$+ : Ord \times Ord \to Ord$. Il problema è che, fissato α, possiamo costruire ricorsivamente la funzione classe "$\alpha +$" $Ord \to Ord$, ma abbiamo, a quanto pare, una diversa funzione per ogni possibile α. Ci sono due vie di uscita da questo impasse.

La più solida è, forse, dimostrare una versione parametrica del teorema, in cui sia G sia F hanno un argomento in più, un parametro, per accomodare α. Questa è una operazione del tutto elementare, ma aggiunge burocrazia alla dimostrazione, che è già complicata abbastanza.

La seconda strada è, tuttavia, osservare che il teorema si trova già in forma parametrica, anche se non si vede. Una funzione classe non è, infatti, altro che una formula insiemistica — con determinate proprietà — e nulla vieta che questa formula contenga una variabile libera α. Il teorema di ricorsione transfinita dice che, se una certa formula — quella che definisce G — è una funzione classe, allora un'altra formula — quella di F — scritta esplicitamente nella dimostrazione è anch'essa una funzione classe. Ebbene, se la formula per G ha una variabile libera α, questa variabile comparirà altresì nella formula di F, ed avremo così,

in realtà, una funzione classe di due argomenti: α e l'argomento di F.

Comunque sia, questa dei parametri è una sottigliezza che, al livello del nostro corso, si può trascurare. Sono sicuro che, chiunque sia giunto a padroneggiare la materia abbastanza da rendersi conto del problema, capirà anche che la sua soluzione non presenta difficoltà.

Prop: $\alpha+\beta \sim (\alpha, <_\alpha) + (\beta, <_\beta)$

$\alpha \cdot \beta \sim (\alpha, <_\alpha) \cdot (\beta, <_\beta)$

$\alpha^\beta \sim (\alpha, <_\alpha)^{(\beta, <_\beta)}$

Ossia: che si definiscano le operazioni sugli ordinali per ricorsione, o che lo si faccia mediante le corrispondenti operazioni sui buoni ordini, il risultato è il medesimo.

Dim

Per induzione transfinita (seconda versione) su β.

I casi 0 e successore sono conseguenza immediata dalla definizione delle operazioni sui buoni ordini. Vediamo i limiti.

$\alpha + \lambda \sim (\alpha, <_\alpha) + (\lambda, <_\lambda)$ ← per def. $\sim (\alpha \sqcup \lambda, <_+)$

Fissiamo l'ordinale $\gamma \sim (\alpha, <_\alpha) + (\lambda, <_\lambda)$ e l'isomorfismo $f : \alpha \sqcup \lambda \to \gamma$. Vogliamo calcolare $\alpha + \lambda = \bigcup \{\alpha+\beta \mid \beta < \lambda\}$.

Ora, per ipotesi induttiva, se $\beta < \lambda$ allora $\alpha + \beta \sim \alpha \sqcup \beta$ dove

$\alpha \sqcup \beta$ è inteso ordinato dall'ordine lessicografico, che coincide con l'ordinamento indotto da $(\alpha, <_\alpha) + (\lambda, <_\lambda)$. Siccome $\alpha \sqcup \beta$ è segmento iniziale di $\alpha \sqcup \lambda$, $f[\alpha \sqcup \beta] = \alpha + \beta$. Ora, siccome λ è limite, $\lambda = \bigcup \{\beta \mid \beta < \lambda\}$. Quindi

$$\gamma = f[\alpha \sqcup \lambda] = \bigcup \{f[\alpha \sqcup \beta] \mid \beta < \lambda\}$$
$$= \bigcup \{\alpha + \beta \mid \beta < \lambda\} = \alpha + \lambda.$$

$\alpha \cdot \lambda \sim (\alpha, <_\alpha) \cdot (\lambda, <_\lambda)$ ← per def. $\sim (\alpha \times \lambda, <_\times)$

Procediamo, come prima, fissando

$\gamma \sim (\alpha, <_\alpha) \cdot (\lambda, <_\lambda)$ e $f : \alpha \times \lambda \to \gamma$ isomorfismo

Nuovamente $\beta < \lambda \to f[\alpha \times \beta] = \alpha \cdot \beta$ e

$$\gamma = f[\alpha \times \lambda] = \bigcup \{f[\alpha \times \beta] \mid \beta < \lambda\}$$
$$= \bigcup \{\alpha \times \beta \mid \beta < \lambda\} = \alpha + \lambda.$$

$\alpha^\lambda \sim (\alpha, <_\alpha)^{(\lambda, <_\lambda)}$

In questo caso, si ripropone il ragionamento dei due casi precedenti, con un leggero problema tecnico. Dato $\beta < \lambda$, nei due casi precedenti, abbiamo usato il fatto che $\alpha \sqcup \beta$ e $\alpha \times \beta$ sono, rispettivamente, segmenti iniziali di $\alpha \sqcup \lambda$ e $\alpha \times \lambda$, che poi scriviamo come unione, appunto, di questi sottoinsiemi. Il guaio, adesso, è che l'insieme delle funzioni $\beta \to \alpha$ a sup-
porto

finito non è neppure sottoinsieme dell'insieme delle funzioni $\lambda \to \alpha$ a supporto finito. La soluzione è semplice: detti

$$SF(\Pi \to \alpha) \equiv \{ g : \Pi \to \alpha \text{ a supporto finito} \}$$

$$\bar{E}xT_\beta^\alpha : SF(\beta \to \alpha) \longrightarrow SF(\lambda \to \alpha)$$

$$g \longmapsto h \quad \text{con} \quad h_{|\beta} = g$$

Ossia l'operatore che estende una $g : \beta \to \alpha$ con 0 su $\lambda \setminus \beta$. e $\forall \delta \in \lambda \setminus \beta \; h(\delta) = 0$

È chiaro che $\bar{E}xT_\beta^\alpha [SF(\beta \to \alpha)] \sim SF(\beta \to \alpha)$, perché l'ordine $g_1 <_{Lex} g_2$ su $SF(\Pi \to \alpha)$ è definito confrontando le immagini del massimo x tale che $g_1(x) \neq g_2(x)$, e, sugli $x \in \lambda \setminus \beta$, le funzioni nell'immagine di $\bar{E}xT_\beta^\alpha$ sono identicamente 0. Inoltre, $\bar{E}xT_\beta^\alpha [SF(\beta \to \alpha)]$ è un segmento iniziale di $SF(\beta \to \alpha)$. Possiamo quindi replicare l'argomento dei punti precedenti.

Fissiamo $\gamma \sim (\alpha, <_\alpha)^{(\lambda, <_\lambda)}$ e l'isomorfismo $f : SF(\lambda \to \alpha) \to \gamma$. Per ipotesi induttiva, dato $\beta < \lambda$,

$$\bar{E}xT_\beta^\alpha [SF(\beta \to \alpha)] \sim SF(\beta \to \alpha) \sim \alpha^\beta$$

quindi, sfruttando il fatto che $\bar{E}xT_\beta^\alpha [SF(\beta \to \alpha)]$ è un segmento iniziale di $SF(\lambda \to \alpha)$, abbiamo

$$f[\bar{E}xT_\beta^\alpha [SF(\beta \to \alpha)]] = \alpha^\beta$$

Ora, data una $g \in SF(\lambda \to \alpha)$, detto $\delta = \max(\mathrm{Supp}\, g)$, siccome λ è limite, $\delta < s(\delta) < \lambda$, e $g \in \bar{E}xT_{s(\delta)}^\alpha [SF(s(\delta) \to \alpha)]$, quindi

$$SF(\lambda \to \alpha) = \bigcup \{ \bar{E}xT_\beta^\alpha [SF(\beta \to \alpha)] \mid \beta < \alpha \}$$

Di conseguenza

$$\gamma = f[SF(\lambda \to \alpha)] = \bigcup \{ f[ext^{\alpha}_{\beta}[SF(\beta \to \alpha)]] \mid \beta < \alpha \}$$
$$= \bigcup \{ \alpha^{\beta} \mid \beta < \alpha \} = \alpha^{\lambda}$$ ☐

Per la proposizione precedente, la definizione ricorsiva delle operazioni aritmetiche fra ordinali equivale a quella basata sulle operazioni fra buoni ordini. Quella ricorsiva è una definizione intensionale — il termine è parente più prossimo di intendere che di intenso — ossia specifica le proprietà che caratterizzano un certo oggetto, in questo caso le operazioni ordinali. L'altra è una definizione estensionale — ossia descrive l'oggetto definito. Generalmente, la difficoltà con le definizioni intensionali è dimostrare che il definiendo esiste, con le definizioni estensionali è, invece, ricavarne le proprietà.

Aritmetica ordinale & forma normale di Cantor

In questa sezione studieremo nel dettaglio le proprietà delle operazioni aritmetiche fra gli ordinali. Il risultato principale sarà che ogni ordinale α si scrive, in modo unico, nella forma

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

con $n \in \omega$, $k_1, k_2, \dots, k_n \in \omega \setminus \{0\}$ e $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$.

Con queste forme normali di Cantor è possibile calcolare le operazioni aritmetiche in modo esplicito.

Nota Per procedere con ordine, assumeremo la definizione ricorsiva delle operazioni ordinali e procederemo unicamente da quella.

Prop Le funzioni $(\alpha,\beta)\mapsto \alpha+\beta$ $(\alpha,\beta)\mapsto \alpha\cdot\beta$ $(\alpha,\beta)\mapsto \alpha^\beta$ sono strettamente crescenti nel secondo argomento — per $\alpha+\beta$ assumendo $\alpha\neq 0$, per α^β assumendo $1<\alpha$ — e mai-decrescenti nel primo argomento.

Per dimostrare la proposizione, ci serviranno queste note.

Nota: Dati due insiemi di ordinali X, Y non vuoti:

$$\forall \alpha\in X\ \exists \beta\in Y\ \alpha\leq\beta \rightarrow \sup X \leq \sup Y$$

Dim (nota)

Basta osservare che se γ è un maggiorante di Y, allora è anche un maggiorante di X. Infatti, preso $\alpha\in X$ esiste $\beta\in Y$ con $\alpha\leq\beta$, e, siccome $\beta\leq\gamma$, abbiamo $\alpha\leq\gamma$.

Ora $\sup Y$ è un maggiorante di Y, quindi di X, quindi è $\geq \sup X$. ∎

Nota La funzione $\alpha\mapsto s(\alpha)$ è crescente.

Dim (nota) $\alpha<\beta \leftrightarrow s(\alpha)\leq\beta \leftrightarrow s(\alpha)<s(\beta)$ ∎

Dim (proposizione)

$\beta \mapsto \alpha+\beta$ è strettamente crescente

Dobbiamo dire che dati $\beta<\gamma$ vale $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$. Procediamo per induzione transfinita (v. 2) su γ.

Caso $\gamma=0$. Vero a vuoto.

Caso $\gamma=s(\delta)$. Siccome $\beta<s(\delta)$, abbiamo $\beta\leq\delta$, quindi

$$\alpha+\beta \leq \alpha+\delta < s(\alpha+\delta) = \alpha+s(\delta) = \alpha+\gamma$$

Dove la prima disuguaglianza si ha perché o $\beta=\delta$ o $\beta<\delta$. Nel primo caso $\alpha+\beta=\alpha+\delta$, nel secondo, per ipotesi induttiva, $\alpha+\beta<\alpha+\delta$.

Caso $\gamma=\lambda$ limite. Dato $\beta<\lambda$, abbiamo $s(\beta)<\lambda$, quindi

$$\alpha+\beta < \alpha+s(\beta) \leq \sup\{\alpha+\delta \mid \delta<\lambda\} = \alpha+\lambda$$

Dove la prima disuguaglianza vale per ipotesi induttiva.

$\alpha \mapsto \alpha+\beta$ è mai-decrescente.

Dobbiamo dire che se $\alpha<\gamma$, allora $\alpha+\beta\leq\gamma+\beta$. Procediamo per induzione transfinita su β.

Caso $\beta=0$. Immediato.

Caso $\beta=s(\delta)$. Per ipotesi induttiva $\alpha+\delta\leq\gamma+\delta$, e

$$\alpha+\beta = s(\alpha+\delta) \leq s(\gamma+\delta) = \beta+\delta$$

Caso $\beta = \lambda$ limite. Dobbiamo dimostrare che

$$\alpha + \lambda = \sup\{\alpha + \delta \mid \delta < \lambda\} \leq \sup\{\gamma + \delta \mid \delta < \lambda\} = \gamma + \lambda$$

Basta applicare la prima nota osservando che $\alpha + \delta \leq \gamma + \delta$ per ipotesi induttiva.

Le dimostrazioni per il prodotto e l'esponenziale ripetono per disgraziamento lo schema delle precedenti, restano quindi per esercizio. Unica osservazione: nel passo induttivo del prodotto si deve usare il risultato per la somma, e nel passo induttivo dell'esponenziale si deve usare il prodotto. ∎

Esercizio Le ipotesi che $\alpha \neq 0$ per il prodotto e $1 < \alpha$ per l'esponenziale dove sono usate?

Prop: Dati $\alpha, \beta, \gamma \in Ord$

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \qquad \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$
$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \qquad \alpha^{\beta + \gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$$
$$(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$$

Nota: Abbiamo già asserito la proposizione corrispondente per i buoni ordinamenti, ma lasciando la dimostrazione per esercizio. Lasceremo comunque parte della dimostrazione per esercizio, ma non invano: è un esercizio più facile.

Oss Dato $X \subseteq Ord$, se $\sup X \notin X$, allora $\sup X$ è limite.

Dim Se, per assurdo $\sup X = s(\alpha)$, allora, siccome $\sup X$ non è elemento di X, $\forall \beta \in X \ \beta < \sup X$, quindi abbiamo anche $\forall \beta \in X \ \beta \leq \alpha$, per cui α è un maggiorante di X. ☐

Oss. Dati $X \subseteq Ord$ e $\alpha \in Ord$

$$\alpha + \sup X = \sup \{\alpha + \beta \mid \beta \in X\}$$
$$\alpha \cdot \sup X = \sup \{\alpha \cdot \beta \mid \beta \in X\}$$
$$\alpha^{\sup X} = \sup \{\alpha^{\beta} \mid \beta \in X\}$$

Dim Le dimostrazioni sono uguali. Vediamo la prima.
Se $\sup X \in X$, l'enunciato è immediato.
Supponiamo, quindi $\lambda = \sup X \notin X$. Dobbiamo dimostrare che

$$\alpha + \lambda = \sup \underbrace{\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \lambda\}}_{A} = \sup \underbrace{\{\alpha + \beta \mid \beta \in X\}}_{B}$$

Basta dire che dato $\gamma_1 < \lambda$ esiste $\beta_1 \in X$ con $\alpha + \gamma_1 \leq \alpha + \beta_1$ e, viceversa, dato $\beta_2 \in X$ esiste $\gamma_2 < \lambda$ con $\alpha + \beta_2 \leq \alpha + \gamma_2$. Preso $\gamma_1 < \lambda$, γ_1 non è un maggiorante di X, quindi esiste $\beta_1 \in X$ con $\gamma_1 < \beta_1$, e, per la monotonia di $+$, $\alpha + \gamma_1 < \alpha + \beta_1$. Preso $\beta_2 \in X$, siccome $\lambda = \sup X$ è limite, $\beta_2 < s(\beta_2) < \lambda$, quindi, ponendo $\gamma_2 = s(\beta_2)$ $\alpha + \beta_2 < \alpha + \gamma_2$. ☐

Dim (proposizione) Sono tutte facili induzioni su γ. Vediamo la prima, le altre restano come esercizio. Conviene affrontarle nell'ordine in cui sono scritte, sinistra - destra, alto - basso.

Dimostriamo $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ per induzione su γ.

Caso $\gamma=0$. $(\alpha+\beta)+0 = \alpha+\beta = \alpha+(\beta+0)$.

Caso $\gamma=s(\delta)$.

$$(\alpha+\beta)+s(\delta) = s\big(\overbrace{(\alpha+\beta)+\delta}^{\text{Ipotesi induttiva}}\big) = s\big(\overbrace{\alpha+(\beta+\delta)}^{\text{Ipotesi induttiva}}\big)$$
$$= \alpha+s(\beta+\delta) = \alpha+(\beta+s(\delta))$$

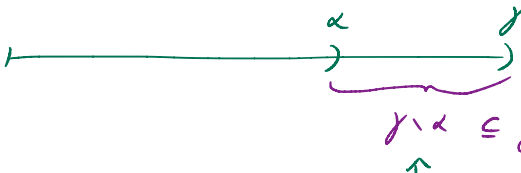
Caso $\gamma=\lambda$ limite.

$$(\alpha+\beta)+\lambda = \sup\{(\alpha+\beta)+\delta \mid \delta<\lambda\}$$
$$= \sup\{\alpha+(\beta+\delta) \mid \delta<\lambda\} \quad \text{(per l'ipotesi induttiva)}$$
$$= \alpha+\sup\{\beta+\delta \mid \delta<\lambda\} = \alpha+(\beta+\lambda)$$ ∎

Introduciamo, ora, due lemmi che serviranno per calcolare la forma normale di Cantor di un ordinale: la sottrazione e la divisione di ordinali.

Lemma (sottrazione di ordinali)
Siano $\alpha,\gamma \in Ord$, con $\alpha \leq \gamma$, esiste un unico β tale che $\alpha+\beta=\gamma$.

Intuitivamente: $\gamma \sim \alpha \sqcup (\gamma \setminus \alpha)$ dove $\gamma\setminus\alpha = \{\delta\in\gamma \mid \delta\notin\alpha\}$.



β è il tipo d'ordine di questo.

Vediamo ora una dimostrazione formale.