Stato del corso

È un dato di fatto — il primo teorema di incompletezza di Gödel — che ogni teoria calcolabile — i cui assiomi possano, cioè, essere elencati in maniera meccanica — è necessariamente incompleta. L'incompletezza non è quindi un difetto, o meglio, che lo sia oppure no è irrilevante, perché non può essere evitata.

Tuttavia, gli assiomi che abbiamo introdotto fino ad ora lasciano aperte lacune che sarebbe desiderabile colmare.

1. Sarebbe ragionevole che questi insiemi esistessero
   $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$
   $\{\omega, s(\omega), s(s(\omega)), s(s(s(\omega))), \dots\}$
   Però gli assiomi 1–7 non bastano per né per dimostrarne l'esistenza, né — e questo sarebbe disastroso — permettono di escluderla.

2. Alcune questioni sulle cardinalità, come per esempio la confrontabilità, non possono essere decise sulla base dei soli assiomi 1–7. Inoltre ci mancano risultati desiderabili per via delle applicazioni, segnatamente il lemma di Zorn.

3. Vi sono insiemi la cui esistenza vorremmo escludere. Per esempio vorremmo che l'equazione $X = \{X\}$ non avesse soluzioni, e sarebbe comodo escludere l'esistenza di qualcosa tipo $Y = \{\{\{\{\cdots\}\}\}\}$ con infinite parentesi annidate. Il guaio qui non è grave, ma questi oggetti contraddicono, in parte, l'intuizione che vorremmo concretizzare negli assiomi della teoria degli insiemi. Noi vorremmo che un insieme fosse identificato dalla sua struttura. Mi spiego, per esempio $\emptyset$ è identificato dal fatto di non avere elementi, $\{\emptyset\}$ è identificato dal fatto di aver un solo elemento che non ha elementi. &c. per tutti gli insiemi che conosciamo, ma cosa dire di Y? Y ha un elemento Y_1, che ha un elemento Y_2, che ha ... e la stessa descrizione si potrebbe applicare anche a Y_1, e anche a Y_2 ... Sono tutti uguali?

Queste tre lacune saranno colmate dai tre assiomi che ancora ci mancano: rispettivamente l'assioma del rimpiazzamento, l'assioma della scelta e l'assioma di buona fondazione. La teoria risultante sarà, inevitabilmente, incompleta — per esempio non decide il problema del continuo: l'esistenza di cardinalità intermedie fra $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$ — ma è la fondazione meglio accettata della matematica.

I buoni ordinamenti

Il nostro prossimo obiettivo è definire e studiare la classe dei *numeri ordinali*. Questa può essere pensata come la più vasta classe — dotata di un ordinamento totale definito per mezzo di una formula — su cui sia corretto ragionare per induzione forte. Conteremo, quindi, sugli ordinali per formulare *l'induzione e la ricorsione transfinita*, procedimenti che superano la forza dimostrativa dell'induzione e della ricorsione aritmetica — per esempio permettendo di ottenere il teorema di Cantor – Lebesgue sugli insiemi di unicità.

Siccome l'induzione forte equivale al principio del minimo, studieremo i buoni ordini. In questa sezione, dimostreremo il risultato seguente.

nel seguito scriveremo semplicemente $(A, <)$ e $(B, <)$

Teo Siano $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ insiemi bene ordinati, allora vale *una e una sola* delle seguenti

- $(A, <_A)$ è isomorfo a un segmento iniziale proprio di $(B, <_B)$
- $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ sono isomorfi
- $(B, <_B)$ è isomorfo a un segmento iniziale proprio di $(A, <_A)$

Ossia, se definiamo

$$(A, <_A) \prec (B, <_B) \overset{\text{dd.}}{\equiv} \exists\, C \text{ s.i proprio di } (B, <_B) \quad (A, <_A) \sim C$$

allora $\prec$ soddisfa le proprietà formali di un ordine totale

Sia la classe di isomorfismo di buoni ordini. Definiamo allora

$(A, <_A) \preceq (B, <_B) \overset{def.}{\iff} (A, <_A) \prec (B, <_B) \vee (A, <_A) \sim (B, <_B)$

ossia "$(A, <_A)$ è isomorfo a un segmento iniziale di $(B, <_B)$"

Richiamiamo le definizioni fondamentali

Def. $(A, <)$ è un *buon ordinamento* se ogni $B \subseteq A$ non vuoto ha un minimo elemento.

Def Dato un ordine totale $(A, <)$, $B \subseteq A$ è un *segmento iniziale* se $\forall b \in B \; \forall x \in A \; x < b \to x \in B$

Il segmento iniziale B è *proprio* se $B \neq A$

Il segmento iniziale B è *principale* se

$$B = A_a \overset{def.}{=} \{x \in A \mid x < a\}$$

per qualche $a \in A$, e, in questo caso, si dice *il segmento iniziale principale determinato da a*.

È chiaro che un segmento iniziale principale, A_a, è proprio, perché $a \notin A_a$, nel caso dei buoni ordini questa è una doppia implicazione

Prop: Ogni segmento iniziale proprio di un buon ordine è principale.

Dim Sia $(A, <)$ ben ordinato e $I \subsetneq A$ un segmento iniziale. Consideriamo $a = \min(A - I)$. Allora $I = A_a$.

Verifichi: $x \in A_a \Rightarrow x < a \Rightarrow x \notin A \setminus I \Rightarrow x \in I$.

Supponiamo, per assurdo, $x \in I$ e $x \notin A_a$, la seconda equivale ad $a \in X$, ma allora, siccome $x \in I$, $a \in I$ ma. Quindi $x \in I$ implica $x \in A_a$.

∎