Dimostriamo $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ per induzione su γ.

Caso $\gamma=0$. $(\alpha+\beta)+0 = \alpha+\beta = \alpha+(\beta+0)$.

Caso $\gamma=s(\delta)$.

$$(\alpha+\beta)+s(\delta) = s\big(\overbrace{(\alpha+\beta)+\delta}^{\text{Ipotesi induttiva}}\big) = s\big(\overbrace{\alpha+(\beta+\delta)}^{\text{Ipotesi induttiva}}\big)$$
$$= \alpha+s(\beta+\delta) = \alpha+(\beta+s(\delta))$$

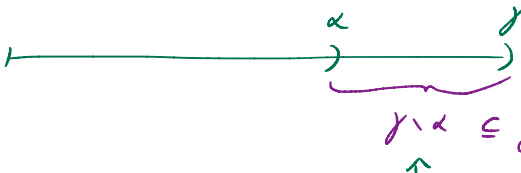
Caso $\gamma=\lambda$ limite.

$$(\alpha+\beta)+\lambda = \sup\{(\alpha+\beta)+\delta \mid \delta<\lambda\}$$
$$= \sup\{\alpha+(\beta+\delta) \mid \delta<\lambda\} \quad \text{(per l'ipotesi induttiva)}$$
$$= \alpha+\sup\{\beta+\delta \mid \delta<\lambda\} = \alpha+(\beta+\lambda)$$ ∎

Introduciamo, ora, due lemmi che serviranno per calcolare la forma normale di Cantor di un ordinale: la sottrazione e la divisione di ordinali.

Lemma (sottrazione di ordinali)
Siano $\alpha,\gamma \in Ord$, con $\alpha \leq \gamma$, esiste un unico β tale che $\alpha+\beta=\gamma$.

Intuitivamente: $\gamma \sim \alpha \sqcup (\gamma \setminus \alpha)$ dove $\gamma\setminus\alpha = \{\delta\in\gamma \mid \delta\notin\alpha\}$.



β è il tipo d'ordine di questo.

Vediamo ora una dimostrazione formale.

Dim Abbiamo l'unicità poiché la funzione + è crescente nel secondo argomento. Dimostriamo l'esistenza. Se $\alpha = \gamma$ l'enunciato è ovvio. Assumiamo quindi $\alpha < \gamma$. Consideriamo il minimo δ tale che $\gamma < \alpha + \delta$ — δ esiste poiché $\gamma < s(\gamma) \leq \alpha + s(\gamma)$. Se δ è successore, sia $\delta = s(\beta)$. Allora $\alpha + \beta \leq \gamma < s(\alpha + \beta)$, e $\gamma = \alpha + \beta$.

Ci basta quindi mostrare che δ non è limite (ovviamente non è 0). Se lo fosse, $\gamma < \alpha + \delta = \sup \{\alpha + \varepsilon \mid \varepsilon < \delta\}$, ma allora esiste $\varepsilon < \delta$ tale che $\gamma < \alpha + \varepsilon$ contro la minimalità di δ. ⬛

Lemma (divisione euclidea di ordinali)
Dati $\alpha, \gamma \in Ord$, con $\alpha \neq 0$, esistono e sono unici $\beta, \rho \in Ord$ tali che $\rho < \alpha$ e $\alpha \cdot \beta + \rho = \gamma$.

Dim
Unicità: per il lemma precedente, fissato β, ρ è unico. Dobbiamo quindi dimostrare l'unicità di β. Supponiamo per assurdo $\alpha \cdot \beta + \rho = \alpha \cdot \beta' + \rho'$ con $\beta < \beta'$ e $\rho, \rho' < \alpha$. Allora
$\alpha \cdot \beta + \rho < \alpha \cdot \beta + \alpha = \alpha \cdot s(\beta) \leq \alpha \cdot \beta' \leq \alpha \cdot \beta' + \rho' = \alpha \cdot \beta + \rho$ ⬛

Esistenza: Come nella dimostrazione del lemma precedente, consideriamo il minimo δ tale che $\gamma < \alpha \cdot \delta$ — che esiste in quanto $\gamma \leq \alpha \cdot \gamma < \alpha \cdot s(\gamma)$. Se δ è successore, sia $\delta = s(\beta)$. Allora $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$ quindi esiste ρ tale che $\alpha \cdot \beta + \rho = \gamma$. Per concludere il caso δ successore, ci basta quindi dimostrare

che $\rho < \alpha$. Se, per assurdo, $\alpha \leq \rho$, allora

$$\gamma < \alpha \cdot s(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha \leq \alpha \cdot \beta + \rho = \gamma \quad \lightning$$

Dobbiamo infine escludere che δ sia limite. Se lo fosse, avremmo $\gamma < \alpha \cdot \delta = \sup\{\alpha \cdot \varepsilon \mid \varepsilon < \delta\}$, ma allora esiste $\varepsilon < \delta$ tale che $\gamma < \alpha \cdot \varepsilon$ contro la minimalità di δ. ∎

Teo (forma normale di Cantor)
Ogni ordinale α può essere espresso in maniera unica come somma finita

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

con $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$ ordinali e $k_1, k_2, \dots, k_n \in \omega \setminus \{0\}$.

Dim

Esistenza: Per induzione transfinita, supponiamo che ogni ordinale $< \alpha$ abbia una forma normale, dobbiamo dimostrare che α ha una forma normale. Sia γ minimo tale che $\alpha < \omega^\gamma$, che c'è perché $\alpha < \omega^{s(\alpha)}$. Come nei lemmi precedenti, consideriamo il caso γ successore. Sia $\gamma = s(\beta_1)$, allora

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \rho$$

con $\rho < \omega^{\beta_1}$. Osserviamo intanto che $0 < k_1 < \omega$. Infatti

$0 = k_1 \Rightarrow \alpha = \rho < \omega^{\beta_1}$ contro la minimalità di γ $\lightning$

$\omega \leq k_1 \Rightarrow \omega^\gamma = \omega^{s(\beta_1)} \leq \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \rho = \alpha$ $\lightning$

Ora, $\rho < \omega^{\beta_1} \leq \alpha$, quindi, per ipotesi induttiva, ρ si può

scrivere come somma finita

$$\rho = w^{\beta_2}\cdot k_2 + \dots + w^{\beta_n} k_n$$

Siccome $\rho < w^{\beta_1}$, abbiamo $\beta_2 < \beta_1$. Quindi

$$\alpha = w^{\beta_1}\cdot k_1 + \rho = w^{\beta_1}\cdot k_1 + w^{\beta_2}\cdot k_2 + \dots + w^{\beta_n}\cdot k_n$$

è una forma normale.

Il caso γ limite si esclude, come al solito, osservando che, altrimenti, $\alpha < w^\gamma = \sup\{w^\varepsilon \mid \varepsilon < \gamma\}$ implica che $\alpha < w^\varepsilon$ per qualche $\varepsilon < \gamma$, contro la minimalità di γ.

Unicità: Sia α minimo che non ha un'unica forma normale.

$$\alpha = w^{\beta_1}\cdot k_1 + w^{\beta_2}\cdot k_2 + \dots + w^{\beta_n} k_n$$
$$= w^{\beta_1'} k_1' + w^{\beta_2'}\cdot k_2' + \dots + w^{\beta_{n'}'} k_{n'}'$$

Ci basta dire che $\beta_1 = \beta_1'$ e $k_1 = k_1'$, infatti allora

$$w^{\beta_2}\cdot k_2 + \dots + w^{\beta_n} k_n = w^{\beta_2'}\cdot k_2' + \dots + w^{\beta_{n'}'} k_{n'}' < w^{\beta_1}$$

contro la minimalità di α.

Supponiamo $\beta_1 = \beta_1'$, allora $w^{\beta_1}\cdot k_1 + \underbrace{\dots}_{<w^{\beta_1}} = w^{\beta_1}\cdot k_1' + \underbrace{\dots}_{<w^{\beta_1}}$ quindi $k_1 = k_1'$ per la divisione euclidea.

Se infine $\beta_1 < \beta_1'$ abbiamo

$$w^{\beta_1}\cdot k_1 + w^{\beta_2}\cdot k_2 + \dots + w^{\beta_n} k_n < w^{s(\beta_1)} \leq w^{\beta_1'} k_1' + \dots$$

Esercizio: dimostrare le disuguaglianze in viola (sono tutte uguali). ∎