Induzione e ricorsione transfinita

Il piatto forte di questa sezione è una seconda applicazione dell'assioma di rimpiazzamento: il teorema di ricorsione transfinita. Questo risultato sarà più chiaro a chi ha, in precedenza, risolto questo esercizio.

Esercizio Dimostra che esiste un insieme A tale che

$$\forall x \quad x \in A \leftrightarrow x = \emptyset \vee \exists y \in A \quad x = \{y\}$$

ossia, in sostanza, dimostra che esiste

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$$

L'idea chiave per risolvere questo esercizio è contenuta nella dimostrazione del teorema di ricorsione numerabile, che abbiamo già visto. Attenzione, però, che questo teorema non si può applicare direttamente alla situazione dell'esercizio. La soluzione è alla prossima pagina: qui riprendiamo con lo studio della teoria: in particolare, l'induzione transfinita.

Prop (induzione transfinita — v. 1)
Data una formula insiemistica $\varphi(x)$.
Se vale $\forall \alpha \in Ord \ (\forall \beta < \alpha \ \varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha)$
Allora $\forall \alpha \in Ord \ \varphi(\alpha)$.
In termini di classi, rappresentando con C la classe

Soluzione dell'esercizio

Vorremmo definire la funzione classe $F(w) \to V$

$$F(n) = \text{singoletto } n \text{ volta di } \emptyset$$

a questo punto potremmo verificare che $A = F[w]$ soddisfa la richiesta. Occorre quindi dimostrare che la definizione informale di F data sopra è esprimibile nel linguaggio formale della teoria degli insiemi.

Diamo la seguente definizione, per new

$$y = F(n) \overset{\text{def.}}{\equiv} \exists f \begin{cases} f \text{ è una funzione} \\ Dom(f) = S(n) \\ f(0) = \emptyset \\ f(n) = y \\ \forall i \in n \quad f(S(i)) = \{f(i)\} \end{cases}$$

Per dimostrare che F è una funzione classe, ci basta dimostrare che $\forall new \; \exists! f \{ \ldots$, infatti, a questo punto, anche $y = f(n)$ è univocamente determinato. (SENZA LA CONDIZIONE $f(n) = y$)

1. Esistenza. Procediamo per induzione. Il caso $n = 0$ è immediato, basta considerare $f = \{(0, \emptyset)\}$. Nel caso $n = S(m)$, per ipotesi induttiva, abbiamo una funzione f' con $Dom\, f' = n$ $f'(0) = \emptyset$, $\forall i < n \; f'(S(i)) = \{f'(i)\}$.

Ora prendiamo $f = f' \cup \{(n, \{f'(m)\})\}$. Abbiamo

$Dom\ f = (Dom\ f') \cup \{n\} = s(n)$. $f(0) = f'(0) = \emptyset$.

Inoltre, preso $i < n = s(m)$, o $i < m$ o $i = m$.

Nel primo caso $f(s(i)) = f'(s(i)) = \{f'(i)\} = \{f(i)\}$.

Nel secondo $f(s(i)) = f(n) = \{f'(m)\} = \{f(m)\} = \{f(i)\}$.

2. Unicità. Date f_1 e f_2 che soddisfano le condizioni

$Dom(f_*) = s(n)$, $f_*(0) = \emptyset$, $\forall i < n\ f_*(s(i)) = \{f_*(i)\}$

dimostriamo, per induzione su i, che $\forall i \leq n \to f_1(i) = f_2(i)$

Caso $i = 0$: $f_1(0) = \emptyset = f_2(0)$.

Caso $i = s(j)$: $f_1(i) = \{f_1(j)\} = \{f_2(j)\} = f_2(i)$. ($= $ per ipotesi induttiva.)

Ora abbiamo la funzione classe F. È immediato verificare che $F(0) = \emptyset$. Inoltre, dato $n \in \omega$, $F(s(n)) = \{F(n)\}$. Infatti, detta $y = F(s(n))$, e detta f la funzione con $Dom(f) = s(s(n))$ che testimonia $y = F(s(n))$, vediamo che $f_{|s(n)}$ testimonia che $F(n) = f_{|s(n)}(n) = f(n)$. Abbiamo quindi

$$F(s(n)) = f(s(n)) = \{f(n)\} = \{F(n)\}$$

Possiamo finalmente dimostrare che $A \overset{def.}{=} F[\omega]$ soddisfa la richiesta dell'esercizio. Infatti, $\emptyset = F(0) \in A$. Inoltre, preso $y \in A$, abbiamo $y = F(n)$ e $n \neq 0$, quindi $n = s(m)$ per qualche m, e, detto $x = F(m) \in A$, abbiamo $y = F(s(m)) = \{F(m)\} = \{x\}$.

definita da $\varphi(x)$, abbiamo che

se vale $\forall \alpha \in Ord \quad (\forall \beta \in \alpha \; \beta \in C) \to \alpha \in C$

allora $\forall \alpha \in Ord \quad \alpha \in C$

oppure ancora, in forma più concisa

$$(\forall \alpha \in Ord \quad \alpha \subseteq C \to \alpha \in C) \to Ord \subseteq C$$

Dim Per assurdo assumiamo $\neg\varphi(\alpha)$, per l'ipotesi abbiamo $\neg(\forall \beta < \alpha \; \varphi(\beta))$ ossia $\exists \beta < \alpha \; \neg\varphi(\beta)$. Consideriamo il minimo di questi β, ossia $\beta_0 = \min\{\beta \in \alpha \mid \neg\varphi(\beta)\}$. Di nuovo per l'ipotesi $\exists \beta < \beta_0 \; \neg\varphi(\beta)$ contro la minimalità di β. ☐

Nota Il principio di induzione transfinita non è, letteralmente, un teorema della teoria degli insiemi, quanto piuttosto uno schema di teoremi — o metateorema — che ci permette di costruire un diverso teorema per ogni possibile formula φ.

C'è una chiara analogia fra la forma precedente del principio di induzione transfinita e la forma forte della induzione aritmetica. A volte, però, è comodo esprimere l'induzione transfinita in una forma che meglio ricorda il principio di induzione di Peano.

Def Diciamo che $\alpha \in Ord$ è un ordinale successore se $\exists \beta \in Ord \; \alpha = S(\beta)$. Un ordinale $\alpha > 0$ che non è successore è detto ordinale limite.

Oss. Un ordinale α è successore se e solo se ha un massimo elemento.

Dim β è il massimo di α se e solo se α è il minimo ordinale $> \beta$ se e solo se $\alpha = S(\beta)$ ∎

Prop (induzione transfinita – v.2)

Sia $\varphi(x)$ una formula insiemistica. (ipotesi induttiva)

Se
- $\varphi(0)$ "caso base"
- $\forall \gamma \in Ord \quad \varphi(\gamma) \to \varphi(S(\gamma))$ "caso successore"
- Per ogni ordinale limite λ, $(\forall \beta < \lambda \ \varphi(\beta)) \to \varphi(\lambda)$ "caso limite"

allora $\forall \alpha \in Ord \ \varphi(\alpha)$.

Dim

Basta verificare l'ipotesi della v1., ossia che, fissato $\alpha \in Ord$

$$(\forall \beta < \alpha \ \varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha)$$

Se α è limite o 0 abbiamo questa formula tout court.

Altrimenti $\alpha = S(\gamma)$ e abbiamo

$$\forall \beta < \alpha \ \varphi(\beta) \implies \varphi(\gamma) \implies \varphi(S(\gamma)) \equiv \varphi(\alpha)$$ ∎

Ora possiamo dimostrare il teorema di ricorsione transfinita. Faremo uso della notazione introdotta qui sotto.

Nota Data una funzione classe $F : A \to B$ e un insieme $X \subseteq A$ esiste la funzione $f = F|_X : X \to F[X]$

$$a \mapsto F(a)$$

Teo (ricorsione transfinita)

Data una funzione classe $G: V \to V$ esiste un'unica* funzione classe $F: Ord \to V$ tale che

$$\forall \alpha \in Ord \quad F(\alpha) = G(F_{|\alpha})$$

*dove l'unicità va intesa nel senso seguente: date F_1, F_2 come sopra, vale $\forall \alpha \in Ord \; F_1(\alpha) = F_2(\alpha)$.

Dim

L'idea è di costruire una funzione classe $H: Ord \to V$ in maniera tale che, a posteriori, avremo $F_{|\alpha} = H(\alpha)$. Poi, semplicemente, porremo $F(\alpha) \overset{def.}{=} H(s(\alpha))(\alpha)$.
$H(\alpha)$ è l'analogo transfinito di una α-approssimazione nella dimostrazione del teorema di ricorsione numerabile.

Definiamo la funzione classe $H: Ord \to V$ con

$$f = H(\alpha) \overset{def.}{\equiv} \begin{cases} f \text{ è una funzione} \\ \wedge \; Dom(f) = \alpha \\ \wedge \; \forall \beta \in \alpha \quad f(\beta) = G(f_{|\beta}) \end{cases}$$

Verifichiamo, per induzione transfinita su α, che H sia realmente una funzione classe $Ord \to V$, ossia che

$$\forall \alpha \in Ord \quad \exists! s \quad f = H(\alpha).$$

- Caso base. $f = H(0) \iff f = \emptyset$.
- Caso $\alpha = s(\gamma)$. Per ipotesi induttiva esiste ed è unica

$f = H(\gamma)$. Sia $f' = f \cup \{(\gamma, G(f))\}$.

Dimostriamo che $f' = H(\alpha)$. Si vede immediatamente che f' è una funzione e $Dom(f') = Dom(f) \cup \{\gamma\} = \gamma \cup \{\gamma\} = S(\gamma)$.

Preso $\beta \in \alpha$

se $\beta < \gamma$ allora $f'(\beta) = f(\beta) = G(f_{|\beta}) = G(f'_{|\beta})$

se $\beta = \gamma$ allora $f'(\gamma) = G(f) = G(f'_{|\gamma})$

Occorre ora dimostrare l'unicità, ossia che se $g = H(\alpha)$ allora $g = f'$. Siccome $Dom(g) = Dom(f') = \alpha$, ci basta verificare che, dato $\delta \in \alpha$, $g(\delta) = f'(\delta)$. Segue dalla definizione che $g_{|\gamma} = H(\gamma)$, e, per l'unicità di $H(\gamma)$, $g_{|\gamma} = f$. Quindi, se $\delta < \gamma$, allora $g(\delta) = g_{|\gamma}(\delta) = f(\delta) = f'(\delta)$. Altrimenti $\delta = \gamma$ e $g(\gamma) = G(g_{|\gamma}) = G(f) = f'(\gamma)$.

- Caso limite. Sia λ un ordinale limite. Assumiamo, per ipotesi induttiva, $\forall \beta < \lambda \; \exists! f \; f = H(\beta)$. Dobbiamo dimostrare $\exists! g \; g = H(\lambda)$. Per l'assioma di rimpiazzamento esiste l'insieme $H[\lambda]$. Poniamo $h = \bigcup H[\lambda]$. Vogliamo dimostrare che $g = H(\lambda) \leftrightarrow g = h$.

Per cominciare, dimostriamo che $h = H(\lambda)$.

- h è una funzione.

  Dobbiamo dire che dati $f_1, f_2 \in H[\lambda]$, questi coincidono sull'intersezione dei loro domini. Siano $f_1 = H(\beta_1)$

$f_2 = H(\beta_2)$. Senza perdita di generalità $\beta_1 < \beta_2$.
Ora, segue dalla definizione che $f_{2|\beta_1} = H(\beta_1)$, per cui, sfruttando l'ipotesi induttiva, $f_{2|\beta_1} = f_1$.

- $\mathrm{Dom}\ h = \lambda$

$\mathrm{Dom}\ h = \bigcup \{ \mathrm{Dom}\ H(\beta) \mid \beta \in \lambda \} = \bigcup \{ \beta \mid \beta \in \lambda \} = \lambda$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo sfruttato il fatto che λ è un ordinale limite

- $\forall \beta < \lambda \quad h(\beta) = G(h_{|\beta})$.

Dato $\beta < \lambda$, siccome λ è limite, $s(\beta) < \lambda$, quindi, detta $f = H(s(\beta))$ abbiamo $h(\beta) = f(\beta) = G(f_{|\beta}) = G(h_{|\beta})$.

Supponiamo, ora, $g = H(\lambda)$, dobbiamo dimostrare $g = h$. Dato $\beta < \lambda$, abbiamo $g_{|\beta} = h_{|\beta} = H(\beta)$ per l'unicità di $H(\beta)$, che abbiamo per ipotesi induttiva. Quindi

$$g(\beta) = G(g_{|\beta}) = G(h_{|\beta}) = h(\beta)$$

Abbiamo stabilito che H è una funzione classe. Definiamo

$$y = F(\alpha) \overset{\text{def.}}{\equiv} \exists f \quad f = H(s(\alpha)) \wedge y = f(\alpha)$$

Dobbiamo verificare che $F(\alpha) = G(F_{|\alpha})$. Detta $f = H(s(\alpha))$ osserviamo che $F_{|\alpha} = f_{|\alpha}$. Preso, infatti, $\beta < \alpha$, e $f' = H(s(\beta))$, abbiamo $F(\beta) = f'(\beta) = f(\beta)$ dove l'ultima uguaglianza vale perché le funzioni $H(-)$ coincidono sull'intersezione dei loro domini.

A questo punto $F(\alpha) = f(\alpha) = G(f_{|\alpha}) = G(F_{|\alpha})$.

Resta da dimostrare l'unicità di F. Ossia che dato F_1 e F_2 tali che $\forall \alpha \in Ord \quad F_1(\alpha) = G(F_{1|\alpha})$

$\forall \alpha \in Ord \quad F_2(\alpha) = G(F_{2|\alpha})$

allora $\forall \alpha \in Ord \quad F_1(\alpha) = F_2(\alpha)$.

Per induzione transfinita (v.i) possiamo assumere che $\forall \beta < \alpha \quad F_1(\beta) = F_2(\beta)$. Ma allora $F_{1|\alpha} = F_{2|\alpha}$, quindi

$$F_1(\alpha) = G(F_{1|\alpha}) = G(F_{2|\alpha}) = F_2(\alpha).$$

Come per l'induzione, possiamo esprimere la ricorsione transfinita separando i casi zero, successore e limite.

Def Date due classi A, B definiamo la classe $A \times B$

$$x \in A \times B \overset{def}{\equiv} \exists a \in A \; b \in B \; x = (a, b)$$

Cor (del teorema di ricorsione transfinita)
Date funzioni classe $G_1 : Ord \times V \to V$ e $G_2 : V \to V$. Dato x_0 un insieme. Esiste un'unica funzione classe F tale che

$$F(0) = x_0$$

$$\forall \alpha \in Ord \quad F(s(\alpha)) = G_1(\alpha, F(\alpha))$$

$$\forall \lambda \in Ord \quad \lambda \text{ limite} \to F(\lambda) = G_2(F|_\lambda)$$

Dim

Applichiamo il teorema con la seguente funzione G

$$G(f) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } f \text{ non è funzione con } Dom(f) \in Ord \\ x_0 & \text{se } f = \emptyset \\ G_1(\alpha, f(\alpha)) & \text{se } Dom(f) = \alpha + 1 \text{ per qualche } \alpha \in Ord \\ G_2(f) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Con. Esistono le funzioni (classe!) di somma, prodotto e potenza di ordinali così definite:

$$\alpha + 0 = \alpha$$
$$\alpha + (s(\beta)) = s(\alpha + \beta)$$
$$\alpha + \lambda = \sup \{\alpha + \beta \mid \beta < \lambda\}$$

$$\alpha \cdot 0 = 0$$
$$\alpha \cdot s(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$$
$$\alpha \cdot \lambda = \sup \{\alpha \cdot \beta \mid \beta < \lambda\}$$

$$\alpha^0 = 1$$
$$\alpha^{s(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha$$
$$\alpha^\lambda = \sup \{\alpha^\beta \mid \beta < \lambda\}$$

Ossia, le operazioni aritmetiche sugli ordinali si possono definire in modo analogo alle operazioni aritmetiche su ω nei casi 0 e successore, estendendo con continuità nel caso limite.

Def Una funzione classe $F : Ord \to Ord$ mai decrescente — $\alpha < \beta \to F(\alpha) \leq F(\beta)$ — si dice continua se, per ogni ordinale limite λ vale $F(\lambda) = \sup F[\lambda]$.

Nota Sarebbe corretto osservare che, letteralmente, il teorema di ricorsione transfinita non pare sufficiente a garantire l'esistenza, per esempio, della funzione classe

$+ : Ord \times Ord \to Ord$. Il problema è che, fissato α, possiamo costruire ricorsivamente la funzione classe "$\alpha +$" $Ord \to Ord$, ma abbiamo, a quanto pare, una diversa funzione per ogni possibile α. Ci sono due vie di uscita da questo impasse.

La più solida è, forse, dimostrare una versione parametrica del teorema, in cui sia G sia F hanno un argomento in più, un parametro, per accomodare α. Questa è una operazione del tutto elementare, ma aggiunge burocrazia alla dimostrazione, che è già complicata abbastanza.

La seconda strada è, tuttavia, osservare che il teorema si trova già in forma parametrica, anche se non si vede. Una funzione classe non è, infatti, altro che una formula insiemistica — con determinate proprietà — e nulla vieta che questa formula contenga una variabile libera α. Il teorema di ricorsione transfinita dice che, se una certa formula — quella che definisce G — è una funzione classe, allora un'altra formula — quella di F — scritta esplicitamente nella dimostrazione è anch'essa una funzione classe. Ebbene, se la formula per G ha una variabile libera α, questa variabile comparirà altresì nella formula di F, ed avremo così,

in realtà, una funzione classe di due argomenti: a e l'argomento di F.

Comunque sia, questa dei parametri è una sottigliezza che, al livello del nostro corso, si può trascurare. Sono sicuro che, chiunque sia giunto a padroneggiare la materia abbastanza da rendersi conto del problema, capirà anche che la sua soluzione non presenta difficoltà.