L'assioma del rimpiazzamento

Gli ordinali di Von Neumann sono eleganti, ma quanti ne abbiamo di questi arnesi? Si può dimostrare che, assumendo i soli assiomi 1-7, il gran totale degli ordinali potrebbe essere

In realtà, questo si chiamerà $\omega+\omega$.

$$Ord \stackrel{?}{=} \{\emptyset, S(\emptyset), \dots S^n(\emptyset), \dots \omega, S(\omega), \dots S^n(\omega), \dots\}$$

la classe degli ordinali raggiungibili a partire da $\emptyset$ o da ω con un numero finito di applicazioni della mappa successore.

Esercizio Dimostra che la classe descritta sopra è effettivamente una classe, ossia è definita da una formula.

Se vogliamo poter rispondere alla domanda "quali ordinali esistono?" occorre un nuovo assioma: l'assioma del rimpiazzamento. Sotto questa ipotesi addizionale, la risposta sarà "tutti quelli che potrebbero esistere", ossia avremo un ordinale per ogni classe di isomorfismo di buoni ordini.

Per formulare l'assioma, ci serve il concetto di funzione classe.

Def Date due classi A e B una *funzione classe* da A a B è una formula insiemistica $\varphi(x,y)$ tale che

$$\forall x \in A \; \exists! y \in B \; \varphi(x,y)$$

Ossia, una funzione classe è una proprietà, espressa nel linguaggio della teoria degli insiemi, che ad ogni $x \in A$ associa un unico $y \in B$.

Notazione Possiamo denotare una funzione classe $\varphi(x,y)$ da A a B mediante la notazione più familiare

$$F : A \to B$$

In questo caso, la scrittura $y = F(x)$ è una semplice abbreviazione:

$$y = F(x) \overset{\text{def.}}{\equiv} y \in B \wedge \varphi(x,y)$$

Esempi Le seguenti sono funzioni classe $V \to V$

$F_1(x) = x$ $\quad F_2(x) = \{x\}$ $\quad F_3(x) = \mathcal{P}(x)$ $\quad F_4(x) = S(x)$

La funzione classe $F_5(x) = \sup(\underbrace{x \cap Ord}_{\overset{\text{def.}}{\equiv} \{a \in x \mid a \in Ord\}})$ è $V \to Ord$.

(8) Assioma* del rimpiazzamento

"Se A è un insieme e $F : V \to V$ è una funzione classe, allora $F[A] \overset{\text{def.}}{\equiv} \{F(x) \mid x \in A\}$ è un insieme."

$$\forall A \; \exists B \; \forall y \quad y \in B \leftrightarrow \exists x \in A \quad y = F(x)$$

*Nota: come per la separazione, questo è uno schema di

assiomi, uno per ogni possibile funzione classe F.

Prop. Data una funzione classe $F: V \to V$

$$\forall A\ \exists! B\ \forall y\quad y \in B \leftrightarrow \exists x \in A\quad y = F(x)$$

Quindi l'insieme $F[A]$ è univocamente determinato.

Dim. Estensionalità. ∎

Oss. Dato un insieme A e una funzione classe $G: A \to V$, esiste ed è unico l'insieme $G[A]$ tale che

$$\forall y\quad y \in G[A] \leftrightarrow \exists x \in A\quad y = G(x)$$

Dim Basta applicare l'assioma alla funzione classe $F: V \to V$

$$y = F(x) \overset{\text{def.}}{\equiv} (x \in A \wedge y = G(x)) \vee (x \notin A \wedge y = \emptyset)$$

Nota: che insieme mettiamo qui è irrilevante.

ossia

$$F(x) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} G(x) & \text{se } x \in A \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infatti $x \in A$ implica $G(x) = F(x)$, per cui $G[A] = F[A]$. ∎

Esercizio Dimostra che, dati due insiemi A e B, esiste il loro prodotto cartesiano $A \times B$, usando l'assioma del rimpiazzamento ma senza usare l'assioma delle parti.

Teo Dato un buon ordine $(A, <)$, esiste un unico ordinale α tale che $(A, <) \sim \alpha$.

Dim L'unicità segue perché $\alpha \sim \alpha' \to \alpha = \alpha'$.

Basta dimostrare l'esistenza di α.

Sia $A' = \{x \in A \mid \exists \gamma \in Ord \ A_x \sim \gamma\}$

Consideriamo la funzione classe $F : A' \longrightarrow Ord$

$$F(x) = \text{l'unico } \gamma \in Ord \text{ tale che } A_x \sim \gamma$$

dove l'unicità vale perché

$$A_x \sim \gamma \wedge A_x \sim \gamma' \Rightarrow \gamma \sim \gamma' \Rightarrow \gamma = \gamma'$$

Vogliamo dimostrare che $\alpha \overset{def.}{=} F[A'] \sim (A, <)$.

Dimostriamo che α è un ordinale, A' è un segmento iniziale di A e $\alpha \sim A'$. Infine concludiamo dimostrando $A' = A$.

1. α è un ordinale. α è un insieme di ordinali, ci basta, quindi, dire che è transitivo. Supponiamo $\beta < \gamma \in \alpha$, dobbiamo dire che $\beta \in \alpha$. Sia $f : \gamma \to A_x$ un isomorfismo, allora $f|_\beta : \beta \to A_{f(\beta)}$ è un isomorfismo, quindi $\beta = F(f(\beta))$.

2. A' è un segmento iniziale di A. Se $y < x \in A'$, allora esiste un isomorfismo $f : A_x \to \gamma$ quindi $f|_{A_y} : A_y \to \gamma_{f(y)}$ è un isomorfismo, e, siccome $\gamma_{f(y)} = f(y)$, abbiamo $A_y \sim f(y)$ per cui $y \in A'$.

3. α ed A' sono isomorfi. Sia $f : A' \to \alpha$ la funzione definita da $f(x) = F(x)$, che esiste per l'assioma di separazione applicato in $A' \times \alpha$. Dimostriamo che f è un isomorfismo di ordini.

La surgettività è immediata perché, per costruzione, abbiamo $\alpha = F[A'] = f[A']$. Verifichiamo la monotonia

$$x < y \Rightarrow A_x \lhd A_y$$

$$\overset{s}{f(x)} \lhd \overset{s}{f(y)} \Rightarrow f(x) < f(y)$$

4. $A' = A$. Se così non fosse A' sarebbe un segmento iniziale proprio di A, avremmo quindi $A' = A_k$ per qualche $k \in A$. Ma allora, per i punti 1-3, $A_k = A' \sim \alpha \in Ord$, quindi, per la definizione di A', $k \in A'$. Però questo contraddice $A' = A_k$. ∎

Una conseguenza del risultato precedente è che possiamo definire le operazioni sugli ordinali come semplice riflesso di quelle sui buoni ordini.

Def. (operazioni sugli ordinali — v.1)
Dati $\alpha, \beta \in Ord$, definiamo $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ e α^β come, rispettivamente, l'unico ordinale tale che

$$\alpha + \beta \sim (\alpha, <_\alpha) + (\beta, <_\beta) \qquad \alpha \cdot \beta \sim (\alpha, <_\alpha) \cdot (\beta, <_\beta)$$

$$\alpha^\beta \sim (\alpha, <_\alpha)^{(\beta, <_\beta)}$$

Esercizio Dimostra che l'insieme introdotto all'inizio della sezione è effettivamente $\omega + \omega$, ossia, più precisamente

$$\forall x \quad x \in \omega + \omega \longleftrightarrow (\exists m \in \omega \; x = m) \vee (\exists n \in \omega \; x = \omega + n)$$

Induzione e ricorsione transfinita

Il piatto forte di questa sezione è una seconda applicazione dell'assioma di rimpiazzamento: il teorema di ricorsione transfinita. Questo risultato sarà più chiaro a chi ha, in precedenza, risolto questo esercizio.

Esercizio Dimostra che esiste un insieme A tale che

$$\forall x \quad x \in A \leftrightarrow x = \emptyset \vee \exists y \in A \quad x = \{y\}$$

ossia, in sostanza, dimostra che esiste

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots\}$$

L'idea chiave per risolvere questo esercizio è contenuta nella dimostrazione del teorema di ricorsione numerabile, che abbiamo già visto. Attenzione, però, che questo teorema non si può applicare direttamente alla situazione dell'esercizio. La soluzione è alla prossima pagina: qui riprendiamo con lo studio della teoria.

TO BE CONTINUED

(ma la soluzione dell'esercizio ci è già)

Soluzione dell'esercizio

Vorremmo definire la funzione classe $F(w) \to V$

$$F(n) = \text{singoletto } n \text{ volta di } \emptyset$$

a questo punto potremmo verificare che $A = F[w]$ soddisfa la richiesta. Occorre quindi dimostrare che la definizione informale di F data sopra è esprimibile nel linguaggio formale della teoria degli insiemi.

Diamo la seguente definizione, per new

$$y = F(n) \overset{\text{def.}}{\equiv} \exists f \begin{cases} f \text{ è una funzione} \\ Dom(f) = S(n) \\ f(0) = \emptyset \\ f(n) = y \\ \forall i \in n \quad f(S(i)) = \{f(i)\} \end{cases}$$

Per dimostrare che F è una funzione classe, ci basta dimostrare che $\forall new \; \exists! f \{ \ldots$, infatti, a questo punto, anche $y = f(n)$ è univocamente determinato. (SENZA LA CONDIZIONE $f(n) = y$)

1. Esistenza. Procediamo per induzione. Il caso $n = 0$ è immediato, basta considerare $f = \{(0, \emptyset)\}$. Nel caso $n = S(m)$, per ipotesi induttiva, abbiamo una funzione f' con $Dom\, f' = n$ $f'(0) = \emptyset$, $\forall i < n \; f'(S(i)) = \{f'(i)\}$.

Ora prendiamo $f = f' \cup \{(n, \{f'(m)\})\}$. Abbiamo

$Dom\ f = (Dom\ f') \cup \{n\} = s(n)$. $f(0) = f'(0) = \emptyset$.

Inoltre, preso $i < n = s(m)$, o $i < m$ o $i = m$.

Nel primo caso $f(s(i)) = f'(s(i)) = \{f'(i)\} = \{f(i)\}$.

Nel secondo $f(s(i)) = f(n) = \{f'(m)\} = \{f(m)\} = \{f(i)\}$.

2. Unicità. Date f_1 e f_2 che soddisfano le condizioni

$Dom(f_*) = s(n)$, $f_*(0) = \emptyset$, $\forall i < n\ f_*(s(i)) = \{f_*(i)\}$

dimostriamo, per induzione su i, che $\forall i \leq n \to f_1(i) = f_2(i)$

Caso $i = 0$: $f_1(0) = \emptyset = f_2(0)$.

Caso $i = s(j)$: $f_1(i) = \{f_1(j)\} = \{f_2(j)\} = f_2(i)$. ($= $ per ipotesi induttiva.)

Ora abbiamo la funzione classe F. È immediato verificare che $F(0) = \emptyset$. Inoltre, dato $n \in \omega$, $F(s(n)) = \{F(n)\}$. Infatti, detta $y = F(s(n))$, e detta f la funzione con $Dom(f) = s(s(n))$ che testimonia $y = F(s(n))$, vediamo che $f_{|s(n)}$ testimonia che $F(n) = f_{|s(n)}(n) = f(n)$. Abbiamo quindi

$$F(s(n)) = f(s(n)) = \{f(n)\} = \{F(n)\}$$

Possiamo finalmente dimostrare che $A \overset{def.}{=} F[\omega]$ soddisfa la richiesta dell'esercizio. Infatti, $\emptyset = F(0) \in A$. Inoltre, preso $y \in A$, abbiamo $y = F(n)$ e $n \neq 0$, quindi $n = s(m)$ per qualche m, e, detto $x = F(m) \in A$, abbiamo $y = F(s(m)) = \{F(m)\} = \{x\}$.