Oss. La relazione $|\cdot| = |\cdot|$ soddisfa le proprietà formali di una relazione di equivalenza.

riflessività: $|A| = |A|$

simmetria: $|A| = |B| \to |B| = |A|$

transitività: $|A| = |B| \wedge |B| = |C| \to |A| = |C|$

Dim Esercizio

Oss. La relazione $|\cdot| \leq |\cdot|$ è:

riflessiva: $|A| \leq |A|$

transitiva: $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C| \to |A| \leq |C|$

Inoltre è compatibile con la relazione di equipotenza

$$|A| = |B| \to |A| \leq |B|$$

Dim Esercizio

Per stabilire che le cardinalità sono, formalmente, ordinate dalla relazione $|\cdot| \leq |\cdot|$, ci manca l'antisimmetria, che è appunto l'enunciato del teorema seguente.

Teo (Cantor - Bernstein)

$$\forall A, B \ (|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A|) \to |A| = |B|$$

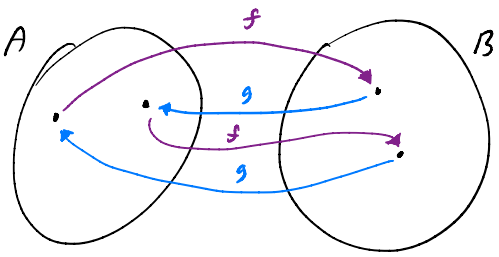
Ossia: se c'è una funzione iniettiva $A \to B$ e una funzione iniettiva $B \to A$, allora esiste una biiezione fra $A$ e $B$.

**Dim.** Siano $f: A \to B$ e $g: B \to A$ iniettive. Il nostro obiettivo è costruire una nuova funzione $h: A \to B$ biiettiva. L'idea è che ogni elemento, poniamo, di $A$, è una tappa di un percorso: $a \xrightarrow{f} f(a) \xrightarrow{g} g(f(a)) \xrightarrow{f} f(g(f(a))) \xrightarrow{g} \dots$

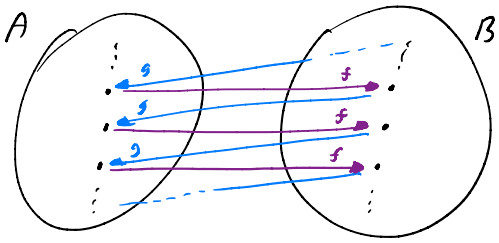
Siccome $f$ e $g$ sono iniettive, questo percorso ha all'indietro un'unica estensione all'indietro

$$f^{-1}(g^{-1}(a)) \xrightarrow{f} g^{-1}(a) \xrightarrow{g} a \xrightarrow{f} f(a) \xrightarrow{g} g(f(a)) \xrightarrow{f} f(g(f(a))) \xrightarrow{g} \dots$$

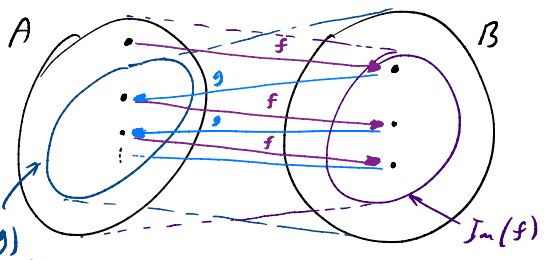
a patto che $a \in \mathrm{Im}(g)$, $g^{-1}(a) \in \mathrm{Im}(f)$, etc. Quando, e se, non possiamo più applicare la funzione inversa, il percorso si interrompe. Ci sono quindi percorsi di tre tipi:

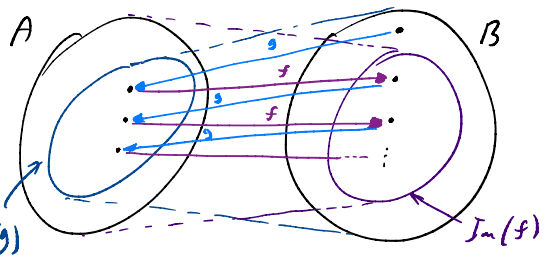



CIRCOLARI




ILLIMITATI IN AVANTI O INDIETRO

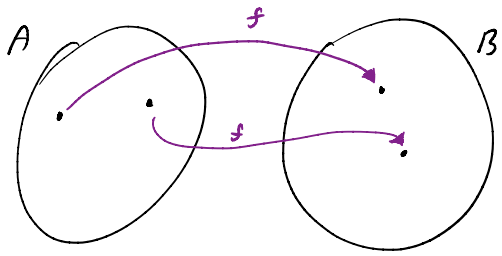


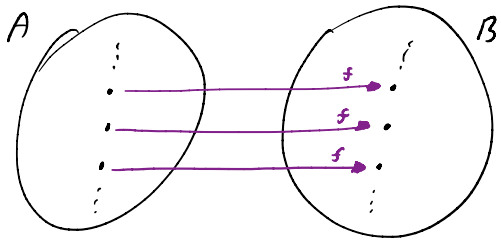

ILLIMITATI IN AVANTI MA NON INDIETRO

Per gli elementi che si trovano su un percorso circolare, o su un percorso illimitato avanti e indietro, $f$ fornisce una bigezione, come la fornirebbe anche $g^{-1}$ — la scelta è arbitraria a patto di

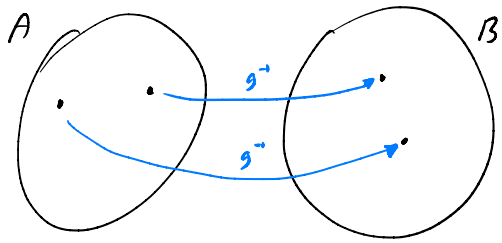
usare la medesima funzione per l'intero percorso.

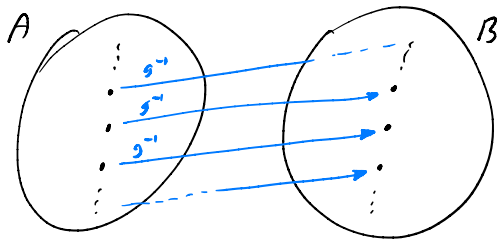



o anche

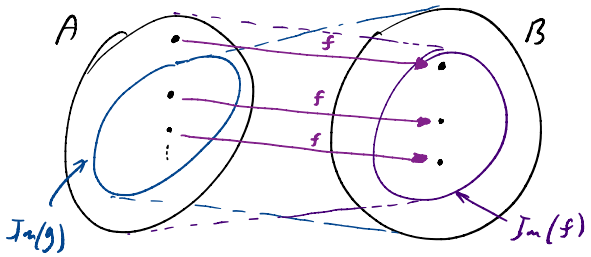


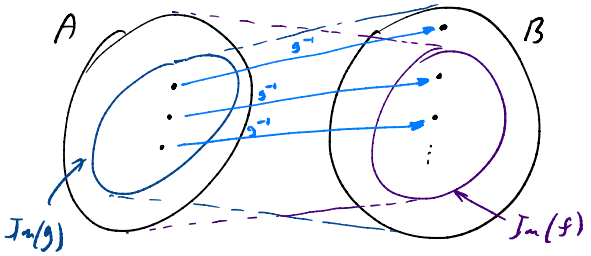

o anche




Per i percorsi, invece, illimitati solo a destra, occorre vedere in quale insieme sta l'elemento iniziale del percorso: se questo è in $A$, la biiezione è data da $f$, altrimenti da $g^{-1}$.




Per comodità, poniamo $h(x) = f(x)$ in ogni caso eccetto quando $x$ è lungo un percorso che parte da $B$, nel cui caso $h(x) = g^{-1}(x)$.

Formalmente, definiamo per ricorsione le seguenti successioni di sottoinsiemi di $B$ e $A$ rispettivamente — ossia, tecnicamente, la funzione $\omega \to \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(A)$, $i \mapsto (B_i, A_i)$

$$B_0 = B \setminus \mathrm{Im}(f) \qquad A_i = g[B_i] \qquad B_{s(i)} = f[A_i]$$

Definiamo quindi

$$B_* = \bigcup_{i\in\omega} B_i \overset{def.}{\equiv} \bigcup \{B_i \mid i\in\omega\} \qquad A_* = \bigcup_{i\in\omega} A_i$$

Questi sono i punti che appartengono a cammini che partono da $B$, definiamo quindi $h: A \to B$ e $k: B \to A$ come segue

$$h(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{se } x \in A_* \\ f(x) & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad k(y) = \begin{cases} g(y) & \text{se } y \in B_* \\ f^{-1}(y) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ci basta dimostrare che $h$ e $k$ sono ben definite, $k \circ h = Id_A$ e $h \circ k = Id_B$.

① $h$ e $k$ sono ben definite.

Occorre verificare che stiamo applicando $g^{-1}$ e $f^{-1}$ a elementi della immagine di $g$ e $f$ rispettivamente. Nella definizione di $h$, se $x \in A_*$, allora $x \in A_i$ per qualche $i\in\omega$, quindi $x \in g[B_i] \subseteq Im(g)$. Nella definizione di $k$, se $y \notin B_*$, in particolare, $y \notin B_0$, per cui $y \in Im(f)$.

② $k \circ h = Id_A$

Se $x \in A_*$, allora $x \in A_i$ per qualche $i\in\omega$, quindi $x = g(y)$ con $y \in B_i$, per cui $k(h(x)) = k(g^{-1}(x)) = k(y) = g(y) = x$.

Per il caso $x \notin A_*$, osserviamo, intanto, che $x \notin A_* \to f(x) \notin B_*$. Infatti, se $f(x) \in B_i$ con $i\in\omega$, allora $i \neq 0$, perché $B_0 = B \setminus Im(f)$, quindi possiamo scrivere $i = s(\sigma)$, e $f(x) \in B_{s(\sigma)} = f[A_\sigma]$. Per l'iniettività di $f$, abbiamo allora $x \in A_\sigma$ ↯.

Di conseguenza, se $x \in A_*$, $k(h(x)) = k(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.

(3) $h \circ k = Id_{B_*}$

Se $y \in B_*$, allora $y \in B_i$ per qualche $i \in \omega$, quindi $g(y) \in A_i$.

Di conseguenza $h(k(y)) = h(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y$.

Altrimenti $y \notin B_*$ e, se $f^{-1}(y) \in A_*$, avremmo una contraddizione, poiché $f^{-1}(y) \in A_i \to y = f(f^{-1}(y)) \in A_{s(i)}$. Quindi

$h(k(y)) = h(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y)) = y$. ∎

Visto che $|\cdot| \leq |\cdot|$ ha le proprietà formali di una relazione d'ordine fra le classi di equivalenza della relazione $|\cdot| = |\cdot|$, possiamo definire il corrispondente ordine stretto.

**Def** Dati due insiemi $A$ e $B$

$$|A| < |B| \overset{def.}{\equiv} |A| \leq |B| \wedge \underbrace{|A| \neq |B|}_{\overset{def.}{\equiv} \neg(|A| = |B|)}$$

**Teo (Cantor)**
Dato un insieme qualunque $A$, vale $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

La dimostrazione di questo enunciato è, ancora una volta, il medesimo argomento del paradosso di Russell.

**Dim** La disuguaglianza $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$ è facile: basta considerare la funzione iniettiva $A \to \mathcal{P}(A)$, $x \longmapsto \{x\}$.

Consideriamo, ora, una qualunque $f: A \to \mathcal{P}(A)$ iniettiva.

Dobbiamo dimostrare che $\mathrm{Im}(f) \subsetneq \mathcal{P}(A)$. Consideriamo

$$B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$$

Supponendo, per assurdo, $B = f(a)$, avremmo

$$a \in f(a) \iff a \in B \iff a \notin f(a)$$ ↯ □

## Operazioni fra cardinalità

**Def.** $|A| + |B| \overset{\text{def}}{\equiv} |A \sqcup B| \overset{\text{def}}{\equiv} |A \times \{0\} \cup B \times \{1\}|$

$|A| \cdot |B| \overset{\text{def.}}{\equiv} |A \times B|$ $\quad |A|^{|B|} \overset{\text{def.}}{\equiv} |{}^B A|$

**Prop:** Le operazioni di somma, prodotto e potenza fra cardinalità sono ben definite, ossia dati $A, B, A', B'$ con $|A| = |A'|$ e $|B| = |B'|$, vale:

$|A| + |B| = |A'| + |B'|$ $\quad |A| \cdot |B| = |A'| \cdot |B'|$ $\quad |A|^{|B|} = |A'|^{|B'|}$

*Dim* Date $f: A \to A'$ e $g: B \to B'$ biiettive, è immediato verificare che le seguenti sono biezioni:

$A \cup B \to A' \cup B'$ $\quad A \times B \to A' \times B'$ $\quad {}^B A \to {}^{B'} A'$

$(a, 0) \mapsto (f(a), 0)$ $\quad (a, b) \mapsto (f(a), g(b))$ $\quad b \mapsto f \circ b \circ g^{-1}$

$(b, 1) \mapsto (g(b), 1)$ □

*Notazione* Riferendoci alle cardinalità finite $|\emptyset|, |1|, |2|, \ldots$ se non c'è rischio di confusione, scriveremo semplicemente $0, 1, 2, \ldots$

*Oss.* $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$, per cui il teorema di Cantor può essere enunciato dicendo che, dato qualunque $A$, $|A| < 2^{|A|}$.

*Dim* La funzione che ad ogni $B \in \mathcal{P}(A)$ associa la sua funzione indicatrice $\chi_B : A \to 2$ definita da

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una biiezione $\mathcal{P}(A) \to {}^A2$.

*Prop.* Le operazioni fra cardinalità godono delle proprietà seguenti: denotando, per brevità, con $\alpha, \beta, \gamma$ i simboli: $|A|, |B|, |C|$

$$\alpha + 0 = \alpha \qquad \alpha + \beta = \beta + \alpha \qquad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

$$\alpha \cdot 0 = 0 \qquad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \qquad \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$

$$\alpha \cdot 1 = \alpha \qquad \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

$$\alpha^0 = 1 \qquad (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\gamma \cdot \beta} \qquad (\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$$

$$\alpha^1 = \alpha \qquad \alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$$

$$1^\alpha = 1$$

*Dim* In ciascun caso, si tratta semplicemente di esibire una biiezione esplicita fra il membro di sinistra e il membro di destra. Come esempio, vediamo uno dei casi più complicati, il resto è lasciato come esercizio.

Dimostriamo che $(|A|^{|B|})^{|C|} = |A|^{|C| \cdot |B|}$. Dobbiamo esibire una biiezione fra l'insieme ${}^C({}^BA)$ delle funzioni che ad ogni elemento di $C$ associano una funzione $B \to A$, e l'insieme ${}^{C \times B}A$ delle funzioni che ad ogni coppia di elementi in $C \times B$ associano un elemento di $A$.

A $f \in {}^C({}^B A)$ associamo $\tilde{f} \in {}^{C\times B}A$ definita da

$$\tilde{f}(c,b) = f(c)(b)$$

Dimostriamo che l'inversa di questa applicazione associa a $g \in {}^{C\times B}A$ la funzione $\overline{g} \in {}^C({}^B A)$ definita da

$$\overline{g}(c) : B \to A$$
$$b \mapsto g(c,b)$$

La verifica è facilissima:

$\forall (c,b) \in C\times B \quad \tilde{\overline{g}}(c,b) = \overline{g}(c)(b) = g(c,b) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\overline{g}} = g$

e, fissato un qualunque $c \in C$

$\forall b \in B \quad \overline{\tilde{f}}(c)(b) = \tilde{f}(c,b) = f(c)(b) \quad \Rightarrow \quad \overline{\tilde{f}}(c) = f(c)$

da cui, per l'arbitrarietà di $c$, $\overline{\tilde{f}} = f$. ∎

## Cardinalità finite

Ora inizia una breve carrellata fra le cardinalità più facili da definire. Parliamo qui di cardinalità finite, poi introdurremo la cardinalità numerabile e la cardinalità del continuo.

**Def** Diciamo che $A$ è *finito* se $\exists n \in \omega \quad |A| = |n|$.
Se $A$ non è finito, diciamo che $A$ è *infinito*.

Storicamente, è rilevante una definizione alternativa di finitezza, data originariamente da Dedekind.

**Def** $A$ è *Dedekind-finito* se non può essere messo in

corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

Ossia $A$ è Dedekind-finito se $\forall B \subsetneq A \quad |B| < |A|$.

Con gli assiomi introdotti fino ad ora, possiamo solo dimostrare che finito → Dedekind-finito, mentre l'implicazione inversa è conseguenza dell'assioma della scelta.

Prop. (principio dei cassetti — ossia — finito → Dedekind-finito)
Dato $A$ finito e $B \subsetneq A$, vale $|B| < |A|$.

Dim $|B| \leq$ vale ovviamente perché l'identità è una funzione iniettiva $B \to A$. Occorre quindi dimostrare $|B| \neq |A|$.

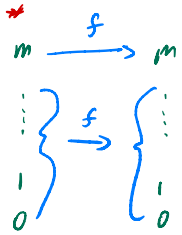
Osserviamo che, senza perdita di generalità, possiamo assumere $A = n \in \omega$. Per ipotesi, infatti esiste $f : A \to n$ biiettiva, per un opportuno new. Quindi $f[B] \subsetneq n$. D'altro canto, per l'iniettività di $f$, $|f[B]| = |B| = |A| = n$.

Ci basta quindi dimostrare, per induzione su $n$, che

$$\forall n \in \omega \quad \forall B \subseteq n \quad |B| = |n| \to B = n.$$

Caso $n = \emptyset$. Necessariamente anche $B = \emptyset$, quindi $B = n$.

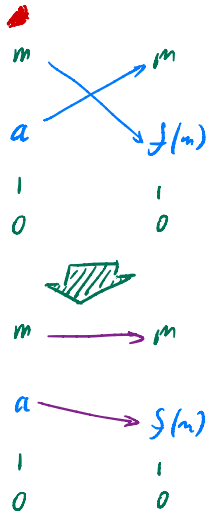
Caso $n = s(m)$ L'ipotesi induttiva è $\forall C \subseteq m \quad |C| = |m| \to C = m$




Prendiamo $f : s(m) \to B$ biiettiva. Si danno due casi. Se $f(m) = m$, allora $C \overset{\text{def.}}{=} \mathrm{Im}(f_{|m}) \subseteq m$, e, per l'iniettività di $f$, $|C| = |m|$, quindi, per

l'ipotesi induttiva, $C = m$. Ma $B = Im(f) =$

$= C \cup \{f(m)\} = m \cup \{m\} = n$.




Se $f(m) \neq m$, allora vediamo che esiste $a < m$ tale che $f(a) = m$. Se così non fosse, infatti, $f_{|m}$ sarebbe una biiezione fra $m$ e $m \setminus \{f(m)\}$, contro l'ipotesi induttiva. Ora, però, possiamo costruire una nuova biiezione $f' : s(m) \to B$ che ricade nel caso precedente:

$$f'(x) = \begin{cases} m & \text{se } x = m \\ f(m) & \text{se } x = a \\ f(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$