Conseguenze immediate di AC

Prop Ogni insieme è equipotente ad un ordinale iniziale. In particolare, ogni cardinalità infinita è un aleph.

Dim Per il teorema del buon ordinamento ogni insieme è ben ordinabile, quindi, per le proprietà degli ordinali iniziali, equipotente ad un unico ordinale iniziale. La seconda affermazione segue dal fatto che gli ω_α sono tutti e soli gli ordinali iniziali infiniti ∎

Oss Viceversa, assumere che ogni insieme è equipotente ad un ordinale implica AC.

Dim Dal fatto ogni X è equipotente ad un ordinale deduciamo il teorema del buon ordinamento. Se $|X| = |\alpha|$ con $\alpha \in Ord$, è una biiezione fra X e α, quindi un buon ordinamento di X. ∎

Cor Tutte le cardinalità sono confrontabili

$$\forall X, Y \quad |X| < |Y| \vee |X| = |Y| \vee |Y| < |X|$$

Dim Segue dal fatto che le cardinalità degli ordinali sono confrontabili. ∎

Oss La confrontabilità delle cardinalità implica AC.

Dim Dimostriamo il teorema del buon ordinamento. Consideriamo il confronto fra $|X|$ e $|\mathcal{H}(X)|$. Per la definizione di

$H(X)$ non può valere $|H(X)| \leq |X|$. Quindi $|X| < |H(X)|$.
Ossia esiste $f: X \to H(X) \in Ord$ iniettiva. □

Cor $\forall X$ infinito $|X \times X| = |X|$

Dim Se $|X| = \aleph_\alpha$ abbiamo $|X \times X| = |\omega_\alpha \times \omega_\alpha| = |\omega_\alpha| = |X|$ □

Nota Anche $|X \times X| = |X|$ implica AC. Questo però è un teorema di Tarski che vedremo più avanti

Cor $\forall X$ X infinito $\iff \aleph_0 \leq |X|$

Ossia ogni insieme infinito ha un sottoinsieme numerabile

Dim Abbiamo già dimostrato la freccia $\leftarrow$, mostro la freccia opposta segue dal fatto che $\aleph_0$ è il minimo altef infinito. □

Ricordiamo che un insieme si dice Finito secondo Dedekind se non può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

Prop X è finito $\longleftrightarrow$ X è finito secondo Dedekind

Dim $\longrightarrow$ risultato già dimostrato.

$\leftarrow$ Supponiamo che X non sia finito, allora $|X| = \aleph_\alpha$ per qualche α, quindi esiste $f: \omega_\alpha \to X$ biunivoca.

$$g: X \to X \setminus \{f(0)\}$$
$$x \mapsto f \circ g \circ f^{-1}(x)$$

è una bigezione fra X e $X \setminus \{f(0)\} \subsetneq X$. □

Prop $0 < |X| \leq |Y| \iff \exists f : Y \to X$ surgettiva

Dim. $\to$ Data $g : X \to Y$ iniettiva e $a \in X$, la funzione

$$f : Y \to X$$
$$y \mapsto \begin{cases} g^{-1}(y) & \text{se } y \in g[X] \\ a & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è surgettiva.

$\leftarrow$ Data $f : Y \to X$ surgettiva, un'inversa destra di f è iniettiva. ∎

Prop Se $|S| \leq \aleph_\alpha$ e $\forall A \in S \; |A| \leq \aleph_\alpha$, allora $|\bigcup S| \leq \aleph_\alpha$.

Dim. Possiamo assumere che $\emptyset \notin S \neq \emptyset$. Basta esibire una funzione surgettiva $f : \omega_\alpha \times \omega_\alpha \to \bigcup S$. Sia $g : \omega_\alpha \to S$ surgettiva. Per ipotesi, per ogni $A \in S$, l'insieme $H_A \overset{\text{def}}{=} \{h : \omega_\alpha \to A \mid h \text{ è surgettiva}\}$ è non vuoto. Sia l una funzione di scelta per $\{H_A \mid A \in S\}$. Allora

$$f : \omega_\alpha \times \omega_\alpha \to \bigcup S$$
$$(x, y) \mapsto (l(H_{g(x)}))(y) \quad \text{è surgettiva.}$$

Infatti: preso $z \in \bigcup S$, esiste $A \in S$ tale che $z \in A$, quindi esiste $x \in \omega_\alpha$ tale che $z \in g(x) = A$. Siccome $h = l(H_A)$ è surgettiva $\omega_\alpha \to A$, esiste y tale che $z = h(y) = (l(H_{g(x)}))(y)$. ∎

Cor L'unione numerabile (risp. al più numerabile) di insiemi numerabili (risp. al più numerabili) è numerabile (risp. al più numerabile).

Oss Sia $\mathcal{P}^{\leq n}(X) \overset{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{P}(X) \mid |A| \leq n\}$

Se X è infinito e $0 < n < \omega$, allora $|\mathcal{P}^{\leq n}(X)| = |X|$

Dim La disuguaglianza $|X| \leq |\mathcal{P}^{\leq n}(X)|$ segue dal fatto che la funzione $X \to \mathcal{P}^{\leq n}(X)$, $a \mapsto \{a\}$ è iniettiva.

Per dimostrare la disuguaglianza opposta, sia $|X| = \aleph_\alpha$, allora $|{}^n X| = \aleph_\alpha^n = \aleph_\alpha$, quindi basta osservare che la funzione seguente è surjettiva: $X^n \to \{A \in \mathcal{P}(X) \mid 0 < |A| \leq n\} \subseteq \mathcal{P}^{\leq n}(A)$

$f \mapsto \mathrm{Im}(f)$ ∎

Esercizio Se X è infinito e $0 < n < \omega$, $|\{A \in \mathcal{P}(X) \mid |A| = n\}| = |X|$

Prop Se X è infinito, $|\mathcal{P}^{\text{fin}}(X)| = |X|$

Dim $\mathcal{P}^{\text{fin}}(X) = \bigcup \{\mathcal{P}^{\leq n}(X) \mid n \in \omega\}$ è unione di $\aleph_0 < |X|$ insiemi di cardinalità $|X|$. ∎

Prop Un ordine totale $(A, <)$ è un buon ordine se e solo se non esiste una successione decrescente $\{a_n\}_{n \in \omega}$ di elementi di A.

Dim

Da un lato, se $\{a_n\}_{n \in \omega}$ è una successione decrescente, allora $\{a_n \mid n \in \omega\}$ non ha minimo, quindi $(A, <)$ non è un buon ordine.

Per il viceversa, se $(A, <)$ non è un buon ordine sia $S \subseteq A$ con $S \neq \emptyset$ che non ha minimo. Consideriamo una funzione di

scelta $f : \mathcal{P}^{\neq\emptyset}(S) \to S$, e, fissato un $a_0 \in S$ qualunque, definiamo per ricorsione $a_{n+1} = f(\{x \in S \mid x < a_n\})$.

Siccome S non ha minimo, l'insieme a cui è applicata f non è mai vuoto, per cui la successione a_n è ben definita ∎