cdot a$

Def. (sommatoria)

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{0} f(i) = 0 \\ \sum_{i=0}^{s(a)} f(i) = \left(\sum_{i=0}^{a} f(i) \right) + f(s(a)) \end{cases}$$

Anziché $\sum_{i=0}^{a} f(i) = f(0) + f(1) + \dots + f(a)$

Altre successioni — ossia funzioni con dominio ω — sono definite nella maniera più naturale proprio per ricorsione.

Esempio In quanti modi posso coprire una sequenza di n caselle  con tessere di una o due caselle che non si sovrappongono e non lasciano caselle scoperte?

Sol. Detto F_n il numero di ricoprimenti di una sequenza lunga n, vediamo che la tessera più a sinistra può essere o . Nel primo caso, ci sono F_{n-1} modi di completare il ricoprimento, nel secondo caso F_{n-2}. Quindi

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

La sequenza risulta completamente determinata, per ricorsione, osservando che $F_0 = F_1 = 1$: sono i numeri di Fibonacci.

In un certo senso, induzione e ricorsione sono due facce della stessa medaglia: dove l'induzione dimostra $\Phi(S(n))$ assumendo di sapere $\Phi(n)$, la ricorsione calcola $f(S(n))$ assumendo di sapere $f(n)$. Lo stesso parallelismo, vedremo, si presenterà per l'induzione e la ricorsione transfinita. Tornando al numerabile: come abbiamo enunciato due forme dell'induzione, enunceremo due forme parallele della ricorsione.

La semplice osservazione che segue dice che due funzioni sono uguali precisamente quando assumono gli stessi valori.

Oss. (estensionalità per funzioni)

Dato $f, g : A \to B$ $\quad f = g \iff \forall x \in A \; f(x) = g(x)$

Dim. $(x,y) \in f \iff y = f(x) \iff y = g(x) \iff (x,y) \in g$.

Notazione Indichiamo con ${}^A B$ l'insieme delle funzioni da A a B, che esiste per separazione in $\mathcal{P}(A \times B)$.

Teo (di ricorsione numerabile — prima forma)

Dato un insieme A, un elemento $k \in A$ e una funzione

$$h : \omega \times A \to A$$

esiste un'unica funzione $f : \omega \to A$ tale che

$$\forall n \in \omega \quad f(s(n)) = h(n, f(n))$$

Esempio Per definire a^b considero $k = 1$, $h(n,x) = a \cdot x$

Per definire il fattoriale $k = 1$, $h(n,x) = s(n) \cdot x$

Esercizio Come potrei costruire F_n usando questo teorema?

Dim. Il piano consiste nel trovare una formula $\Phi(x,y)$ che dice "$y = f(x)$" — questa è la vera difficoltà della dimostrazione — poi semplicemente otteniamo f per separazione nell'insieme $\omega \times A$ usando la formula Φ.

Per dire "$y = f(x)$" diremo "i primi x passaggi della ricorsione, partendo da k, conducono a y".

Dato $x \in \omega$ diciamo che g è una x-approssimazione

se vale la formula seguente.

$$g \in {}^{s(x)}A \wedge g(\emptyset) = k \wedge \forall n \in x \;\; g(s(n)) = h(n, g(n))$$

che dice che $g : \{0 \dots x\} \to A$ soddisfa la definizione ricorsiva di f, ristretta, naturalmente, al dominio $\{0 \dots x\}$.
Il vantaggio di tagliuzzare f in x-approssimazioni è che così ottenuamo un parametro, x, su cui impostare un'induzione.

Lemma $\forall x \in \omega \; \exists! g$ "g è una x-approssimazione"

Dim Induzione su x

caso $x = \emptyset$. Basta osservare che l'unica $\emptyset$-approssimazione è $\{(\emptyset, k)\}$. Infatti il dominio è $\{\emptyset\}$ per definizione, e abbiamo la condizione $g(\emptyset) = k$.

caso $x = s(a)$. Per ipotesi induttiva esiste un'unica a-approssimazione g. Poniamo $g' = g \cup \{(s(a), h(a, g(a)))\}$ ossia $g'(t) = g(t)$ per $t \leq a$, e $g'(s(a)) = h(a, g(a))$.
È immediato verificare che g' è una $s(a)$-approssimazione. Per verificare l'unicità, osserviamo che, date $s(a)$-approssimazioni g' e g'', la loro restrizione a $s(a)$ è una a-approssimazione, quindi, per ipotesi induttiva $g'|_{s(a)} = g = g''|_{s(a)}$. D'altro canto il dominio di una $s(a)$-approssimazione è $s(s(a)) = s(a) \cup \{s(a)\}$, abbiamo detto che g' e g'' coincidono su $s(a)$, e

$$g'(s(a)) = h(a, g'(a)) = h(a, g''(a)) = g''(s(a))$$

Stabilito il lemma, introduciamo la formula Φ

$$\Phi(x,y) \overset{\text{def.}}{\equiv} \exists g \in {}^{s(x)}A \ \text{"}g \text{ è una } x\text{-approssimazione"} \wedge g(x) = y$$

Per l'unicità della x-approssimazione $\forall x \in \omega \ \exists! y \ \Phi(x,y)$

possiamo quindi definire, per ogni $x \in \omega$ e $y \in A$

$$f(x) = y \overset{\text{def.}}{\equiv} \Phi(x,y)$$

$$\text{formalmente} \quad f = \{(x,y) \in \omega \times A \mid \Phi(x,y)\}$$

Occorre verificare che f soddisfa le condizioni della ricorsione.

$f(\emptyset) = k$. Immediata.

$f(s(n)) = \dots$ Per costruzione $f(s(n)) = g(s(n))$ per una $s(n)$-approssimazione g. D'altra canto $g(s(n)) = h(n, g(n))$.

Ora $g|_{s(n)}$ è una n-approssimazione, quindi

$g(n) = g|_{s(n)}(n) = f(n)$. Mettendo tutto insieme

$$f(s(n)) = g(s(n)) = h(n, g(n)) = h(n, f(n))$$

L'unicità di f segue facilmente per induzione. Dati f' e f'' che soddisfano la ricorsione abbiamo

$f'(\emptyset) = k = f''(\emptyset)$ $\qquad$ $f'(s(n)) = h(n, f'(n)) = h(n, f''(n)) = f''(s(n))$

($= f''(n)$ per ip. induttiva)

$\square$

Procedendo come negli esempi all'inizio di questa sezione, il teorema di ricorsione numerabile ci consente di costruire le operazioni aritmetiche, la potenza &c. A titolo di esempio, vediamo la nel dettaglio il caso della somma.

Esempio (costruzione di $+ : \omega \times \omega \to \omega$)

Vogliamo formalizzare la definizione

$$\begin{cases} a + 0 = a \\ a + s(b) = s(a+b) \end{cases}$$

Per il teorema di ricorsione sappiamo che, per ogni $a \in \omega$ fissato, esiste un'unica $f : \omega \to \omega$ tale che

$$f(0) = a \;\wedge\; \forall b \in \omega \; f(s(b)) = s(f(b))$$

Scriviamo quindi

$$a + x = y \overset{\text{def.}}{\equiv} \exists f \in {}^{\omega}\omega \; f(0) = a \wedge f(x) = y \wedge \forall b \in \omega \; f(s(b)) = s(f(b))$$

L'applicazione che segue chiude il conto che abbiamo lasciato aperto con gli assiomi di Peano. Dimostriamo che essi identificano un'unica struttura a meno di isomorfismi, quindi ω è, a buon diritto, l'insieme dei numeri naturali.

Teo Supponiamo che $(\mathbb{N}, 0, succ)$ soddisfi gli assiomi di Peano, allora $(\mathbb{N}, 0, succ)$ e $(\omega, \emptyset, s)$ sono strutture isomorfe — ossia, formalmente, esiste $f : \omega \to \mathbb{N}$ biiettiva tale che $f(\emptyset) = 0$ e $\forall n \in \omega \; f(s(n)) = succ(f(n))$.

Fa comodo isolare la seguente osservazione.

Oss $\forall x \in \omega \; x \neq 0 \to \exists y \in \omega \; x = s(y)$

Dim. Induzione su x. Il caso $x = 0$ è vero a vuoto. Nel caso $x = s(n)$ basta prendere $y = n$ e si ha $x = s(y)$. Ü

Dimostriamo ora il teorema.

Dim Per il teorema di ricorsione c'è un'unica f che soddisfa le condizioni $f(\emptyset) = 0$ e $\forall n \in \omega \; f(s(n)) = succ(f(n))$.
Resta da constatare che f è bigettiva.

Surgettività: Per ipotesi $(\mathbb{N}, 0, succ)$ soddisfa il principio di induzione. Dimostriamo quindi per induzione in $(\mathbb{N}, 0, succ)$ che $\forall y \in \mathbb{N} \; \exists x \in \omega \; f(x) = y$.

caso $y = 0$. Basta osservare che $f(\emptyset) = 0$ per costruzione.

caso $y = succ(n)$. Per ipotesi induttiva c'è $x \in \omega$ tale che $f(x) = n$.
Quindi $f(s(x)) = succ(n)$.

Iniettività: Consideriamo, per assurdo, il minimo $x \in \omega$ tale che, per qualche $y \in \omega$ con $y \neq x$, $f(x) = f(y)$.
Osserviamo che, per la minimalità di x, $x < y$, quindi, in particolare $y \neq \emptyset$, e possiamo scrivere $y = s(y')$.
Se $x = \emptyset$, allora $succ(f(y')) = f(s(y')) = f(y) = f(x) = 0$, contraddicendo l'assioma B. per $(\mathbb{N}, 0, succ)$.
Se $x \neq \emptyset$, allora possiamo scrivere $x = s(x')$, da cui

$$succ(f(x')) = f(s(x')) = f(x) = f(y) = f(s(y')) = succ(f(y'))$$

e, per l'assioma A. in $(\mathbb{N}, 0, succ)$, $f(x') = f(y')$. Allora, per la minimalità di x, siccome $x' < x$, dobbiamo avere $x' = y'$.
Ma da questo seguirebbe $x = s(x') = s(y') = y$ ↯ ∎

Se, infine, volgiamo la nostra attenzione all'esempio dei numeri di Fibonacci, vediamo che non è possibile definire questa sequenza applicando il teorema di ricorsione in maniera diretta, poiché F_n non dipende solo dal termine precedente della sequenza, F_{n-1}, ma anche da F_{n-2}. Ce la si potrebbe cavare con un trucco, per esempio definendo la funzione $n \longmapsto (F_n, F_{n+1})$ da ω a $\omega \times \omega$. È comodo, però, disporre di una versione più versatile del teorema.

Teo (di ricorsione numerabile — seconda forma)
Dato un insieme A, denotiamo con A^* l'insieme delle funzioni $g \subseteq \omega \times A$ con $Dom(g) \in \omega$. Sia $h: A^* \to A$, allora esiste un'unica funzione $f: \omega \to A$ tale che

$$\forall n \in \omega \quad f(n) = h(f|_n)$$

In altre parole, $f(n)$ può dipendere in maniera arbitraria dai valori assunti da f sui numeri minori di n.

Esempio di applicazione
Per costruire la successione di Fibonacci, definiamo $h(g)$ in questo modo. Sia $n = Dom(g)$. Se $n = \emptyset$ o $n = 1$, allora $h(g) = 1$. Altrimenti esistono $n-1, n-2 \in \omega$ tali che $s(n-1) = s(s(n-2)) = n$. Definiamo quindi $h(g) = g(n-1) + g(n-2)$.

Rem — L'idea è definire, mediante la prima forma del teorema di ricorsione, la successione delle troncate di f. Ossia la funzione $f' : n \longmapsto f|_n$. — Un modo alternativo, sarebbe ripetere la dimostrazione della prima forma.

Costruiamo per ricorsione — prima forma — la funzione $f' : \omega \to A^*$ tale che: $f'(\emptyset) = \emptyset$

$$f'(s(n)) = f'(n) \cup \{(n, h(f'(n)))\}$$

Ora poniamo $f(n) = f'(s(n))(n)$.

Verifichiamo per induzione che $\forall n \in \omega \; f|_n = f'(n)$

caso $n = 0$. Immediato

caso $n = s(m)$. $f|_{s(m)} = f|_m \cup \{(m, f(m))\}$

$$= f'(m) \cup \{(m, f'(s(m))(m))\}$$

$$= f'(n) \cup \{(m, h(f'(m))\} = f'(s(m)).$$

Infine, quindi, $f(n) = f'(s(n))(n) = h(f'(n)) = h(f|_n)$. ∎

Abbiamo ora terminato di dimostrare le proprietà di base dei numeri naturali. Da qui prende le mosse il corso di aritmetica. Nella prossima sezione, inizieremo lo studio di un concetto squisitamente insiemistico: la cardinalità.

Esercizio: dimostra commutatività, associatività &c. di $+$ e $\cdot$.

Cardinalità

Il concetto di cardinalità è, forse, il modo più semplice di contare gli elementi di un insieme: diciamo che due insiemi hanno un uguale numero di elementi se esiste una corrispondenza biunivoca fra di essi.

Def Dati due insiemi A e B

$|A| = |B|$ $\overset{\text{def.}}{\equiv}$ $\exists f \in {}^{A}B$ "f è bigettiva $A \to B$"

"A ha la stessa cardinalità di B"

"A e B sono equipotenti"

$|A| \leq |B|$ $\overset{\text{def.}}{\equiv}$ $\exists B' \subseteq B \quad |A| = |B'|$

ossia: $\exists f \in {}^{A}B$ "f è iniettiva"

Note:

- La scrittura $|A| = |B|$ suggerisce che esistano insiemi — o oggetti di qualche genere — denotati $|A|$ e $|B|$ di cui si predica l'uguaglianza. Effettivamente costruiremo questi oggetti, ma, per ora, la scrittura $|A| = |B|$ è inscindibile, come (A, B).
- Potrebbe sorgere il sospetto che se $|A| < |B|$ quando $A \subsetneq B$, ma non è così, come mostra l'esempio di $A = \{x \in \omega \mid x > 0\}$ e $B = \omega$.

Oss. La relazione $|\cdot| = |\cdot|$ soddisfa le proprietà formali di una relazione di equivalenza.

riflessività: $|A| = |A|$

simmetria: $|A| = |B| \to |B| = |A|$

transitività: $|A| = |B| \wedge |B| = |C| \to |A| = |C|$

Dim Esercizio

Oss. La relazione $|\cdot| \leq |\cdot|$ è:

riflessiva: $|A| \leq |A|$

transitiva: $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C| \to |A| \leq |C|$

Inoltre è compatibile con la relazione di equipotenza

$$|A| = |B| \to |A| \leq |B|$$

Dim Esercizio

Per stabilire che le cardinalità sono, formalmente, ordinate dalla relazione $|\cdot| \leq |\cdot|$, ci manca l'antisimmetria, che è appunto l'enunciato del teorema seguente.

Teo (Cantor - Bernstein)

$$\forall A, B \ (|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A|) \to |A| = |B|$$

Ossia: se c'è una funzione iniettiva $A \to B$ e una funzione iniettiva $B \to A$, allora esiste una biiezione fra A e B.