Gli aleph

In questa sezione costruiremo una funzione classe dagli ordinali in sé, $\alpha \mapsto \omega_\alpha$, la cui immagine contiene precisamente un ordinale per ogni cardinalità infinita. Definiremo quindi la scrittura $|X| = \aleph_\alpha$ come $|X| = |\omega_\alpha|$. Ed indagheremo l'aritmetica, che è molto semplice, di somme e prodotti di cardinalità: $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\max(\alpha,\beta)}$. Tratteremo, invece, in seguito l'esponenziale di cardinalità, che non è affatto semplice.

Formalmente, in realtà, dimostreremo che ogni cardinalità infinita che sia la cardinalità di qualche ordinale è un aleph. Resterà quindi da dimostrare che ogni cardinalità è la cardinalità di qualche ordinale, ma per far questo occorre l'assioma della scelta. La cardinalità degli ordinali fanno comodo, per esempio, perché sono confrontabili:

Oss. Dati $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$, o $|\alpha| < |\beta|$ o $|\alpha| = |\beta|$ o $|\beta| < |\alpha|$.
Dim Basta osservare che o $\alpha \subseteq \beta$ o $\beta \subseteq \alpha$, quindi o $|\alpha| \leq |\beta|$ o $|\beta| \leq |\alpha|$.

Ad ogni cardinalità associamo un rappresentante canonico: il minimo ordinale di quella cardinalità.

Def. $\alpha \in Ord$ è un *ordinale iniziale* se $\forall \beta < \alpha \; |\beta| < |\alpha|$

Esercizio Dimostra che se α è un ordinale iniziale infinito, allora α è limite.

Il nostro scopo è, ora, dimostrare che gli ordinali iniziali sono una classe propria, e quindi enumerarli per mezzo di una funzione classe $Ord \to Ord$, $\alpha \mapsto \omega_\alpha$. Questo è lo strumento tecnico fondamentale

Teo (Hartogs)
Dato un insieme X esiste un ordinale α che non è equipotente ad alcun sottoinsieme di X — ossia $|\alpha| \not\leq |X|$.

Dim Consideriamo l'insieme

$$Y = \{R \in \mathcal{P}(X \times X) \mid \exists X' \subseteq X \; R \text{ è un buon ordine su } X'\}$$

Sia F la funzione classe che associa, ad ogni buon ordine, l'unico ordinale ad esso isomorfo. Per rimpiazzamento, esiste l'insieme $F[Y]$. Sia α un ordinale con $\alpha \notin F[Y]$. Supponiamo, per assurdo, $|\alpha| = |X'|$ per qualche $X' \subseteq X$. Allora, per definizione, abbiamo una biiezione $f : X' \to \alpha$. Questa, però, ci fornisce un buon ordinamento su X' isomorfo ad α — basta porre $x < y \overset{def.}{\equiv} f(x) < f(y)$ — contrariamente al fatto che $\alpha \notin F[Y]$, ossia non è isomorfo ad alcun buon ordinamento su un sottoinsieme di X. ∎

Def. Dato un insieme X, il **numero di Hartogs** di X, $H(X)$ è il più piccolo ordinale che non è equipotente ad alcun sottoinsieme di X — ossia $H(X) \in Ord$ è minimo tale che $|H(X)| \not\leq |X|$.

Oss. $H(X)$ è un ordinale iniziale.

Dim Per assurdo, se esistesse $\beta < H(X)$ tale che $|\beta| = |H(X)|$, avremmo, per la minimalità di $H(X)$, $|\beta| \leq |X|$, quindi $|H(X)| \leq |X|$ ↯ ∎

Cor La classe degli ordinali iniziali è una classe propria.

Dim Se, per assurdo, esistesse l'insieme X degli ordinali iniziali, allora per ogni α iniziale $|\alpha| \leq |\bigcup X|$, ma $|\bigcup X| < |H(\bigcup X)|$ ↯ ∎

Oss. Dato $\alpha \in Ord$, $H(\alpha)$ è il minimo ordinale tale che $|\alpha| < |H(\alpha)|$.

Dim Siccome la cardinalità degli ordinali sono confrontabili $|\alpha| < |H(\alpha)| \leftrightarrow |H(\alpha)| \not\leq |\alpha|$. ∎

Il teorema di Hartogs ci permette, per esempio, di esibire un ordinale più che numerabile: $H(\omega)$. Per l'osservazione precedente, infatti, $\aleph_0 = |\omega| < |H(\omega)|$.

Esercizio Cosa c'è di SBAGLIATO nella dimostrazione

seguente dell'esistenza di un $\alpha \in Ord$ più che numerabile? — Sia $\alpha \overset{def.}{=} \sup\{\beta \in Ord \mid |\beta| \leq \aleph_0\}$. Se, per assurdo $|\alpha| \leq \aleph_0$, allora $|s(\alpha)| = |\alpha| + 1 \leq \aleph_0$ quindi, per la definizione di α, $s(\alpha) \leq \alpha$ ma

Gli ordinali iniziali possono essere elencati per mezzo di una funzione classe $\alpha \mapsto \omega_\alpha$, semplicemente, in conseguenza del fatto che sono una classe propria, abbiamo infatti il lemma seguente.

Lemma Sia C una classe propria di ordinali, allora esiste un'unica $F: Ord \to C$ crescente e biunivoca.

Dim

Sia $G: Ord \to C$ definita per ricorsione da

$G(\alpha) =$ il minimo $\beta \in C$ maggiore di tutti gli elementi di $G[\alpha]$

Ci basta dire che F soddisfa la richiesta se e solo se $F(\alpha) = G(\alpha)$ per ogni $\alpha \in Ord$.

Si vede immediatamente che G è crescente, quindi iniettiva. Per verificare la suriettività, sia $\beta \in C$, siccome G è crescente $\beta < s(\beta) \leq G(s(\beta))$. Quindi, per la minimalità di $G(s(\beta))$, $\beta \in G[s(\beta)]$, ed, in particolare, β è nell'immagine di G.

D'altro canto, data F come nell'enunciato, $F(\alpha)$ è maggiore di tutti gli elementi di $F[\alpha]$ poiché F è crescente. Se ci fosse $\beta \in C$ minore di $F(\alpha)$ con questa proprietà, allora avremmo $\beta < F(\gamma)$ per $\gamma < \alpha$ e $\beta > F(\gamma)$ per $\gamma \geq \alpha$, quindi $\beta \neq F(\gamma)$ per ogni γ, contro la suriettività di F. Di conseguenza F soddisfa la definizione ricorsiva di G, e, per il teorema di ricorsione transfinita, $\forall \alpha \in Ord \quad F(\alpha) = G(\alpha)$. □

Def. La funzione classe dagli ordinali agli ordinali iniziali infiniti $\alpha \longmapsto \omega_\alpha$ è definita come l'unica crescente e biunivoca fra queste classi.

Prop.
$$\omega_0 = \omega$$
$$\omega_{S(\alpha)} = H(\omega_\alpha)$$
$$\omega_\lambda = \sup\{\omega_\alpha \mid \alpha \in \lambda\} \quad \text{per } \lambda \text{ limite}$$

Dim

I casi 0 e successore sono immediati, vediamo il caso limite. Per la dimostrazione del lemma precedente, ω_λ è il minimo ordinale iniziale maggiore di ogni ω_α con $\alpha \in \lambda$. Basta quindi dimostrare che $\beta \overset{(def.)}{=} \sup\{\omega_\alpha \mid \alpha \in \lambda\}$ è iniziale. Se così non fosse esisterebbe $\gamma < \beta$ con $|\gamma| = |\beta|$. Ma, per la definizione di estremo superiore, dovrebbe

anche esserci un $\alpha < \lambda$ con $\gamma < w_\alpha$. Quindi

$$|\gamma| \leq |w_\alpha| < |w_{s(\alpha)}| \leq |\lambda|$$

Notazione Usiamo il simbolo $\aleph_\alpha$ come abbreviazione per $|w_\alpha|$

Così, per esempio, X è numerabile $\equiv |X| = |w_0| \equiv |X| = \aleph_0$

Prop. (Somma e prodotti di aleph)

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta) = \aleph_{\max(\alpha,\beta)}$$

OPERAZIONI FRA CARDINALITÀ

$$\aleph_\alpha + |n| = \aleph_\alpha \cdot |n| = \aleph_\alpha \quad \text{per } n \in w \setminus \{0\}$$

Assumiamo per un istante il seguente lemma

Lemma $\forall \alpha \in Ord \quad \aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$

Dim (proposizione)

Assumiamo, senza perdita di generalità, $\alpha \leq \beta$. Allora

$$\aleph_\beta \leq \aleph_\alpha + \aleph_\beta \leq 2 \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$$

Inoltre $\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha + |n| \leq \aleph_\alpha + \aleph_0 = \aleph_\alpha$

$$\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha \cdot |n| \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_0 = \aleph_\alpha$$

Oss. Se $|X| = \aleph_\alpha$ e $\aleph_0 \leq |Y| \leq |X|$, allora $|Y| = \aleph_\beta$, per qualche $\beta \leq \alpha$.

Dim Senza perdita di generalità possiamo assumere $X = w_\alpha$ e $Y \subseteq X$. Allora Y è ben ordinato dall'ordinamento indotto.

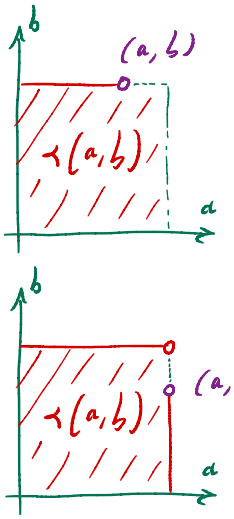
Sia γ il minimo ordinale con $|\gamma| = |Y|$ — che esiste perché l'ordinale di $(Y, <_{w_\alpha})$ ha questa proprietà. Siccome γ è il minimo della sua cardinalità, γ è iniziale, quindi esiste β tale che $\gamma = w_\beta$. La monotonia di $x \mapsto w_x$ implica che $\beta \leq \alpha$. ∎

Dim (lemma)

Per induzione transfinita, possiamo assumere $\forall \beta < \alpha \quad \aleph_\beta^2 = \aleph_\beta$ e dobbiamo dimostrare $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$. Strategia: diamo un buon ordine $\prec$ su $w_\alpha \times w_\alpha$ in modo tale che $(w_\alpha \times w_\alpha, \prec) \sim w_\alpha$.

Definiamo

$$(a,b) \prec (a',b') \overset{\text{def.}}{\equiv} \max(a,b) < \max(a',b') \vee \left(\max(a,b) = \max(a',b') \wedge a < a' \right) \vee \left(\max(a,b) = \max(a',b') \wedge a = a' \wedge b < b' \right)$$



Che è il medesimo ordinamento che abbiamo usato per dimostrare $\aleph_0^2 = \aleph_0$.

In pratica, per confrontare (a,b) con (a',b'), si confrontano prima $\max(a,b)$ e $\max(a',b')$; a parità si confrontano a ed a'; se anche queste coincidono, si confrontano b e b'.

Abbiamo già verificato, nella dimostrazione di $\aleph_0^2 = \aleph_0$,

che $\prec$ è un buon ordine (con ω al posto di ω_α, ma le verifiche non cambiano). Resta da verificare che

$$X \overset{\text{def.}}{=} (\omega_\alpha \times \omega_\alpha, \prec) \sim \omega_\alpha.$$

Sia β l'ordinale di $(\omega_\alpha \times \omega_\alpha, \prec)$. Dobbiamo mostrare che $\beta = \omega_\alpha$. Siccome $|\omega_\alpha| \leq |\omega_\alpha \times \omega_\alpha| = |\beta|$, e ω_α è iniziale, abbiamo $\omega_\alpha \leq \beta$, resta quindi da dimostrare che non vale $\omega_\alpha < \beta$, ossia che ω_α non è isomorfo a un segmento iniziale proprio di X.

Fissiamo un segmento iniziale proprio $X_{(a,b)}$ di X, e dimostriamo $|X_{(a,b)}| < \aleph_\alpha$ — quindi, necessariamente, $X_{(a,b)} \not\sim \omega_\alpha$.
Sia $\mu = \max(a,b)$. Siccome $\mu < \omega_\alpha$ e ω_α è iniziale, $s(\mu) < \omega_\alpha$, quindi $|s(\mu)| < \aleph_\alpha$. Di conseguenza, o $|s(\mu)| = \aleph_\gamma$ per qualche $\gamma < \alpha$, oppure $s(\mu) \in \omega$. Nel primo caso $|s(\mu) \times s(\mu)| = \aleph_\gamma^2 = \aleph_\gamma$ per ipotesi induttiva, nel secondo $s(\mu) \times s(\mu)$ è finito, e, in ogni caso $|s(\mu) \times s(\mu)| < \aleph_\alpha$. Siccome $X_{(a,b)} \subseteq s(\mu) \times s(\mu)$, abbiamo allora $|X_{(a,b)}| \leq |s(\mu) \times s(\mu)| < \aleph_\alpha$. ∎

Esercizi: Dimostra che:

- Per ogni n sia $\mathcal{P}^{=n}(X) \overset{\text{def.}}{=} \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid |Y| = n\}$
  $\forall n \in \omega \quad |\mathcal{P}^{=n}(\omega_\alpha)| = \aleph_\alpha$
- $|\mathcal{P}^{\text{fin}}(\omega_\alpha)| = \aleph_\alpha$

  Suggerimento: $|\text{sottoins. finiti di } \omega_\alpha| \leq |\underbrace{\{f : n \to \alpha \mid n \in \omega\}}|$

  fissa $g : \omega_\alpha \times (\omega_\alpha \cup \{\spadesuit\}) \to \omega_\alpha \cup \{\spadesuit\}$ ricorsiva. Definisci $h : \underline{\quad} \to \omega_\alpha$

con $h(\emptyset) = \emptyset$, $h(f) = g(f(0), h(x \mapsto f(x+1)))$.

- $\forall \alpha, \beta \in Ord \quad |\alpha| = |\beta| = \aleph_\gamma \longrightarrow |\alpha+\beta| = |\alpha \cdot \beta| = |\alpha^\beta| = \aleph_\gamma$.
- Se $|X| = \aleph_\alpha$ e $f : X \to Y$ è una funzione, $|f[X]| \leq \aleph_\alpha$.
- Se $|X \cup Y| = \aleph_\alpha$ e $|Y| < \aleph_\alpha$ allora $|X| = \aleph_\alpha$.
- $\forall \alpha \in Ord \quad \aleph_{\alpha+1} < 2^{2^{\aleph_\alpha}}$