# L'assioma della scelta

L'assioma della scelta è stato introdotto da Ernst Zermelo, nel 1904, per dimostrare che ogni insieme è bene ordinabile. Si potrebbe dubitare del valore di una dimostrazione ottenuta introducendo un assioma ad hoc, è tuttavia opportuno osservare che l'assioma della scelta è stato usato prima di Zermelo, ma senza accorgersene. Quindi Zermelo non ha tanto costruito un nuovo principio, quanto piuttosto riconosciuto la necessità di codificare un principio già applicato, ma in modo impreciso. Inoltre, gli assiomi che abbiamo introdotto finora non permettono, per esempio, né di affermare né di negare la bene ordinabilità di $\mathbb{R}$. Quindi, se si vuole dare una risposta al problema dell'esistenza di un buon ordine di $\mathbb{R}$, che sia positiva o negativa, questa deve per forza venire da un nuovo assioma. In questo senso, Zermelo dice che il teorema del buon ordinamento è ragionevole perché segue da una ipotesi — l'assioma della scelta — ragionevole. Anzi, così ragionevole che i matematici l'hanno usato senza neppure accorgersi che questo assioma è effettivamente un'ipotesi.

(9) Assioma della scelta (AC)

nome e non gli ← Axiom of Choice

"Dato un insieme $X$ di insiemi non vuoti, esiste una funzione di scelta $f: X \to \bigcup X$ tale che $\forall a \in X \quad f(a) \in a$.

In simboli: $\forall X \left(\emptyset \notin X\right) \to \left(\exists f \in {}^{X}(\cup X)\ \forall a \in X\ f(a) \in a\right)$.

L'assioma della scelta è di frequente applicato per fissare infiniti elementi. Per esempio, dovendo costruire una successione $x_n$ che tende a $+\infty$, capita di ragionare dicendo *per ogni $n \in \mathbb{N}$ fisso $x_n > n$ che abbia inoltre questa o quella proprietà che mi interessano.* Formalmente, in questo ragionamento, stiamo dicendo *consideno*

$$X = \{\, ]n, +\infty[ \mid n \in \mathbb{N} \,\}$$

*e considero $f : X \to \cup X \subseteq \mathbb{R}$ una funzione di scelta per $X$.* *Ora, pongo $x_n = f(]n, +\infty[)$.* Si pone quindi la domanda: perché non ci serve alcun assioma per fissare un elemento — come a dire *consideno un numero $\varepsilon$ tale che etc.* — ma ci serve per fissarne infiniti?

Il principio che, sapendo che ci sono oggetti che godono di una certa proprietà, ci permette di fissarne uno, è una legge logica. Questa legge, da un lato, è valida in ogni teoria del primo ordine, non solo nella teoria degli insiemi. D'altro canto, può essere vista come una mera scorciatoia nei ragionamenti, perché se da $\exists x\, \varphi(x)$ possiamo dedurre una $\psi$ che non menziona $x$, fissando un $x$ che soddisfa $\varphi(x)$, allora si può dimostrare che, a patto di presentare il ragionamento nella maniera opportuna, la conclusione $\psi$ può essere raggiunta senza bisogno di fissare $x$. In questo senso, la possibi-

lità

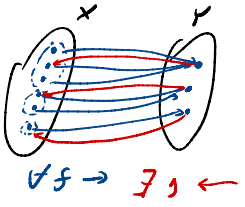
di fissare un oggetto — cioè dare un nome ad un oggetto — è una legge del pensiero: una caratteristica del modo in cui ragioniamo. Tecnicamente, questa legge è rivendicata dal teorema di completezza di Gödel, che dice che la logica del primo ordine è quella giusta per catturare una nozione molto naturale di modello.

L'assioma della scelta, d'altra parte, si può vedere come un modo per fissare infiniti elementi, ma si concretizza in un enunciato insiemistico, che asserisce l'esistenza di un certo insieme: la funzione di scelta. Non si tratta dunque di una caratteristica del nostro modo di ragionare — di una legge del pensiero — perché nulla ci obbliga a pensare in termini insiemistici, e, d'altro canto, nulla obbliga gli insiemi a fare quello che il nostro intuito dice che dovrebbero fare. Insomma, questo è l'intoppo: che non sappiamo esprimere il concetto di fissare infinite variabili se non tramite l'espediente di fissare una singola funzione di scelta. Tuttavia, per fare questo dobbiamo asserirne l'esistenza di un certo insieme, appunto la funzione di scelta, che, si può dimostrare, non segue dagli assiomi 1–8.

Bando alle ciance.

Nota: AC equivale all'affermazione che ogni funzione surgettiva ha un'inversa destra, ossia

$\forall f : X \to Y$ surgettiva $\exists g : Y \to X$ $f \circ g = Id$



Dim.

($\to$) Consideriamo $A = f^{-1}(y)$

$$Z \overset{\text{def}}{=} \{ A \in \mathcal{P}(X) \mid \exists y \in Y \ \forall x \in X \ x \in A \leftrightarrow f(x) = y \}$$

Per la suriettività di $f$ gli elementi di $Z$ non sono vuoti; per AC esiste $h : Z \to X$ funzione di scelta. Definiamo

$g(y) \overset{\text{def}}{=} h(f^{-1}(y))$ — più precisamente $g(y) = h(\{x \in X \mid f(x) = y\})$.

Segue immediatamente da questa definizione che $f \circ g(y) = f(g(y)) = y$.

($\leftarrow$) Sia $X$ un insieme di insiemi non vuoti, consideriamo l'insieme $X' = \{(a, A) \in (\cup X) \times X \mid a \in A\}$. La funzione

$$f : X' \to X$$
$$(a, A) \mapsto A$$

è suriettiva, quindi ammette un'inversa destra $g$.

Ora, la funzione $h : X \to \cup(X)$

$$A \mapsto \text{prima componente di } g(A)$$

è una funzione di scelta per $X$. ∎

L'assioma della scelta forma, insieme ai due enunciati seguenti — il teorema del buon ordinamento ed il lemma di Zorn — una terna classica di proposizioni equivalenti, nel senso che gli assiomi 1–8 unitamente ad una qualunque delle tre proposizioni implicano le altre due.

**Teo** (del buon ordinamento — o di Zermelo)

Ogni insieme è ben ordinabile

$$\forall S \; \exists < \in S \times S \quad (S, <) \text{ è un buon ordinamento}$$

**Lemma** (di Zorn)

Ogni insieme parzialmente ordinato in cui ogni sottocatena* ammetta un maggiorante* ha elementi massimali.*

* Definizioni: Dato $(S, <)$ ordine parziale

- una sottocatena è un $A \in S$ tale che la restrizione di $<$ ad $A$ è un ordine totale
- un maggiorante di $A \subseteq S$ è un $x \in S$ tale che $\forall y \in A \; y \leq x$
- $x \in S$ è un elemento massimale se $\neg \exists y \in S \; x < y$

**Teo**

Le tre affermazioni precedenti sono equivalenti — ossia si implicano vicendevolmente assumendo gli assiomi 1–8.

**Dim** (Buon ordinamento $\rightarrow$ AC)

Dato $S$ insieme di insiemi non vuoti, fissiamo un buon ordinamento $\prec$ su $\bigcup S$. Allora la funzione $f : S \to \bigcup S$

$$x \mapsto \min_{\prec}(x)$$

è una funzione di scelta per $S$. ∎

Dim (AC → Buon ordinamento — IDEA)

Dimostreremo questo risultato tramite la catena di deduzioni AC → Zorn → Buon ordinamento. Tuttavia conviene studiare l'idea di una dimostrazione diretta.

Fissiamo un insieme $X$, per AC, esiste una funzione di scelta

$$f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$$
$$A \mapsto f(A) \in A$$

Ora vorremmo mettere in ordine gli elementi di $X$ così

$x_0 = f(X)$ $x_1 = f(X \setminus \{x_0\})$ $x_2 = f(X \setminus \{x_0, x_1\})$ ...

ogni volta scegliendo un elemento nuovo fra quelli che ancora rimangono da elencare. Chiaramente, non è detto che questo procedimento termini in una quantità numerabile di passi, per cui dovremo definire $x_\omega = f(X \setminus \{x_0, x_1, x_2, \dots\})$ e, più in generale, per ricorsione transfinita

$$x_\alpha = f(X \setminus \{x_\beta \mid \beta < \alpha\})$$

Se supponiamo, per assurdo, che $X$ non sia l'immagine di un ordinale, allora $X \setminus \{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$ è necessariamente sempre non vuoto, per cui la costruzione ricorsiva ha senso. Ora, però avremmo una funzione iniettiva $Ord \to X$, $\alpha \mapsto x_\alpha$, e questa non può esistere per il teorema di Hartogs — infatti non c'è neppure una funzione iniettiva $H(X) \to X$. Così cade l'ipotesi assurda, e $X$ è ben ordinabile. ∎

Dim (Zorn → Buon ordinamento)

Vogliamo dimostrare che un insieme $S$ è ben ordinabile. Consideriamo

$T = \{\text{funzioni iniettive da un ordinale a } S\}$

$= \{f \in \mathcal{P}(H(S) \times S) \mid f \text{ è una funzione iniettiva} \wedge Dom(f) \in Ord\}$

$T$ è parzialmente ordinato dalla relazione $f < g \overset{def.}{\iff} f \subseteq g$

Se questo ordine parziale soddisfa l'ipotesi del lemma di Zorn. Dando per buona la verifica, esiste un elemento massimale $f$ di $T$. Se $f$ non fosse surgettiva, esisterebbe $y \in S \setminus Im(f)$, per cui $f' = f \cup \{(Dom(f), y)\} > f$ contro la massimalità di $f$. Pertanto $f$ è una biezione, quindi $S$ è ben ordinabile.

Verifica dell'ipotesi di Zorn. Se $P \subseteq T$ è una sottocatena, $f = \bigcup P$ è un maggiorante di $P$. Per controllare che $f$ sia una funzione basta, infatti, osservare che date $g_1, g_2 \in P$ con $g_1 < g_2$,

$$\forall x \in Dom(g_1) \cap Dom(g_2) \quad g_1(x) = g_2(x)$$

Inoltre $f$ è iniettiva, perché, se $f(x) = f(y)$ allora esistono $g_1, g_2 \in P$ tali che $g_1(x) = g_2(y)$, però, siccome $P$ è una sottocatena, una fra $g_1$ e $g_2$ è $\leq$ dell'altra. Ponendo $g_1 \leq g_2$, $g_2(x) = g_1(x) = g_2(y)$ e $x = y$ per l'iniettività di $g_2$.

Il dominio di $f$ è un ordinale in quanto

$$Dom(f) = \bigcup \{Dom(g) \mid g \in P\} = \sup \{Dom(g) \mid g \in P\}$$

Infine, $f$ è un maggiorante di $P$ perché, per costruzione, se $g \in P$ allora $g \subseteq f$ ossia $g \leq f$. ∎

Dim (AC → Zorn)

Sia $(S, <)$ un insieme parzialmente ordinato. Supponiamo che ogni sottocatena di $S$ abbia un maggiorante e che, per assurdo, $S$ non abbia elementi massimali. Questa assunzione implica che ogni sottocatena $A$ ammette un maggiorante stretto, ossia un $x \in S$ tale che $\forall y \in A \; y < x$ — se avessimo infatti una sottocatena che non ammette un maggiorante stretto, allora un maggiorante di quella sottocatena non potrebbe essere $<$ di alcun elemento di $S$, e quindi sarebbe un elemento massimale.

Denotiamo con $\mathcal{P}^{\neq\emptyset}(S)$ l'insieme delle parti non vuote di $S$. Consideriamo una funzione di scelta $f$ su $\mathcal{P}^{\neq\emptyset}(S)$.

L'idea, ora, è di costruire per induzione transfinita una funzione classe crescente $F : Ord \to S$ — che chiaramente non può esistere perché altrimenti $F_{|H(S)}$ sarebbe un'immersione di $H(S)$ in $S$. Vorremmo costruire $F$ tramite la ricorsione:

$$F(\alpha) = f(\{\text{maggioranti stretti di } F[\alpha]\})$$

perché questa costruzione abbia senso, conviene che $F_{|\alpha}$ sia crescente, in questo modo $F[\alpha]$ è una sottocatena, per cui l'insieme dei maggioranti stretti non è vuoto, ed ha senso applicare ad esso la funzione di scelta $f$. Per assurdo, consideriamo il minimo $\alpha$ tale che $F_{|\alpha}$ non è crescente. Quindi esistono

$\gamma < \delta < \alpha$ tali che $F(\gamma) \not< F(\delta)$. Però siccome $\delta < \alpha$, $F|_\delta$ è crescente, per cui $F(\delta)$ è ben definita ed è un maggiorante stretto di $F[\delta]$, quindi, in particolare, $F(\gamma) < F(\delta)$ ↯.

Questo modo di procedere contiene, però, un'imprecisione formale. Per applicare il teorema di ricorsione transfinita alla costruzione di $F$ dobbiamo scrivere $F(\alpha) = G(F|_\alpha)$. La $G$ della costruzione precedente è

$$G(h) = \min(\{\text{maggioranti stretti dell'immagine di } h\})$$

Questa però non è una funzione classe $V \to V$, perché non è definita se l'immagine di $h$ non ha maggioranti stretti in $S$. Il ragionamento si arrangia così: si fissa $\clubsuit \notin S$ e si definisce

$$F(\alpha) = \begin{cases} \min(\{\text{magg. stretti di } F[\alpha]\}) & \text{se } F|_\alpha \text{ è } \alpha \to S \text{ crescente} \\ \clubsuit & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ora tutti i casi sono coperti ed è lecito applicare il teorema di ricorsione transfinita. Se $F$ non fosse una funzione classe crescente $\mathrm{Ord} \to S$, ci sarebbe il minimo $\alpha$ tale che $F|_\alpha$ non è $\alpha \to S$ crescente, e, ragionando come prima si ottiene un assurdo.

Ricapitolando, negando la tesi, abbiamo costruito una funzione classe crescente, dunque iniettiva: $\mathrm{Ord} \to S$, che non può esistere per il teorema di Hartogs. La tesi è quindi provata. ∎