Gli ordinali di Von Neumann

In questa sezione definiremo gli ordinali di Von Neumann. L'idea che vogliamo concretizzare è che, siccome abbiamo visto che, a meno di isomorfismi, due buoni ordinamenti sono sempre uno nell'altro, unendo fra loro tutti i buoni ordinamenti — o tutte le classi di isomorfismo di questi — dovrebbe potersi costruire un buon ordinamento più grande di tutti. Questa vasta struttura sarà inevitabilmente una classe propria: la classe dei numeri ordinali, i cui elementi sono rappresentanti di tutte le possibili classi di isomorfismo di buoni ordini.

Def L'insieme α è *transitivo* se $\forall x \in \alpha \; x \subseteq \alpha$, o, equivalentemente, se $\forall x \alpha \; \forall y \in x \; y \in \alpha$.

Ossia: α è transitivo se gli elementi degli elementi di α sono, a loro volta, elementi di α.

Def (ordinali di Von Neumann)
L'insieme α è un *ordinale* se è *transitivo e ben ordinato dalla relazione di appartenenza*. Formalmente, l'insieme transitivo α è un ordinale se $(\alpha, <_\alpha)$ è un buon ordine, con

$$<_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \{ (x,y) \in \alpha \times \alpha \mid x \in y \}$$

Denotiamo con Ord la classe degli ordinali, per cui

$$\alpha \in Ord \overset{\text{def.}}{\iff} \text{“}\alpha \text{ è transitivo e b.o. da } \in\text{”}$$

Esempi:

- ω è un ordinale
- gli elementi di ω sono ordinali
- $S(\omega) = \omega \cup \{\omega\}$ è un ordinale

Oss) Se $\alpha \in Ord$ e $\beta \in \alpha$ allora $\beta \in Ord$ e $\beta = \alpha_\beta$.

Nota: in particolare, la classe degli ordinali è transitiva.

Dim Siccome $\beta \in \alpha$, per la transitività di α, $\beta \subseteq \alpha$, quindi β è bene ordinato da $\in$. La transitività di β segue dalla transitività della relazione di ordine $<_\alpha$. Prendiamo, infatti, $\delta \in \gamma$ con $\gamma \in \beta$. Dobbiamo dimostrare $\delta \in \beta$. Siccome $\gamma \in \beta$, per la transitività di α, $\gamma \in \alpha$, e, da questa, nuovamente per la transitività di α, $\delta \in \alpha$. Ora $\delta, \gamma, \beta \in \alpha$, e abbiamo l'ipotesi $\delta \in \gamma \wedge \gamma \in \beta$, ossia $\delta <_\alpha \gamma \wedge \gamma <_\alpha \beta$, da cui $\delta <_\alpha \beta$. Quest'ultima dice, appunto, che $\delta \in \beta$.

Resta da dire che $\beta = \alpha_\beta$. Per definizione

$$x \in \alpha_\beta \iff x \in \alpha \wedge x <_\alpha \beta \iff x \in \alpha \wedge x \in \beta$$

Ora, $x \in \beta \to x \in \alpha$ per la transitività di α, quindi

$$x \in \alpha \wedge x \in \beta \iff x \in \beta$$

E concludiamo per estensionalità. ∎

La proposizione seguente ci dice che due ordinali non possono essere nella stessa classe di isomorfismo. Vorremmo poi dimostrare

che ogni classe di isomorfismo contiene un ordinale. Enunciamo prima una semplice osservazione.

Oss. Se $f: A \to B$ è un isomorfismo fra $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$, allora preso qualunque $a \in A$ abbiamo $f[A_a] = B_{f(a)}$

Dim

$$x \in B_{f(a)} \Leftrightarrow x <_B f(a) \Leftrightarrow f^{-1}(x) <_A a \Leftrightarrow f^{-1}(x) \in A_a \Leftrightarrow x \in f[A_a]$$ ∎

Prop. Dati $\alpha, \beta \in Ord$, se $(\alpha, <_\alpha) \simeq (\beta, <_\beta)$ allora $\alpha = \beta$.

Dim Sia $f: \alpha \to \beta$ un isomorfismo. Ci basta dimostrare che $\forall \gamma \in \alpha \; f(\gamma) = \gamma$. Sia, per assurdo, γ il minimo elemento di α tale che $f(\gamma) \neq \gamma$. Allora

$$\gamma = \alpha_\gamma = f[\alpha_\gamma] = \beta_{f(\gamma)} = f(\gamma) \quad \text{↯}$$ ∎

Possiamo ora chiederci come si rifletta l'ordinamento totale delle classi di isomorfismo di buoni ordini, dato dalla relazione "essere segmento iniziale di", sugli ordinali. La risposta è che diventa la relazione di appartenenza.

Teo Dati $\alpha, \beta \in Ord$, vale **una e una sola** delle seguenti:

$\alpha \in \beta$ che vale se e solo se $(\alpha, <_\alpha) \lhd (\beta, <_\beta)$

$\alpha = \beta$ ——— " ——— $(\alpha, <_\alpha) \simeq (\beta, <_\beta)$

$\beta \in \alpha$ ——— " ——— $(\beta, <_\beta) \lhd (\alpha, <_\alpha)$

Notazione: d'ora in poi $\alpha \lhd \beta$, $\alpha \simeq \beta$, $\beta \lhd \alpha$.

Dim

Se $\alpha \lhd \beta$ allora, per la definizione di $\lhd$, esiste $\gamma \in \beta$ tale che $\alpha \sim \beta_\gamma$. Però $\beta_\gamma = \gamma$, e, per la proposizione $\alpha \sim \gamma \to \alpha = \gamma$. Abbiamo quindi dimostrato che $\alpha = \gamma \in \beta$. D'altro canto, se $\alpha \in \beta$ allora $\alpha = \beta_\alpha$ quindi $\alpha \lhd \beta$.

Se $\alpha \sim \beta$ la proposizione ci da immediatamente $\alpha = \beta$, ed il viceversa è immediato.

Il caso $\beta \lhd \alpha$ è, infine, simmetrico al primo. ∎

Notazione Dati $\alpha, \beta \in Ord$, $\alpha < \beta \overset{def.}{\equiv} \alpha \in \beta$.

Il teorema precedente ci dice che la relazione $<$ gode delle proprietà di un ordine totale stretto sulla classe degli ordinali.

Esercizio Dimostra che α è un ordinale finito se e solo se $\alpha \in \omega$.

Prop. Siano $\alpha, \beta \in Ord$. $\alpha \leq \beta \overset{def.}{\equiv} \alpha < \beta \vee \alpha = \beta$ $\longleftrightarrow$ $\alpha \subseteq \beta$

Dim

$\to$ Se $\alpha < \beta$ allora $\alpha \in \beta$ quindi $\alpha \subseteq \beta$ per transitività di β.
Se $\alpha = \beta$ allora $\alpha \subseteq \beta$ immediatamente.

$\leftarrow$ Supponiamo per assurdo $\alpha \subseteq \beta$ e $\beta < \alpha$. Allora $\beta \in \alpha \subseteq \beta$.
Ma quindi $\beta \in \beta$ ↯ ∎

Facilissimo esercizio: perché ?

Ricordiamo che $S(\alpha) \overset{\text{def.}}{=} \alpha \cup \{\alpha\}$. La proposizione seguente dice che $S(\alpha)$ è, a buon diritto, il successore di α, anche quando α è un ordinale.

Prop. Dato $\alpha \in Ord$, $S(\alpha)$ è il minimo ordinale $> \alpha$.

Dim Occorre inizialmente verificare che $S(\alpha)$ è un ordinale.

Transitività. Se $\beta \in S(\alpha)$, o $\beta \in \alpha$ o $\beta = \alpha$. In entrambi i casi $\beta \subseteq \alpha \subseteq S(\alpha)$.

Buon ordine. Siccome $S(\alpha)$ è un insieme di ordinali, $\in$ è un ordine totale su $S(\alpha)$. Dato $X \subseteq S(\alpha)$, con $X \neq \emptyset$, abbiamo che o $X = \{\alpha\}$ o $X \cap \alpha \neq \emptyset$. Nel primo caso X ha chiaramente un minimo, nel secondo, $\min(X \cap \alpha)$ è il minimo di X.

Supponiamo, ora $\alpha < \beta$, dobbiamo dimostrare $S(\alpha) \leq \beta$.

$$\alpha < \beta \implies \alpha \in \beta \implies \alpha \subseteq \beta$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$\{\alpha\} \in \beta \implies \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta \implies S(\alpha) \leq \beta. \quad \blacksquare$$

Cor. $\forall \alpha, \beta \in Ord \quad \beta \leq \alpha \leftrightarrow \beta < S(\alpha)$

Prop. Dato un insieme di ordinali X

1. Se $X \neq \emptyset$, allora esiste il minimo di X, detto $\min X$, inoltre $\min X = \bigcap X$.
2. Esiste il minimo dei maggioranti di X, detto $\sup X$, inoltre $\sup X = \bigcup X$.

(gli $\alpha \in Ord$ tali che $\forall \beta \in X \ \beta \leq \alpha$)

3. C'è un ordinale che non appartiene a X.

Dim

1. Dimostriamo, prima, che il minimo esiste. Sia $\alpha \in X$ fissato, che c'è perché $X \neq \emptyset$. Consideriamo $\mu \overset{\text{def.}}{=} \min_{\leq_{S(\alpha)}} (X \cap S(\alpha))$. Questo esiste perché $X \cap S(\alpha) \neq \emptyset$ in quanto α vi appartiene. Vediamo che $\mu = \min X$. Infatti, preso $\beta \in X$, se $\beta \leq \alpha$ allora $\beta \in X \cap S(\alpha)$, quindi $\beta \geq \mu$. Se, però $\alpha < \beta$, allora $\mu < S(\alpha) \in \beta$.

   Ora verifichiamo che $\mu = \bigcap X$. Chiaramente $\forall y \in X \ \mu \leq y$, quindi $\forall y \in X \ \mu \subseteq y$, ossia $\mu \in \bigcap X$. D'altro canto $\mu \in X$, quindi $\bigcap X \subseteq \mu$.

2. Dimostriamo prima che $\bigcup X$ è un ordinale.

   Transitività: Dato $\alpha \in \bigcup X$ esiste $\beta \in X$ tale che $\alpha \in \beta$. Per la transitività di β, $\alpha \subseteq \beta$. Da cui $\alpha \subseteq \bigcup X$.

   Buon ordine. Ogni $\alpha \in \bigcup X$ appartiene a qualche ordinale $\beta \in X$, ed è, quindi, un ordinale. Stabilito che $\bigcup X$ è un insieme di ordinali, è chiaro che un suo sottoinsieme non vuoto è un insieme non vuoto di ordinali. Quindi ha minimo per il punto 1.

   Dimostriamo ora che $\alpha \in \mathrm{Ord}$ è un maggiorante di X se e solo se $\bigcup X \leq \alpha$.

$\forall \alpha \in X\ \alpha \leq \alpha \Leftrightarrow \forall \alpha \in X\ \alpha \leq \alpha \Leftrightarrow \bigcup X \leq \alpha \Leftrightarrow \bigcup X \leq \alpha$

α è un maggiorante di X

3. Immediata, basta prendere $S(\sup X)$. ∎

Con Un insieme di ordinali è un ordinale se e solo se è transitivo.

Dim Il buon ordinamento vale per il punto 2. della proposizione. ∎

Con (paradosso di Burali-Forti)

Ord è una classe propria.

Ossia non esiste l'insieme di tutti gli ordinali

Dim Per il punto 3. della proposizione, se Ord fosse un insieme, esisterebbe un ordinale che non vi appartiene. ∎

Nota Cosa ci è di paradossale nel paradosso di Burali-Forti?

UNA QUESTIONE SUI NUMERI TRANSFINITI.

Nota di **C. Burali-Forti**, in Torino.

Adunanza del 28 marzo 1897.

Scopo principale di questa Nota è di dimostrare, che effettivamente esistono dei *numeri transfiniti* (*) (o *tipi d'ordine*) a, b tali che, a non è eguale, non è minore e non è maggiore di b.

Nel 1897, Cesare Burali-Forti era assolutamente convinto della esistenza dell'insieme di tutti gli ordinali — definiti allora come le classi di isomorfismo di buoni ordini — quello che non sapeva

è se la relazione $\prec$ fosse un ordine totale su questa classe. Burali-Forti credette di poter negare la totalità dell'ordine $\prec$ ragionando per assurdo. Se $\prec$ fosse un ordine totale, si può dimostrare che sarebbe buono, ma allora $\Omega \stackrel{def}{=} [(Ord, \prec)]$, la classe di isomorfismo di $(Ord, \prec)$, sarebbe uno dei membri della classe Ord, e, considerando il suo successore $s(\Omega)$, avremmo $\Omega \prec s(\Omega)$, ma anche $s(\Omega) \prec \Omega$, perché $s(\Omega) \in Ord$. ⇝

Il guaio è che, nello stesso anno, Cantor ha pubblicato una dimostrazione del fatto che la relazione $\prec$ è totale — esattamente l'argomento dei segmenti iniziali isomorfi che abbiamo illustrato nel corso. Come è stata risolta la contraddizione? Concludendo che l'insieme di tutti gli ordinali non esiste? No. Sfortunatamente Burali-Forti aveva capito male la definizione di buon ordine, e ancora così, forse, nessuno se ne sarebbe accorto, ma, quel che è peggio, aveva tentato di correggerla, facendo, in realtà un gran pasticcio. La contraddizione è stata quindi imputata, da Burali-Forti stesso e da Cantor, al bisticcio di definizioni ed il paradosso è stato dimenticato. Cinque anni dopo, Russell si rese conto del fatto che l'assurdo sussiste anche se si usa la definizione corretta di buon ordine, e fu così che il paradosso di Burali-Forti acquisì il suo nome. E tutti vissero felici e contenti.