scrivere come somma finita

$$\rho = w^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + w^{\beta_n} k_n$$

Siccome $\rho < w^{\beta_1}$, abbiamo $\beta_2 < \beta_1$. Quindi

$$\alpha = w^{\beta_1} \cdot k_1 + \rho = w^{\beta_1} \cdot k_1 + w^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + w^{\beta_n} \cdot k_n$$

è una forma normale.

Il caso γ limite si esclude, come al solito, osservando che, altrimenti, $\alpha < w^\gamma = \sup \{ w^\varepsilon \mid \varepsilon < \gamma \}$ implica che $\alpha < w^\varepsilon$ per qualche $\varepsilon < \gamma$, contro la minimalità di γ.

Unicità: Sia α minimo che non ha un'unica forma normale.

$$\alpha = w^{\beta_1} \cdot k_1 + w^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + w^{\beta_n} k_n$$
$$= w^{\beta_1'} k_1' + w^{\beta_2'} \cdot k_2' + \dots + w^{\beta_{n'}'} k_{n'}'$$

Ci basta dire che $\beta_1 = \beta_1'$ e $k_1 = k_1'$, infatti allora

$$w^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + w^{\beta_n} k_n = w^{\beta_2'} \cdot k_2' + \dots + w^{\beta_{n'}'} k_{n'}' < w^{\beta_1}$$

contro la minimalità di α.

Supponiamo $\beta_1 = \beta_1'$, allora $w^{\beta_1} \cdot k_1 + \underbrace{\dots}_{< w^{\beta_1}} = w^{\beta_1} \cdot k_1' + \underbrace{\dots}_{< w^{\beta_1}}$ quindi $k_1 = k_1'$ per la divisione euclidea.

Se infine $\beta_1 < \beta_1'$ abbiamo

$$w^{\beta_1} \cdot k_1 + w^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + w^{\beta_n} k_n < w^{s(\beta_1)} \leq w^{\beta_1'} k_1' + \dots$$ ↯

Esercizio: dimostrare le disuguaglianze in viola (sono tutte uguali). ∎

Si potrebbe credere che il teorema precedente, applicato ricorsivamente agli esponenti $\beta_1 \dots \beta_n$, implichi ogni ordinale si

possa scrivere sotto forma di un'espressione finita composta di somme, prodotti e potenze delle costanti 0, 1, 2, ..., ω. Effettivamente, se valesse $\alpha > \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$ per ogni α, allora questa conclusione sarebbe corretta. Però è possibile esibire un ordinale ε_0 — e, in realtà, un'intera classe propria di ordinali come questo — tale che $\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0}$. La forma normale di Cantor di ε_0 è quindi, chiaramente, ω^{ε_0}, e procedere ricorsivamente sull'esponente $\omega^{\omega^{\varepsilon_0}}$, $\omega^{\omega^{\omega^{\varepsilon_0}}}$, &c. non conduce ad un'espressione finita.

Tipo questa:
$$\omega^{\omega^4 \cdot 7 + \omega^2 \cdot 1} \cdot 9 + \omega^{75} + 9$$

Intuitivamente
$$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}} \quad \omega \text{ volte}$$

La proposizione seguente è interessante di per sé, ma, in particolare, ci permetterà ora di dimostrare l'esistenza degli ε-number.

Prop Sia $F : Ord \to Ord$ una funzione classe crescente e continua — ossia $F(\lambda) = \sup F[\lambda]$ per λ limite.
Allora, per ogni $\alpha \in Ord$, F ha un punto fisso $\geq \alpha$.
Ossia $\exists \pi \in Ord \; \alpha \leq \pi \wedge F(\pi) = \pi$.

Dim

Definiamo per ricorsione $\pi_0 = \alpha$, $\pi_{S(n)} = F(\pi_n)$ per $n \in \omega$.
Se $F(0) = 0$, allora $\pi = 0$ è un punto fisso.

Se $0 < F(0)$, allora, per induzione, $\forall n\ \pi_n < \pi_{s(n)}$ per cui la funzione $n \mapsto \pi_n$ è crescente. Di conseguenza

$$\pi \overset{def.}{=} \sup\{\pi_n \mid n \in \omega\}$$

è limite (perché $\pi \notin \{\pi_n \mid n \in \omega\}$). Quindi

$$F(\pi) = \sup F[\pi] = \sup\{F(\pi_n) \mid n \in \omega\} = \sup\{\pi_{s(n)} \mid n \in \omega\} = \pi$$ ∎

Esempio Sia ε un punto fisso di $x \mapsto \omega^x$, allora la forma normale di ε è $\varepsilon = \omega^\varepsilon$.

Esercizio Sia $\varepsilon_0 = \sup\{1, \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots\}$
Formalmente definiamo per ricorsione $\alpha_0 = 1$ $\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$, allora $\varepsilon_0 \overset{def.}{=} \sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\}$. Dimostrare che ε_0 è il più piccolo punto fisso della funzione $x \mapsto \omega^x$.

Esercizio Sia $F : Ord \to Ord$ crescente continua. Allora esiste $G : Ord \to Ord$ crescente tale che

$$\forall \alpha \in Ord \quad F(\alpha) = \alpha \iff \exists \beta \in Ord \quad \alpha = G(\beta)$$

Ossia F ha una classe propria di punti fissi.

Esercizio La G dell'esercizio precedente è univocamente determinata da F e continua.

Def (ε-number)
Se negli esercizi precedenti: $F(\alpha) = \omega^\alpha$, allora $\varepsilon_\alpha \overset{def.}{=} G(\alpha)$.
L'α-esimo ε-number ε_α è l'α-esimo punto fisso di $x \to \omega^x$.

I primi due esercizi seguenti saranno assai più facili quando, usando l'assioma della scelta, dimostreremo che l'unione di un insieme numerabile di insiemi numerabili è numerabile

Esercizio * difficile (senza leggere l'idra qua sotto) $|\varepsilon_0| = \aleph_0$

Idea: dimostrare che $\alpha < \varepsilon_0$ se e solo se α può essere scritto a partire da $0, 1, \omega$, applicando le operazioni di somma, prodotto, ed esponente ordinale un numero finito di volte.

Esercizio * * ostico Sia ζ_0 minimo t.c. $\varepsilon_{\zeta_0} = \zeta_0$, allora $|\zeta_0| = \aleph_0$.

Esercizio Sia γ un qualunque ordinale ≥ 2. Ogni ordinale α si scrive in modo unico come somma finita

$$\alpha = \gamma^{\beta_1} k_1 + \ldots + \gamma^{\beta_n} k_n$$

con $\beta_1 > \ldots > \beta_n$ e $k_1 \ldots k_n < \gamma$.

Le operazioni in forma normale di Cantor

È facile ridurre l'aritmetica ordinale, in forma normale di Cantor, ad una piccola collezione di regole meccaniche. Nel contesto del corso, queste regole hanno un'importanza limitata, è però utile sapere che ci sono, ed avere una idea del loro aspetto. Il lemma seguente è un caso particolare, ma è semplice e vale la pena di ricordarlo.

Lemma Siano $\alpha, \beta, \gamma \in Ord$ tali che $\alpha < \omega^\beta \leq \gamma$

Allora $\alpha + \gamma = \gamma$.

Ossia fare $\alpha + \gamma$ assorbe tutti gli α abbastanza piccoli, ossia quelli $<$ di qualche potenza di ω che sia $\leq \gamma$.

Dim

Ci basta dimostrare $\alpha + \gamma \leq \gamma$.

Scrivendo α in forma normale di Cantor otteniamo

$$\alpha = \omega^{\beta_1} k_1 + \ldots + \omega^{\beta_n} k_n$$

con $\beta_1 > \ldots > \beta_n$. Quindi $\alpha \leq \omega^{\beta_1} \cdot k$ per qualche $k \in \omega$, infatti:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} k_1 + \ldots + \omega^{\beta_n} k_n \leq \omega^{\beta_1} k_1 + \omega^{\beta_1} k_2 + \ldots + \omega^{\beta_1} k_n = \omega^{\beta_1} (k_1 + \ldots + k_n)$$

Ora, da $\alpha < \omega^\beta$ deduciamo $\beta_1 < \beta$ quindi $s(\beta_1) \leq \beta$ e possiamo scrivere $\gamma = \omega^{s(\beta_1)} + \gamma' = \omega^{\beta_1} \cdot \omega + \gamma'$. Da cui

$$\alpha + \gamma \leq \omega^{\beta_1} \cdot k + \omega^{\beta_1} \cdot \omega + \gamma' = \omega^{\beta_1} (k + \omega) + \gamma' = \omega^{\beta_1} \cdot \omega + \gamma' = \gamma$$

dove l'uguaglianza in rosso segue da $k + \omega = \omega$ che segue da

$$k + \omega = \sup \{ k + n \mid n < \omega \} = \omega$$

∎

Prop (regole di calcolo in forma normale)

Per la somma ($c \neq 0$, $d \neq 0$):

$$\omega^\alpha \cdot c + \omega^\beta \cdot d = \begin{cases} \omega^\beta \cdot d & \text{se } \alpha < \beta \\ \omega^\alpha (c + d) & \text{se } \alpha = \beta \\ \omega^\alpha \cdot c + \omega^\beta \cdot d & \text{se } \beta < \alpha \end{cases}$$

già in forma normale

Per i prodotti si applica la proprietà distributiva, poi

$\beta > 0 \to \left(w^{\alpha_1}\cdot k_1 + w^{\alpha_2}\cdot k_2 + \dots\right)\cdot w^{\beta} = w^{\alpha_1+\beta}$

$n \in \omega\setminus\{0\} \to \left(w^{\alpha_1}\cdot k_1 + w^{\alpha_2}\cdot k_2 + \dots\right)\cdot n = w^{\alpha_1}\cdot k_1 n + w^{\alpha_2}\cdot k_2 + w^{\alpha_3}\cdot k_3 + \dots$

Per la potenza si usano $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma}$ e $\alpha^{\beta\cdot n} = (\alpha^{\beta})^{n}$, poi

$$k^{w\cdot 1+\alpha} = w^{w^{\alpha}}$$

$\beta > 0 \wedge \alpha_1 > 0 \to \left(w^{\alpha_1}\cdot k_1 + w^{\alpha_2}\cdot k_2 + \dots\right)^{w^{\beta}} = w^{\alpha_1\cdot w^{\beta}}$

Dim

La regola per la somma è immediata.

Per dimostrare

$$\beta > 0 \to \left(w^{\alpha_1}\cdot k_1 + w^{\alpha_2}\cdot k_2 + \dots\right)\cdot w^{\beta} = w^{\alpha_1+\beta}$$

osserviamo intanto il caso particolare $n\cdot w = w$ per $n \in \omega\setminus\{0\}$.

$$w \leq n\cdot w = \sup\{n\cdot i \mid i\in\omega\} \leq \sup\{\sigma \mid \sigma\in\omega\} \leq w$$

Ora, scrivendo $\beta = 1+\gamma$

$$w^{\alpha_1+\beta} = w^{\alpha_1}w^{\beta} \leq \left(w^{\alpha_1}\cdot k_1 + w^{\alpha_2}\cdot k_2 + \dots\right)\cdot w^{\beta} \leq \left(w^{\alpha_1}\cdot k_1 + \dots + w^{\alpha_1}\right)\cdot w^{\beta} \leq$$

$$\leq w^{\alpha_1}(k_1+1)\,w^{\beta} \leq w^{\alpha_1}\underbrace{(k_1+1)\,w}_{w}\,w^{\gamma} = w^{\alpha_1}w\cdot w^{\gamma} = w^{\alpha_1+\beta}$$

La regola

$n \in \omega\setminus\{0\} \to \left(w^{\alpha_1}\cdot k_1 + w^{\alpha_2}\cdot k_2 + \dots\right)\cdot n = w^{\alpha_1}\cdot k_1 n + w^{\alpha_2}\cdot k_2 + w^{\alpha_3}\cdot k_3 + \dots$

si ottiene facilmente per induzione su n.

Questa è immediata: $k^{w\cdot 1+\alpha} = k^{w\cdot w^{\alpha}} = \left(\sup\{k^{n} \mid n\in\omega\}\right)^{w^{\alpha}} = w^{w^{\alpha}}$

Per dimostrare

$$\beta > 0 \wedge \alpha_1 > 0 \to \left(w^{\alpha_1}\cdot k_1 + w^{\alpha_2}\cdot k_2 + \dots\right)^{w^{\beta}} = w^{\alpha_1\cdot w^{\beta}}$$

Partiamo dal caso particolare $(w^\alpha \cdot k)^w = w^{\alpha w}$.

$$w^{\alpha \cdot w} \leq (w^\alpha \cdot k)^w = \sup\{(w^\alpha \cdot k)^n \mid n \in w\} = \sup\{w^{\alpha \cdot n} \cdot k \mid n \in w\} \leq$$
$$\leq \sup\{w^{\alpha(n+1)} \mid n \in w\} \leq (w^\alpha)^w = w^{\alpha \cdot w}$$

Siccome $\beta > 0$ scriviamo $\beta = 1 + \gamma$, quindi abbiamo $w^\beta = w \cdot \gamma$

$$w^{\alpha_1 \cdot w^\beta} \leq \left(w^{\alpha_1} \cdot k_1 + w^{\alpha_2} \cdot k_2 + \dots\right)^{w^\beta} \leq \left(w^{\alpha_1}(k_1+1)\right)^{w \cdot \gamma} = w^{\alpha_1 \cdot w \cdot \gamma} = w^{\alpha_1 \cdot w^\beta}$$ ☒

Esempi:

- $(w+1)^2 = (w+1)\cdot(w+1) = \underline{(w+1)\cdot w} + w + 1 = \underline{w^2} + w + 1$
- $(w+1)^2 \cdot n = w^2 \cdot n + w + 1$ con $n \in w \setminus \{0\}$
- $(w+1)^2 \cdot w = (w^2 + w + 1)\cdot w = w^3$
- $(w+1)^3 = (w^2+w+1)(w+1) = \underline{(w^2+w+1)\cdot w} + w^2 + w + 1 = \underline{w^3} + w^2 + w + 1$
- $(w+1)^n = w^n + w^{n-1} + \dots + 1 = \sum_{i=n}^{0} w^i$ con $n \in w$

  Per induzione su n. Il passo induttivo è come sopra

$$(w+1)^{n+1} = (w+1)^n (w+1) = \left(\sum_{i=n}^{0} w^i\right) w + \sum_{i=n}^{0} w^i = w^{n+1} + \sum_{i=n}^{0} w^i = \sum_{i=n+1}^{0} w^i$$

- $(w+1)^w = w^w$ applicando direttamente la regola.
- $(2 \cdot w^2 + w \cdot 3 + 7)^3$ esame del 27.1.2020

$$(w^2 + \underset{\shortparallel}{w} \cdot 3 + 7)^3 = \underbrace{(w^2 + w\cdot 3 + 7)\cdot(w^2 + w\cdot 3 + 7)}\cdot(w^2 + w\cdot 3 + 7) =$$
$$(\,)\cdot w^2 + (\,)\cdot w \cdot 3 + (\,)\cdot 7 =$$
$$= w^4 + w^3 \cdot 3 + w^2 \cdot 7 + w \cdot 3 + 7$$

$$= (w^4 + \dots)\, w^2 + (w^4 + \dots)\, w \cdot 3 + (w^4 + \dots)\cdot 7$$

$$= w^6 + w^5 \cdot 3 + w^4 \cdot 7 + w^3 \cdot 3 + w^2 \cdot 7 + w \cdot 3 + 7$$