questo siano vere e proprie inclusioni

$$\omega \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

In realtà non è vero: per esempio è $\iota[\mathbb{Q}]$, non $\mathbb{Q}$, ad essere sottoinsieme di $\mathbb{R}$, ma $\iota[\mathbb{Q}]$ è in corrispondenza biunivoca, in maniera canonica, tramite appunto ι, con $\mathbb{Q}$, e questa corrispondenza preserva tutta la struttura rilevante — l'ordine, come abbiamo verificato, ma anche le operazioni di campo.

Con $\aleph_0 < |\mathbb{R}|$

Dim Per l'osservazione $\aleph_0 \leq |\mathbb{R}|$, inoltre $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, quindi $\mathbb{R}$ è denso. Si vede facilmente che $\mathbb{R}$ non ha massimo né minimo, quindi se $\mathbb{R}$ fosse numerabile sarebbe isomorfo a $\mathbb{Q}$. D'altro canto $\mathbb{R}$ è completo e $\mathbb{Q}$ no, quindi non possono essere isomorfi. ∎

Abbiamo stabilito che $(\mathbb{R}, <)$ è un ordine completo senza estremi con un sottoinsieme, $\mathbb{Q}$, denso e numerabile. Queste proprietà, a loro volta, caratterizzano l'insieme ordinato $(\mathbb{R}, <)$ a meno di isomorfismi.

Prop Sia $(A, <)$ un ordine totale completo senza estremi, supponiamo che esista $B \subseteq A$ numerabile e denso in A, allora $(A, <)$ è isomorfo a $(\mathbb{R}, <)$.

Dim Sia $\tilde{A}$ l'insieme delle sezioni su B. Osserviamo, inizialmente, che $(A, \leq) \sim (\tilde{A}, \subseteq)$. L'isomorfismo è infatti dato da

$$f : A \to \tilde{A} \qquad f(a) = B_a = \{x \in B \mid x < a\}$$

la cui inversa è

$$g : \tilde{A} \to A \qquad g(Y) = \sup Y$$

Verifichiamo: a è un maggiorante di B_a, ed è il minimo perché se $x < a$, per la densità di B, esiste $y \in B$ con $x < y < a$, quindi $y \in B_a$, e $x < y$ non può essere un maggiorante di B_a. Quindi $\sup B_a = a$ ossia $g(f(a)) = a$. Per ottenere la composizione opposta, $B_{\sup Y} = Y$, dimostriamo che $x \in B_{\sup Y} \leftrightarrow x \in Y$. Per costruzione, dato $x \in B$, $x \in B_{\sup Y} \Leftrightarrow x < \sup Y$. Ora, $x \in Y \to x \leq \sup Y$ perché $\sup Y$ è un maggiorante di Y, ma non può valere $x = \sup Y$ perché, per definizione di sezione, Y non ha un massimo. Per ottenere la freccia opposta, assumiamo $x < \sup Y$, allora x non può essere un maggiorante di Y — perché $\sup Y$ è il minimo di questi e $x < \sup Y$ — quindi esiste $y \in Y$ con $x < y$, ma Y è un segmento iniziale, quindi $x \in Y$.

Ora, per il teorema di Cantor, B con l'ordine indotto da $(A, <)$ è isomorfo a $\mathbb{R}$, quindi le sezioni di B sono isomorfe alle sezioni di $\mathbb{R}$, ossia $(\tilde{A}, \subseteq) \sim (\mathbb{R}, \leq)$. ∎

Per completezza, definiamo ora la struttura di campo di $\mathbb{R}$. Non verificheremo le proprietà, e neanche la correttezza di queste definizioni.

Def $(F, 0, 1, +, \cdot, <)$ è un *campo ordinato* se

- $(F, 0, 1, +, \cdot)$ è un campo
- $(F, <)$ è un ordine totale
- $\forall x,y,z \in F \quad x < y \to x + z < y + z$
- $\forall x,y \in F \quad (0 < x \wedge 0 < y) \to 0 < x \cdot y$

} l'ordine è compatibile con le operazioni

Def. (somma su $\mathbb{R}$)

Dati $x, y \subseteq \mathbb{R}$ $\quad x + y \overset{\text{def.}}{=} \{a + b \mid a \in x \wedge b \in y\}$

Dati $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ e $y > 0$

$x \cdot y \overset{\text{def}}{=} \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0\} \cup \{a \cdot b \mid a \in x \wedge b \in y \wedge a > 0 \wedge b > 0\}$

Definiamo quindi $-x$ tramite l'inverso additivo ed il prodotto nei casi $x < 0$, $y > 0$ &c. tramite la regola dei segni.

Teo $\mathbb{R}$, dotato delle operazioni appena definite, è l'unico campo ordinato completo a meno di isomorfismi.

La dimostrazione di questo teorema, talvolta, si vede nei corsi di analisi 1, noi non la studieremo. Per chi fosse interessato: LIBRO DI TESTO, cap. 10; NOTE DEL PROFESSOR DI NASSO, fascicolo 4; LEZIONE 16 DELL'A.A. 2020–21.

Torniamo ad una questione più strettamente insiemistica

Teo $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

Questo teorema ci dice, in un modo ancora diverso, che $\mathbb{R}$ è più che numerabile — poiché $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ — ma, in più, caratterizza anche esattamente la cardinalità di $\mathbb{R}$.

Prima della dimostrazione formale, vediamo intuitivamente perché il risultato è vero. Per definizione, $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, quindi la disuguaglianza da dimostrare è $2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}|$.
Esibiamo una funzione iniettiva $\mathcal{P}(\omega) \to \mathbb{R}$.

$$f : \mathcal{P}(\omega) \to \mathbb{R} \qquad f(S) = 0.a_0^S a_1^S a_2^S a_3^S \ldots$$ (scrittura decimale)

$$\text{con } a_i^S = \begin{cases} 0 & \text{se } i \notin S \\ 1 & \text{se } i \in S \end{cases}$$

Per esempio $S = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$

$$\to f(S) = 0.001101010001\ldots$$

È chiaro che

$$f(S) = f(T) \iff \forall i \in \omega \; a_i^S = a_i^T \iff \forall i \in \omega \; i \in S \leftrightarrow i \in T \iff S = T$$

Non è difficile formalizzare questa dimostrazione. Bisognerebbe definire $0.a_1 a_2 a_3 \ldots$ come $\sum_{i=0}^{\omega} a_i 10^{-i}$, poi $\sum_{i=0}^{\omega}$ come $\sup\{\sum_{i=0}^{n}\}$, poi $\sum_{i=0}^{n}$ per ricorsione numerabile, poi dimostrare le proprietà aritmetiche rilevanti. Noi sfrutteremo la stessa idea, ma formulando la dimostrazione in termini di ordini.

Prima di dimostrare il teorema, sviluppiamo un po' di aritmetica della cardinalità $2^{\aleph_0}$. Questi lemmi sono importanti, e serviranno per calcolare la cardinalità di insiemi concreti.

Oss. $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

Dim $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

Lemma Siano α, β o "finito" o $\aleph_0$ o $2^{\aleph_0}$ allora

$$\alpha + \beta = \alpha \cdot \beta = \max(\alpha, \beta)$$

eccetto il caso $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \beta = 0$.

Dim Somme e prodotti di cardinalità finite sono finite.

Supponiamo quindi $\aleph_0 \leq \beta$ e, senza perdita di generalità, $\alpha < \beta$. Abbiamo:

$$\beta \leq \begin{matrix} \alpha+\beta \\ \alpha\cdot\beta \end{matrix} \leq \beta^2 = \beta$$

Dove l'ultima uguaglianza vale perché sia $\aleph_0^2 = \aleph_0$, sia

$$2^{\aleph_0} \leq \left(2^{\aleph_0}\right)^2 \leq \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

∎

Lemma Se $2 \leq \alpha \leq 2^{\aleph_0}$ allora $\alpha^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Dim. $2^{\aleph_0} \leq \alpha^{\aleph_0} \leq \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

∎

Ricordiamo un'osservazione riguardo al numerabile

Oss. Sia $|A| = \aleph_0$ e $B \subseteq A$ con $|B| < \aleph_0$. Allora $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Dim Siccome $A \setminus B \subseteq A$, o $|A \setminus B| = \aleph_0$ o $|A \setminus B| < \aleph_0$. Se valesse la seconda $A = B \cup (A \setminus B)$ sarebbe unione di finiti, quindi finito. ∎

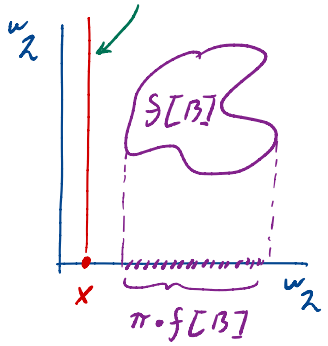
Vale una proposizione analoga per $2^{\aleph_0}$.

Lemma Sia $|A| = 2^{\aleph_0}$ e $B \subseteq A$ con $|B| \leq \aleph_0$. Allora $|A \setminus B| = 2^{\aleph_0}$.

Nota Varrebbe anche rimpiazzando questo con $< 2^{\aleph_0}$, però, per ora, possiamo dimostrare solo l'asserto più debole qua sopra.

Dim Chiaramente $|A \setminus B| \leq |A| = 2^{\aleph_0}$, basta quindi dimostrare $2^{\aleph_0} \leq |A \setminus B|$. Siccome $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, esiste una biiezione

$$f : A \longrightarrow \omega_2 \times \omega_2$$



Sia $\pi : \omega_2 \times \omega_2 \longrightarrow \omega_2$, $\pi(x,y) = x$.

Siccome B è al più numerabile

$$|\pi \circ f[B]| \leq \aleph_0 < 2^{\aleph_0}$$

Quindi, in particolare $\pi \circ f[B] \neq \omega_2$

Prendiamo $x \in \omega_2 \setminus \pi \circ f[B]$. Dire che $x \notin \pi \circ f[B]$ significa che $(\{x\} \times \omega_2) \cap f[B] = \emptyset$. Quindi $f^{-1}(\{x\} \times \omega_2) \cap B = \emptyset$, ossia $f^{-1}(\{x\} \times \omega_2) \subseteq A \setminus B$, da cui $|f^{-1}(\{x\} \times \omega_2)| \leq |A \setminus B|$.

Usando il fatto che f è biiettiva

$$|f^{-1}(\{x\} \times \omega_2)| = |\{x\} \times \omega_2| = 1 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

■

Dim ($|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$)

Siccome $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, la disuguaglianza $|\mathbb{R}| \leq 2^{\aleph_0}$ è immediata. Per dimostrare la disuguaglianza opposta definiamo

$$A \overset{\text{def.}}{=} \{ X \in \mathcal{P}(\omega) \mid X \neq \emptyset \wedge |\omega \setminus X| \geq \aleph_0 \}$$

ossia i sottoinsiemi di ω non vuoti e co-infiniti.

Intuitivamente, $X \in A$ rappresenta lo sviluppo in notazione binaria di un $x \in]0,1[$ — $x = 0.a_1 a_2 a_3 \ldots$ $a_i = 1 \leftrightarrow i \in X$ — la condizione $X \neq \emptyset$ serve a escludere lo 0, la condizione di co-infinitezza a escludere l'uno periodico.

Ci basta dimostrare che $|A| = 2^{\aleph_0}$ e che esiste $f : A \to \mathbb{R}$ iniettiva. La prima è più facile

$$A = \mathcal{P}(\omega) \setminus \left(\{\emptyset\} \cup \{ X \in \mathcal{P}(\omega) \mid |\omega \setminus X| < \aleph_0 \} \right)$$

L'insieme $S \overset{def.}{=}$ è in corrispondenza biunivoca con $\mathcal{P}^{fin}(\omega)$ tramite la funzione "complementare rispetto a ω"

$$\overline{\cdot} : S \to \mathcal{P}^{fin}(\omega) \qquad \overline{X} = \omega \setminus X$$

Quindi $|S| = |\mathcal{P}^{fin}(\omega)| = \aleph_0$, e, di conseguenza $|A| = 2^{\aleph_0}$ grazie al lemma precedente.

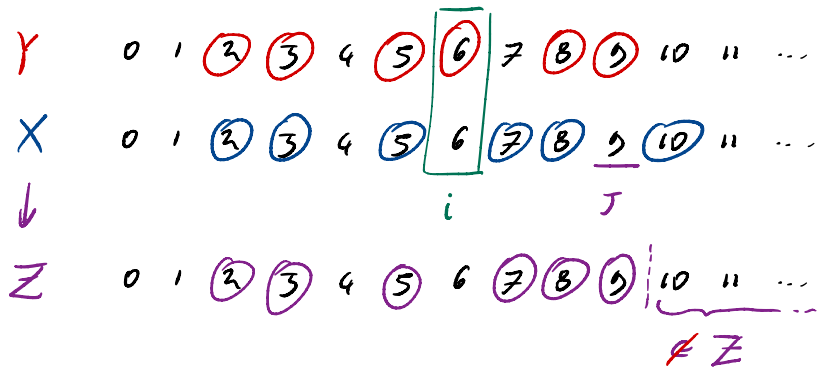
Resta da costruire $f : A \to \mathbb{R}$ iniettiva. Cominciamo col definire un ordine totale su A. Dati $X, Y \in A$

$$X < Y \overset{def.}{\iff} \exists i \in \omega \; \underbrace{in X = in Y}_{\forall j < i \; j \in X \leftrightarrow j \in Y} \wedge \underbrace{i \in Y \setminus X}_{i \in Y \wedge i \notin X}$$

In altri termini, detto i il minimo elemento della differenza simmetrica $X \triangle Y \overset{def.}{=} (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$, se $i \in Y$ — per cui, chiaramente, $i \notin X$ — allora $X < Y$, se, invece, $i \in X$ — per cui $i \notin Y$ — allora $Y < X$. La verifica del fatto che questo è un ordine totale è immediata.

Consideriamo $B \overset{\text{def.}}{=} \mathcal{P}^{\text{fin}}(\omega) \setminus \{\emptyset\} \subseteq A$. Chiaramente $|B| = \aleph_0$. Dimostriamo che B è denso in A.

Dati $X, Y \in A$ con $X < Y$, sia $i = \min X \triangle Y$ e $j > i$ minimo tale che $j \notin X$, che esiste perché X è co-infinito. Sia $Z \overset{\text{def.}}{=} (X \cap j) \cup \{j\}$



Z è finito, quindi appartiene a B per costruzione. Inoltre, j è il minimo elemento di $X \triangle Z$ e $j \in Z$, quindi $X < Z$, e, similmente, i è il minimo di $Z \triangle Y$ e $i \in Y$, quindi $Z < Y$.

Stabilito che B è denso in A, B è, in particolare, denso, quindi, c'è un isomorfismo di ordini $g : B \to \mathbb{Q}$. Ora, siccome, nuovamente, B è denso in A, la funzione

$$h : A \to \text{sezioni su } B, \quad h(X) = \{Y \in B \mid Y < X\}$$

è iniettiva. Quindi $f : A \to \mathbb{R}$, $f(X) = g[h(X)]$ è una funzione iniettiva da A a $\mathbb{R}$. ∎