Verifichi: $x \in A_a \Rightarrow x < a \Rightarrow x \notin A \setminus I \Rightarrow x \in I$.

Supponiamo, per assurdo, $x \in I$ e $x \notin A_a$, la seconda equivale ad $a \leq x$, ma allora, siccome $x \in I$, $a \in I$. Quindi $x \in I$ implica $x \in A_a$. ∎

Esercizio Dimostra che la proposizione precedente caratterizza i buoni ordini. Più precisamente, dato un ordine totale $(A, <)$, se ogni segmento iniziale proprio di A è principale, allora A è ben ordinato da $<$.

Lemma Sia $(A, <)$ un buon ordinamento e $f : A \to A$ una funzione crescente — def. $\forall x, y \in A \; x < y \to f(x) < f(y)$. — Allora $\forall x \in A \; x \leq f(x)$.

Dim Per assurdo, assumiamo la negazione della tesi. Quindi l'insieme $B = \{x \in A \mid f(x) < x\}$ non è vuoto. Sia $k = \min B$. Allora $f(k) < k$, e, siccome f è crescente, $f(f(k)) < f(k)$. Colorando diversamente $f(f(k)) < f(k)$, per cui $f(k) \in B$, che, ricordando $f(k) < k$, contraddice la minimalità di k.

Corollari

1. Un buon ordinamento non è isomorfo a un suo s.i. proprio.
2. L'identità è il solo isomorfismo fra un b.o. e se stesso
3. Se $(A, <)$ e $(B, <)$ sono b.o. isomorfi allora esiste un unico isomorfismo fra di essi.

Dim

1. Supponiamo che $(A, <)$ sia isomorfo al suo s.i proprio A_a, ordinato — si intende — dalla restrizione di $<$, e sia $f: A \to A_a$ un isomorfismo. Allora f è crescente per definizione. Tuttavia $f(a) < a$, poiché $f(a) \in A_a$, contraddicendo il lemma.

2. Sia $f: A \to A$ un automorfismo del buon ordine $(A, <)$, dobbiamo dimostrare che $f = Id_A$. Se così non fosse, ci sarebbe un $x \in A$ tale che $f(x) \neq x$.
Se $f(x) < x$ contraddiciamo il lemma poiché f è crescente.
Se $x < f(x)$ idem considerando f^{-1}.

3. Se $f: A \to B$ e $g: A \to B$ fossero due isomorfismi diversi, allora $g^{-1} \circ f$ sarebbe un automorfismo di A diverso dall'identità, contraddicendo il punto 1. ∎

Oss Siano $(A, <)$, $(B, <)$, $(C, <)$ buoni ordini. Allora
$(A, <) \preceq (B, <) \wedge (B, <) \preceq (C, <) \longrightarrow (A, <) \preceq (C, <)$.

Dim Siano $f: A \to B$ e $g: B \to C$ isomorfismi fra A e un segmento iniziale di B e fra B e un segmento iniziale di C rispettivamente. Dimostriamo che $g \circ f$ è un isomorfismo fra A e un segmento iniziale di C.
$g \circ f$ è crescente in quanto composizione di funzioni crescenti.

Occorre verificare che l'immagine $g \circ f[A]$ è un segmento iniziale di C.

Verifica. Sia $g(f(a))$ un qualunque elemento di $g \circ f[A]$, e sia $x < g(f(a))$, dobbiamo dimostrare che $x \in g \circ f[A]$. $g(f(a)) \in g[B]$ e $g[B]$ è un s.i. di C per ipotesi, quindi $x \in g[B]$. Scriviamo $x = g(y)$. Ora, siccome g è un isomorfismo, da $x < g(f(a))$ deduciamo $y < f(a) \in f[A]$. Siccome $f[A]$ è un s.i. di B, quindi, $y = f(z)$ per qualche $z \in A$. In definitiva $x = g(f(z)) \in g \circ f[A]$. ☐

Oss. Siano $(A, <)$ e $(B, <)$ buoni ordini, allora

$$(A, <) \precsim (B, <) \wedge (B, <) \precsim (A, <) \rightarrow (A, <) \sim (B, <)$$

Dim. Siano $f : A \to B$ e $g : B \to A$ isomorfismi fra A e un s.i. di B e fra B e un s.i. di A rispettivamente. Ricordando la dimostrazione dell'osservazione precedente, $g \circ f$ è un isomorfismo fra A e un s.i., $g \circ f[A]$, di A. Per il corollario 1., $g \circ f[A]$ non può essere un s.i. proprio, quindi $g \circ f[A] = A$. Ma allora, per il corollario 2. $g \circ f = Id_A$. Ragionando simmetricamente $f \circ g = Id_B$, quindi f è un isomorfismo fra A e B, con inversa g. ☐

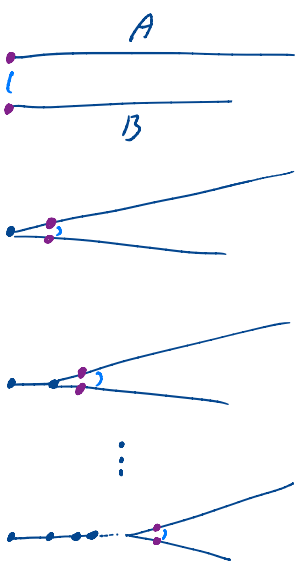
Possiamo finalmente passare alla dimostrazione del teorema.

Teo. Siano $(A, <)$ e $(B, <)$ insiemi bene ordinati,

allora vale una e una sola delle seguenti

$(A,<) \prec (B,<)$ $\quad$ $(A,<) \sim (B,<)$ $\quad$ $(B,<) \prec (A,<)$

Idea Il corollario ci dice che vale al più una delle alternative, quindi la difficoltà risiede nel dimostrare che una si verifica. Molto vagamente potremmo ragionare così. Identifichiamo, progressivamente, segmenti iniziali sempre più lunghi di A e B. All'inizio identifichiamo il minimo di A con il minimo di B, poi il secondo elemento di A con il secondo elemento di B, &c. Fatti ω passaggi avremo identificato un segmento iniziale di A, diciamo A_x, isomorfo a ω, con un B_y, anch'esso ovviamente isomorfo a ω. Bene: continuiamo identificando x con y. Quando potrebbe bloccarsi questo procedimento? Solo se, ad un certo punto, abbiamo identificato interamente uno dei due insiemi con un segmento iniziale dell'altro — perché, altrimenti, abbiamo identificato due segmenti iniziali A_x e B_y e possiamo continuare attaccando x a y. È come la chiusura di una cerniera lampo: ad ogni istante c'è un prossimo dente.



Questo discorso, però, non è una dimostrazione. Se vogliamo, sarebbe un tentativo di costruire l'isomorfismo cercato per ricorsione transfinita. Il guaio è che i numeri che permettenobbero

di numerare i passaggi della costruzione, gli ordinali sono appunto l'oggetto che stiamo tentando di costruire.

Dim (quella vera)

Per il corollario, si può verificare al più una delle tre condizioni. Consideriamo ora f definita come segue

$$f \overset{\text{def.}}{=} \{(a,b) \in A \times B \mid A_a \sim B_b\}$$

Vogliamo dimostrare che f è una funzione crescente, che $\mathrm{Dom}\, f$ è un segmento iniziale di A, e che $\mathrm{Im}\, f$ è un segmento iniziale di B. Quindi f è un isomorfismo fra un segmento iniziale di A e uno di B. Infine dimostriamo che o $\mathrm{Dom}\, f = A$ o $\mathrm{Im}\, f = B$, e questo conclude la dimostrazione.

1. f è una funzione.

   Supponiamo per assurdo $(a,b) \in f$ e $(a,b') \in f$ con $b \neq b'$. Senza perdita di generalità $b < b'$, e, per definizione

   $$B_b \sim A_a \sim B_{b'}$$

   $B_{b'}$ sarebbe quindi isomorfo al suo segmento iniziale proprio B_b ↯

2. f è crescente

   Dati $a, a' \in A$ con $a < a'$, dobbiamo dimostrare $f(a) < f(a')$

   Supponiamo, per assurdo, $f(a') \leq f(a)$, abbiamo allora

$$A_{a'} \sim B_{f(a')} \subsetneq B_{f(a)} \sim A_a$$

dove i due isomorfismi vengono semplicemente dalla definizione di f, e $B_{f(a')} \subsetneq B_{f(a)}$ segue da $B_{f(a')} \subseteq B_{f(a)}$ che vale perché $f(a') \leq f(a)$ per ipotesi assurda.
Abbiamo quindi ottenuto $A_{a'} \sim A_a$ che è assurdo poiché A_a è un segmento iniziale proprio di $A_{a'}$.

3. $\mathrm{Dom}\, f$ è un segmento iniziale di A

Sia $a \in \mathrm{Dom}\, f$ e $a' < a$, vogliamo dimostrare $a' \in \mathrm{Dom}\, f$.
L'ipotesi $a \in \mathrm{Dom}\, f$ equivale a dire che esiste $b \in B$ tale che $A_a \sim B_b$, quindi, in particolare, $A_a \not\sim B_b$.
Da $a' < a$ segue che $A_{a'} \subsetneq A_a$, quindi $A_{a'} \prec A_a$.
Per transitività $A_{a'} \prec B_b$ e, siccome ogni segmento iniziale è principale, esiste $b' \in B_b$ tale che $A_{a'} \sim (B_b)_{b'}$.
Si conclude osservando che $(B_b)_{b'} = B_{b'}$, quindi $f(a') = b'$.

4. $\mathrm{Im}\, f$ è un segmento iniziale di B

Dimostrazione simmetrica alla precedente.

5. O $\mathrm{Dom}\, f = A$ o $\mathrm{Im}\, f = B$

Se così non fosse, per 3. $\mathrm{Dom}\, f = A_a$ e per 4. $\mathrm{Im}\, f = B_b$ per opportuni $a \in A$ e $b \in B$. Per 2. f è crescente, quindi è un isomorfismo fra $\mathrm{Dom}\, f = A_a$ e $\mathrm{Im}\, f = B_b$. Ma allora $A_a \sim B_b$ e, per costruzione $(a, b) \in f$. Quindi $a \in \mathrm{Dom}\, f$ ↯

Esercizio Sia $(A, <)$ b.o. e sia $B \subsetneq A$. Dimostra che $B \leq A$, ma non necessariamente $B < A$.

Esercizio Sia $(A, \leq_A)$ un ordine totale con $A = \bigcup S$.
Supponiamo che: 1. ogni $X \in S$ è b.o. dalla restrizione di $\leq_A$
2. per ogni $X, Y \in S$, o X è s.i. di Y
o Y è s.i. di X

Dimostra che allora $(A, <)$ è un buon ordine.
Esibisci un controesempio eliminando la condizione 2.

Operazioni aritmetiche fra buoni ordinamenti

Per ora, non abbiamo visto molti esempi di buoni ordini. Le operazioni definite in questa sezione forniscono una prima sorgente di esempi concreti. Nel seguito del corso, vedremo buoni ordini assai più vasti di quelli ottenibili con queste operazioni.

Def Siano $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ ordini totali. Definiamo

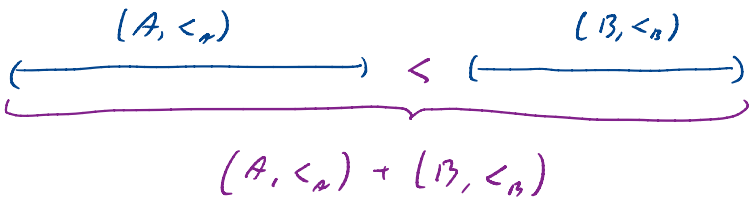
$$(A, <_A) + (B, <_B) \overset{\text{def.}}{=} (\underbrace{A \sqcup B}_{A \times \{0\} \cup B \times \{1\}}, <_+)$$

dove $<_+$ è definita da

$$(x, y) <_+ (x', y') \overset{\text{def.}}{\equiv} (y = 0 \wedge y' = 1)$$
$$\vee \; (y = 0 \wedge y' = 0 \wedge x <_A x')$$
$$\vee \; (y = 1 \wedge y' = 1 \wedge x <_B x')$$

Idea: $(A, <_A) + (B, <_B)$ si ottiene attaccando $(B, <_B)$ in

coda a $(A, <_A)$.



Ripetiamo, per completezza, la definizione di prodotto lessicografico

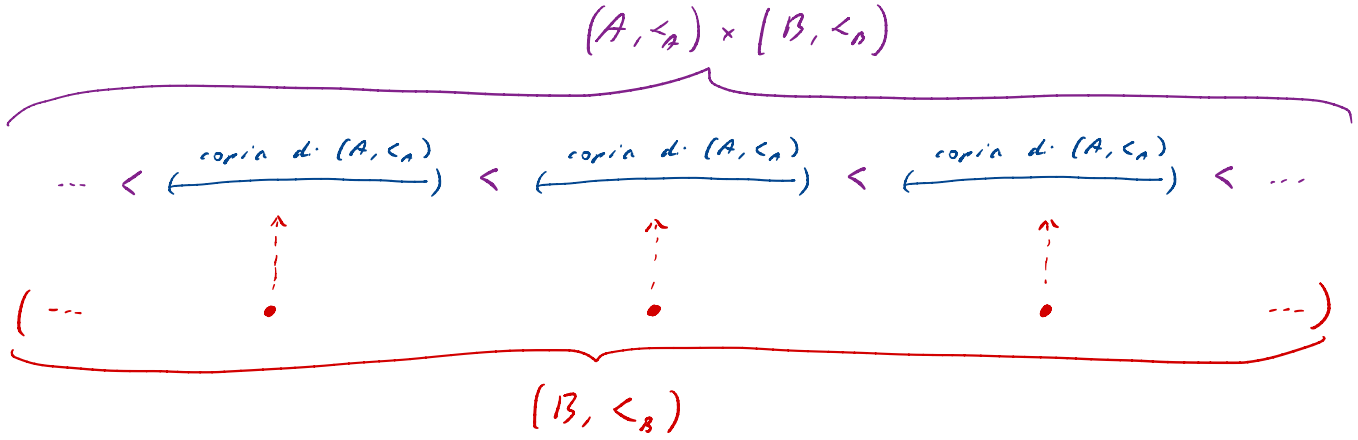
Def Siano $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ ordini totali. Definiamo

$$(A, <_A) \cdot (B, <_B) \overset{def.}{=} (A \times B, <_\times)$$

dove $<_\times$ è definito da

$$(x, y) <_\times (x', y') \overset{def.}{\equiv} (y <_B y') \wedge (y = y' \wedge x <_A x')$$

Idea: confronto prima la seconda componente. A parità decido la prima. Ossia: $(A, <_A) \cdot (B, <_B)$ sono tante copie di $(A, <_A)$ giustapposte, quanti sono gli elementi di B.



Per definire l'esponenziale, ci serve la nozione di supporto.

Def Dato un buon ordine $(B, <)$ e $f : A \to B$, il *supporto* di f è

$$Supp_B(f) \overset{def.}{=} \{x \in A \mid f(x) \neq \min B\}$$

Omettiamo il pedice B quando è chiaro cosa sia B.

Def Siano $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ ordini totali. Definiamo

$$(A, <_A)^{(B, <_B)} \overset{def.}{=} \left(\{ f \in {}^B A \mid |\mathrm{Supp}\, f| < \aleph_0 \}, <_{exp} \right)$$

funzioni a supporto finito

dove $<_{exp}$ è definito da

$$f <_{exp} g \overset{def.}{\equiv} f \neq g \text{ e detto } m = \max_{<_B} \{ x \in B \mid f(x) \neq g(x) \}$$
$$\text{si ha } f(m) <_A g(m)$$

L'idea è che una funzione $B \to A$ può essere vista una specie di tupla con tante componenti quanti sono gli elementi di B. Ordinare questa tupla lessicograficamente significa che vince la componente diversa più a destra, ossia quella corrispondente all'elemento di B più grande.

Esercizio Verifica che $(\omega, <)^{(\omega, <)} \sim (\mathbb{N}[x], \prec)$ dove $\mathbb{N}[x]$ denota l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{N}$, e definiamo

$$p \prec q \overset{def.}{\equiv} \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ x > N \to p(x) < q(x)$$

Ossia $p \prec q$ se $p(x) < q(x)$ da un certo punto in poi.

Prop: Se $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ sono buoni ordini, allora anche $(A, <_A) + (B, <_B)$, $(A, <_A) \cdot (B, <_B)$ e $(A, <_A)^{(B, <_B)}$ sono buoni ordini.

Dim Si tratta di banali verifiche, eccetto la tesa.

La relazione $<_{exp}$ è irriflessiva per definizione. Occorre, intanto, verificare la transitività.

Assumiamo $f <_{rxp} g$ e $g <_{rxp} h$ con

$$m_1 = \max_{<_B} \{ x \in B \mid f(x) \neq g(x) \}$$
$$m_2 = \max_{<_B} \{ x \in B \mid g(x) \neq h(x) \}$$
$$m_3 = \max_{<_B} \{ x \in B \mid f(x) \neq h(x) \}$$

Detto $m = \max(m_1, m_2)$, abbiamo $f(m) \leq_A g(m) \leq_A h(m)$, dove la prima disuguaglianza è stretta se $m = m_1$ e la seconda se $m = m_2$. In ogni caso $f(m) <_A h(m)$. D'altra parte, se $m <_B x$, allora $f(x) = g(x) = h(x)$, quindi $m = m_3$ e la transitività è dimostrata.

La relazione $<_{rxp}$ è un ordine totale perché, se $f \neq g$, allora esiste $m = \max_{<_B} \{ x \in B \mid f(x) \neq g(x) \}$, e o $f(m) <_A g(m)$ o $g(m) <_A f(m)$. Nel primo caso $f <_{rxp} g$, nel secondo $g <_{rxp} f$.

Resta da verificare che l'ordine è buono. Per assurdo, supponiamo che non lo sia, allora, detto S l'insieme delle funzioni $B \to A$ a supporto finito, abbiamo

$$\exists f \in S \; \exists A \subseteq S \left(f \in A \wedge \forall g \in A \; \exists h \in A \; h <_{rxp} g \right)$$

($\exists A \subseteq S$ $f \in A$: c'è un $A \subseteq S$ non vuoto; $\forall g \in A \; \exists h \in A \; h <_{rxp} g$: che non ha minimo)

Ora, fissiamo una $f \in S$ tale che $\exists A \subseteq S$ &c. con questa proprietà: che $\max_{<_B}(\mathrm{Supp}\, f)$ sia minimo, e che, a parità di $m = \max_{<_B}(\mathrm{Supp}\, f)$ il valore di $f(m)$ sia minimo. Fissiamo una A in modo tale che $f \in A$ ed A non abbia minimo. Il nostro scopo è costruire un $\tilde{A} \subseteq S$ che non ha minimo e contiene

una funzione $\tilde{f}$ con $\max(Supp\ \tilde{f}) <_B m$, in questo modo neghiamo la minimalità di m ed otteniamo la contraddizione voluta.

Osserviamo, intanto che A può essere ripartito in

$$A_1 = \{ g \in A \mid \max_{<_D}(Supp\ g) <_B m \}$$
$$A_2 = \{ g \in A \mid \max_{<_D}(Supp\ g) = m \wedge g(m) = f(m) \}$$
$$A_3 = \{ g \in A \mid \max_{<_D}(Supp\ g) = m \wedge f(m) <_A g(m) \}$$
$$A_4 = \{ g \in A \mid m <_D \max(Supp\ g) \}$$

e segue dalla definizione che le funzioni in A_1 sono $<_{exp}$ di quelle in A_2, che sono $<_{exp}$ &c. fino ad A_4. Però A_1 è vuoto, perché altrimenti, presa $f' \in A_1$, abbiamo $f' \in A$ e $\max(Supp\ f') < m$ contro la minimalità di m. Allora A_2, che non è vuoto poiché contiene f non ha minimo, se, infatti, l'avesse, questo dovrebbe essere anche minimo di A.

Concentriamoci ora su A_2. Tutte le $g \in A_2$ assumono il medesimo valore su m, quindi, comparando due di queste funzioni con $<_{exp}$, il valore assunto da entrambe su m è irrilevante. Ossia la funzione

$$H : A_2 \longrightarrow S$$
$$g \longmapsto \hat{g} \quad \text{con} \quad \hat{g}(x) = \begin{cases} \min A & \text{se } x = m \\ g(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è strettamente crescente. Per cui $\tilde{A} \overset{def.}{=} H[A_2]$ non ha minimo.

Ora, però, segue dalla definizione che, fissata $g \in A_\alpha$, $\operatorname{Supp} \hat{g} = (\operatorname{Supp} g) \setminus \{m\}$, quindi, ponendo $\hat{f} \overset{\text{def.}}{=} \hat{g}$, abbiamo $\max(\operatorname{Supp} \hat{f}) < m$, e questo contraddice la minimalità di m. ∎

Prop. Le operazioni aritmetiche sui buoni ordini passano al quoziente modulo isomorfismi. Ossia, dati due buoni ordinamenti $\mathcal{A} = (A, <_A)$ e $\mathcal{B} = (B, <_B)$, e dati $\mathcal{A}' = (A', <_{A'}) \sim \mathcal{A}$ e $\mathcal{B}' = (B', <_{B'}) \sim \mathcal{B}$, si ha

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \sim \mathcal{A}' + \mathcal{B}' \qquad \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \sim \mathcal{A}' \cdot \mathcal{B}' \qquad \mathcal{A}^{\mathcal{B}} \sim \mathcal{A}'^{\mathcal{B}'}$$

Dim Fissati isomorfismi $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$, è facile scrivere esplicitamente gli isomorfismi richiesti. Per esempio, nel caso di $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$, si considera la restrizione alle funzioni a supporto finito di

$$\begin{aligned} {}^{B}A &\longrightarrow {}^{B'}A' \\ h &\longmapsto f \circ h \circ g^{-1} \end{aligned}$$

Esercizio svolgere qualcuna delle verifiche. ∎

Prop. Siano $\mathcal{A} = (A, <_A)$ $\mathcal{B} = (B, <_B)$ $\mathcal{C} = (C, <_C)$ buoni ordini. Allora

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} \sim \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C})$$
$$(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} \sim \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C})$$
$$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) \sim \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$$
$$\mathcal{A}^{\mathcal{B}+\mathcal{C}} \sim \mathcal{A}^{\mathcal{B}} \cdot \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$$
$$(\mathcal{A}^{\mathcal{B}})^{\mathcal{C}} \sim \mathcal{A}^{\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}}$$

Dim Facili verifiche. Esercizio: Farne qualcuna.

È importante notare che non tutte le proprietà delle operazioni aritmetiche su ω valgono per i buoni ordini

Esercizio Esibire CONTROESEMPI alle seguenti

$$\mathcal{A}+\mathcal{B} \sim \mathcal{B}+\mathcal{A} \qquad (\mathcal{A}+\mathcal{B})\cdot\mathcal{C} \sim \mathcal{A}\cdot\mathcal{C}+\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}$$
$$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} \sim \mathcal{B}\cdot\mathcal{A} \qquad (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})^{\mathcal{C}} \sim \mathcal{A}^{\mathcal{C}}\cdot\mathcal{B}^{\mathcal{C}}$$

Un altro tranello in cui si potrebbe cadere è credere che le operazioni sui buoni ordini generalizzino quelle sulle cardinalità. Questo è vero per le cardinalità finite, e anche in generale per somma e prodotto — come è ovvio dalla definizione — ma fallisce per l'esponenziale quando l'esponente è infinito.

Esercizio Dimostra che se $\mathcal{A}=(A,<_A)$ e $\mathcal{B}=(B,<_B)$ sono buoni ordini con $|A|=|B|=\aleph_0$ e $(C,<_C)=\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ allora $|C|=\aleph_0$.