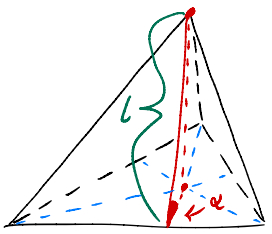
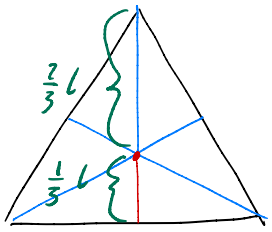
f è quindi la proiezione su un complementale del sottospazio $\pi\mathbb{Q}$.
L'additività di f è conseguenza immediata della $\mathbb{Q}$-linearità.
Inoltre, per definizione, $f(x)=0$ se e solo se x si scrive nella forma πq_0 con $q_0 \in \mathbb{Q}$.

Ora si chiama che il valore di un cubo è nullo, perché tutti i diedri hanno ampiezza $\frac{1}{2}\pi$. Occorre quindi dimostrare che il valore di un tetraedro regolare è non nullo. Si vede facilmente che i diedri del tetraedro valgono $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$ quindi basta dire che questo α non è multiplo razionale di π. In altri termini, che, se $n \in \mathbb{N}$, $n\alpha$ non è multiplo intero di π.





Questo fatto si può esprimere, altresì, dicendo che $z^n \neq \mathbb{R}$ dove $z \overset{def}{=} \cos\alpha + i\cdot\sin\alpha \in \mathbb{C}$. Ora, $z = \frac{1}{3}(1+2i\sqrt{2})$. Si vede immediatamente, per induzione, che $(1+2i\sqrt{2})^n = x_n + y_n i\sqrt{2}$ per qualche $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$. Inoltre, sempre per induzione, riducendo x_n e y_n modulo 3, otteniamo che, per n dispari $x_n \equiv 1\ (3)$ $y_n \equiv 2\ (3)$, per n pari e $\neq 0$ $x_n \equiv 2\ (3)$ $y_n \equiv 1\ (3)$. In nessun caso, in particolare $y_n = 0$. ∎

Veniamo ora ad un'altra applicazione che da luogo ad un risultato negativo: il controesempio di Vitali.

Premessa Una misura σ-additiva su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ è una funzione $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e, se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è una

successione di elementi **disgiunti** di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ allora

$$\mu\left(\bigcup\{A_i \mid i\in\omega\}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A_i)$$

μ si dice **invariante per traslazioni** se $\forall x\in\mathbb{R}$, $A\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$\mu(A) = \mu\left(\{y\in\mathbb{R} \mid y-x\in A\}\right) \overset{\text{def}}{=} A+x$$

Oss. (monotonia) Se $A\subseteq B\subseteq\mathbb{R}$, $\mu(A)\leq\mu(B)$.

Dim $\mu(B) = \mu(A\cup(B\setminus A)) = \mu(B)+\mu(B\setminus A) \geq \mu(A)$.

Esercizio Esibire una misura σ-additiva ed invariante per traslazioni su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Prop. Non esiste una misura σ-additiva ed invariante per traslazioni μ su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tale che $\mu([0,1[)=1$

Dim. Supponiamo, per assurdo, che esista μ. Cerchiamo degli insiemi disgiunti $A_i\subseteq[0,1[$ con $i\in\omega$ tali che per ogni $i,j\in\omega$ $\mu(A_i)=\mu(A_j)$ e $[0,1[= \bigcup\{A_i \mid i\in\omega\}$. Questo ci, infatti, assurdo perché se $\mu(A_i)=\mu(A_j)=0$, allora $\mu([0,1[) = \sum_{i=0}^{\infty} 0 = 0 \neq 1$, ma se $\mu(A_i)=\mu(A_j)=k>0$, allora $\mu([0,1[) = \sum_{i=0}^{\infty} k = +\infty \neq 1$.

Sia $i\mapsto q_i$ un'enumerazione di $\mathbb{Q}$. Fissiamo una base B di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale. Possiamo assumere $b_0=1\in B$ — altrimenti prendiamo $b_0\in B$ e moltiplichiamo tutti gli elementi di B per $\frac{1}{b_0}$. Definiamo

$$R_i \overset{\text{def}}{=} \{x\in\mathbb{R} \mid x = r_0\cdot 1 + q_i\cdot b_1 + r_2\cdot b_2 + \dots + r_n\cdot b_n \text{ con } r_0, r_2 \dots r_n \in \mathbb{Q}\}$$

$A_i \overset{\text{def.}}{=} R_i \cap [0,1[$

Ossia $x \in R_i$ se e solo se la componente b_1 di x è q_i. Siccome la successione $\{q_i\}_{i\in\omega}$ enumera i razionali, gli insiemi $\{R_i\}_{i\in\omega}$ sono una partizione di $\mathbb{R}$. Di conseguenza gli insiemi $\{A_i\}_{i\in\omega}$ sono una partizione di $[0,1[$.

Dimostriamo che $\mu(A_i) = \mu(A_j)$. Siano $\delta = (q_j - q_i)\, b_1$, $k = \lceil \delta \rceil$

Consideriamo l'insieme $A_i + \delta$.

$$x \in R_i \iff x \in \mathrm{Span}(\mathcal{B} \setminus \{b_1\}) + q_i b_1 \qquad = q_i b_1 + (q_j - q_i) b_1$$
$$\iff x + \delta \in \mathrm{Span}(\mathcal{B} \setminus \{b_1\}) + q_j b_1 \iff x + \delta \in R_j$$

Quindi $A_i + \delta = (R_i + \delta) \cap [\delta, \delta+1[= R_j \cap [\delta, \delta+1[$

$$= \underbrace{(R_j \cap [\delta, k[)}_{\overset{\text{def}}{=} X_1} \cup \underbrace{(R_j \cap [k, \delta+1[)}_{\overset{\text{def}}{=} X_2}$$

Similmente a prima, per $n \in \mathbb{N}$

$$x \in R_j \iff x \in \mathrm{Span}(\mathcal{B} \setminus \{b_1\}) + \mathbb{Q} + q_j b_1 \qquad \mathbb{Q} + n = \mathbb{Q}$$
$$\iff x + n \in \mathrm{Span}(\mathcal{B} \setminus \{b_1\}) + \mathbb{Q} + q_j b_1 \iff x + n \in R_j$$

Quindi $Y_1 \overset{\text{def}}{=} X_1 - k + 1 = R_j \cap [\delta - k + 1, 1[$

$Y_2 \overset{\text{def.}}{=} X_2 - k = R_j \cap [0, \delta - k + 1[$

Di conseguenza $Y_1 \cap Y_2 \subseteq [\delta - k + 1, 1[\cap [0, \delta - k + 1[= \emptyset$ e

$Y_1 \cup Y_2 = R_j \cap ([\delta - k + 1, 1[\cup [0, \delta - k + 1[) = R_j \cap [0,1[= A_j$

Mettendo tutto insieme

$$\mu(A_j) = \mu(Y_1) + \mu(Y_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2) = \mu(A_i + \delta) = \mu(A_i)$$

∎

Esercizio Una maniera alternativa di dimostrare la proposizione

precedente è come segue:

- considerare la relazione di equivalenza su $[0,1[$ data da $x \sim y \overset{\text{def.}}{\iff} x-y \in \mathbb{Q}$.
- fissare un $V \subseteq [0,1[$ che contiene uno ed un solo elemento per ogni classe di equivalenza — qui si usa AC
- dimostrare $[0,1[\subseteq S \overset{\text{def.}}{=} \bigcup \{ V+r \mid r \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[\} \subseteq [-1,2[$ per cui $1 \leq \mu(S) \leq 3$
- osservare, tuttavia, che se $\mu(V)=0$ allora $\mu(S)=0$ e se $\mu(V)>0$ allora $\mu(S)=+\infty$.

Il teorema di Cantor-Bendixson

Il teorema di Cantor-Bendixson, che permette di dimostrare l'ipotesi del continuo limitatamente ai sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$, non è, tecnicamente, un'applicazione di AC. Tuttavia è un esempio di come le tecniche insiemistiche — segnatamente la ricorsione transfinita — hanno conseguenze in matematica.

Come abbiamo osservato all'inizio del corso, quello di indagare la struttura dei sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$ è stato, forse, uno dei problemi che hanno motivato lo sviluppo della teoria di Cantor. In questa sezione ne vedremo, in qualche misura, la soluzione.

Promemoria Se $S \subseteq \mathbb{R}$ diciamo che $x \in \mathbb{R}$ è un *punto di accumulazione* di S se $x \in \overline{(S \setminus \{x\})}$ — ossia se esiste una successione $\{x_i\}_{i \in \omega}$ di punti di $S \setminus \{x\}$ tale che $\lim_{i \to \infty} x_i = x$.
Diciamo che $S \subseteq \mathbb{R}$ è *perfetto* se S coincide con l'insieme dei suoi punti di accumulazione.

Esempio Un intervallo chiuso è perfetto.

Esercizio Esibire un insieme perfetto non vuoto avente *parte interna** vuota. $\to \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in S \mid \exists \varepsilon > 0 \;]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq S\}$

Prop Se $S \subseteq [0,1]$ è perfetto allora $|S| = 2^{\aleph_0}$

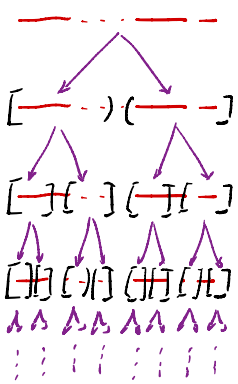
Per dimostrare questa proposizione, è comoda l'osservazione seguente.

Oss Se $S \subseteq [0,1]$ è perfetto e non vuoto allora esistono S_1 e S_2 sottoinsiemi di S perfetti, non vuoti, e disgiunti.

Dim Un singoletto non è perfetto, quindi esistono $x_1, x_2 \in S$ con $x_1 < x_2$. Ora si danno due casi

- Se $[x_1, x_2] \subseteq S$: consideriamo x_3, x_4 con $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$ e definiamo $S_1 = S \cap [0, x_3]$, $S_2 = S \cap [x_4, 1]$.
- Se esiste $x_3 \in [x_1, x_2] \setminus S$: definiamo $S_1 = S \cap [0, x_3[$ e $S_2 = S \cap]x_3, 1]$. ∎

Dim (proposizione) L'idea è di usare l'osservazione per dividere l'insieme S in due, poi, ricorsivamente ciascuna delle due parti nuovamente in due, e così via. Si ottiene un albero binario di sottoinsiemi perfetti di S. Quest'albero ha $2^{\aleph_0}$ rami infiniti,



uno per ogni successione di cifre binarie, e l'intersezione degli insiemi di ogni ramo è un'intersezione di compatti uno nell'altro, quindi non vuota. Per cui abbiamo una funzione iniettiva dalle successioni di cifre binarie a S.

Sia $\mathcal{P}$ l'insieme dei sottoinsiemi perfetti di $[0,1]$. Fissiamo $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ che manda ogni $X \in \mathcal{P}$ in una coppia (X_1, X_2)

con $X_1 \cup X_2 \subseteq X$ e $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Assegnamo ad ogni sequenza binaria finita $\alpha : n \to \{0,1\}$, un sottoinsieme perfetto S_α di S, procedendo per ricorsione su n. A questo scopo, data $\alpha : n \to \{0,1\}$ e $b \in \{0,1\}$ indichiamo con $\alpha^\frown b$ la sequenza $\alpha \cup \{(n,b)\} : n+1 \to \{0,1\}$. Allora definiamo

$$S_\emptyset = S \qquad S_{\alpha^\frown b} = \begin{cases} X & \text{se } b=0 \\ Y & \text{se } b=1 \end{cases} \quad \text{dove } (X,Y) = f(S_\alpha)$$

Data una successione infinita $\tau : \omega \to \{0,1\}$, definiamo infine

$$S_\tau = \bigcap \{ S_\alpha \mid \alpha = \tau|_n \,,\, n \in \omega \}$$

Osserviamo che, per ogni successione τ, $S_\tau \neq \emptyset$, infatti, per ogni n, $S_{\tau|_{S(n)}} \subseteq S_{\tau|_n}$, i compatti $S_{\tau|_n}$ costituiscono, quindi, una catena di compatti non vuoti, per cui la loro intersezione, che è S_τ, non è vuota. Inoltre, se $\tau \neq \rho$ allora $S_\tau \cap S_\rho = \emptyset$. Infatti, detto n il minimo indice per cui $\tau_n \neq \rho_n$ — senza perdita di generalità assumiamo $\tau_n = 0$ e $\rho_n = 1$ — abbiamo quindi $S_{\tau|_{S(n)}} = A$ e $S_{\rho|_{S(n)}} = B$ con $(A,B) = f(S_{\tau|_n}) = f(S_{\rho|_n})$, quindi $S_\tau \subseteq A$ e $S_\rho \subseteq B$ sono disgiunti poiché $A \cap B = \emptyset$.

In conclusione, per ogni $\tau \in 2^\omega$ possiamo scegliere un punto in S_τ e questa funzione è iniettiva, quindi $2^{\aleph_0} \leq |S|$. D'altro canto $|S| \leq |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, quindi $|S| = 2^{\aleph_0}$. ∎

Esercizio Dimostrare la proposizione con $\mathbb{R}$ al posto di $[0,1]$.

Esercizio In quali passaggi della dimostrazione precedente abbiamo fatto uso dell'assioma della scelta?

Esercizio Dimostrare la proposizione senza fare uso di AC.

Teo (Cantor - Bendixson)
Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso. Allora $C = A \cup P$ con $|A| \leq \aleph_0$ e P perfetto

Dim

Dato un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ definiamo il suo derivato

$$X' \overset{def}{=} \{\text{punti di accumulazione di } X\}$$
$$= \{a \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 \ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap (X \setminus \{a\}) \neq \emptyset\}$$

Chiaramente, se X è chiuso

$$X' = X \setminus \{\text{punti isolati di } X\}$$

dove un punto $a \in X$ è isolato se $\exists \varepsilon > 0 \ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap X = \{a\}$.

Ci servirà l'osservazione seguente: $a \in X$ è un punto isolato di X se e solo se esiste un intervallo $]s,t[$ avente estremi razionali che isola a in X, ossia

$$\exists s, t \in \mathbb{Q} \quad s < t \wedge]s,t[\cap X = \{a\}$$

Costruiamo ora una successione transfinita di sottoinsiemi chiusi C_α di C, per $\alpha \in Ord$, tramite la seguente ricorsione

$$C_0 = C \qquad C_{\alpha+1} = C'_\alpha \qquad C_\lambda = \bigcap \{C_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$$

Per vedere che tutti gli insiemi C_α sono chiusi basta osservare

che il derivato di un chiuso è chiuso ed un'intersezione di chiusi è chiusa. Osserviamo, inoltre, che $\alpha \leq \beta \to C_\beta \subseteq C_\alpha$. Definiamo

$$P = \bigcap_{\alpha \in Ord} C_\alpha = \{ a \in \mathbb{R} \mid \forall \alpha \in Ord \quad a \in C_\alpha \}$$
$$A = C \setminus P$$

Dobbiamo dimostrare che P è perfetto e $|A| \leq \aleph_0$.

P è perfetto.

P è chiuso in quanto intersezione di chiusi, occorre quindi dimostrare che ogni $a \in P$ è punto di accumulazione di P. Per assurdo, sia $\varepsilon > 0$ tale che $P \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \{a\}$. Per ogni $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\setminus \{a\}$, siccome $x \notin P$, esiste α tale che $x \notin C_\alpha$ abbiamo, quindi α_x minimo tale che $x \notin C_{\alpha_x}$. Sia

$$\beta = \sup \{ \alpha_x \mid x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\setminus \{a\} \}$$

Ora, $C_\beta \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \{a\}$ quindi a è un punto isolato di C_β e $a \notin C_{s(\beta)}$ che implica $a \notin P$ ↯

A è al più numerabile.

Per ogni $x \in A$ possiamo considerare α_x minimo tale che $x \notin C_{\alpha_x}$. Questo α_x deve essere successore, perché, se fosse limite, avremmo $C_{\alpha_x} = \bigcap \{ C_y \mid y < \alpha_x \}$ ed esisterebbe $y < \alpha_x$ tale che $x \notin C_y$. Possiamo quindi definire β_x tramite $\alpha_x = s(\beta_x)$. Per cui C_{β_x} è l'ultimo dei C_α a contenere x.

Siccome $x \in C_{\beta_x}$ ma $x \notin C_{s(\beta_x)} = C'_{\beta_x}$, x deve essere un punto

isolato di C_{n_x}. Scegliamo un intervallo $]s_x, t_x[$ avente estremi razionali che isola x in C_{n_x}.
Ci basta dimostrare che la funzione seguente è iniettiva:

$$A \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$
$$x \longmapsto (s_x, t_x)$$

Siano x, y tali che $]s_x, t_x[=]s_y, t_y[$. Supponiamo, senza perdita di generalità, $n_x \leq n_y$. Allora

$$y \in]s_y, t_y[\cap C_{n_y} \subseteq]s_x, t_x[\cap C_{n_x} = \{x\}$$

Di conseguenza $y = x$. ∎

Cor Se $C \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso allora o $|C| = 2^{\aleph_0}$ o $|C| \leq \aleph_0$.
"Vale l'ipotesi del continuo per i sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$"

Dim Scriviamo $C = A \cup P$ usando il teorema. Se $P = \emptyset$ allora $|C| = |A| \leq \aleph_0$. Altrimenti $2^{\aleph_0} = |P| \leq |C| \leq 2^{\aleph_0}$ ∎

L'esempio seguente mostra che l'ipotesi che C sia chiuso non può essere omessa.

Esempio Esiste $S \subseteq \mathbb{R}$ non numerabile che non contiene alcun insieme perfetto non vuoto.

Dim Sia $|\mathbb{R}| = \aleph_\alpha$. E sia $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$ una funzione di scelta. È facile vedere che

$$2^{\aleph_0} = |\text{intervalli}| \leq |\text{perfetti non vuoti}| \leq |\text{chiusi}| = |\text{aperti}| = 2^{\aleph_0}$$

Quindi esiste una funzione surgettiva

$$\omega_\alpha \longrightarrow \text{perfetti non vuoti}$$
$$\beta \longmapsto P_\beta$$

Definiamo per ricorsione transfinita

$$g : \omega_\alpha \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$\beta \longmapsto (g_1(\beta), g_2(\beta))$$

con

$$g_1(\beta) = f\left(P_\beta \setminus (g_1[\beta] \cup g_2[\beta])\right)$$
$$g_2(\beta) = f\left(\mathbb{R} \setminus (g_1[\beta] \cup g_2[\beta] \cup \{g_1(\beta)\})\right)$$

La funzione g è ben definita perché, per ogni $\beta < \omega_\alpha$, $|\beta| < \aleph_\alpha$, quindi $|g_1[\beta]| < \aleph_\alpha$ e $|g_2[\beta]| < \aleph_\alpha$. d'altro canto $|P_\beta| = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| = \aleph_\alpha$. Di conseguenza, f è sempre applicata ad insiemi non vuoti.

Dimostriamo che $S = g_2[\omega_\alpha]$ soddisfa la tesi:
La funzione $g_2 : \omega_\alpha \to \mathbb{R}$ è iniettiva, perché, se $\gamma < \beta$, $g_2(\gamma) \in g_2[\beta]$ e $g_2(\beta) = f\left(\mathbb{R} \setminus (\ldots g_2[\beta] \ldots)\right) \neq g_2(\gamma)$.
Per cui $|g_2[\omega_\alpha]| = 2^{\aleph_0}$.

Fissiamo ora un perfetto non vuoto P_β. Dobbiamo dimostrare che $P_\beta \not\subseteq g_2[\omega_\alpha]$. Ci basta dire che $g_1(\beta) \notin g_2[\omega_\alpha]$.
Supponiamo per assurdo $g_1(\beta) = g_2(\gamma)$ per qualche $\gamma < \omega_\alpha$.
Se $\gamma < \beta$, $g_1(\beta) = g_2(\gamma) \in g_1[\beta] \cup g_2[\beta]$ ↯
Se $\beta \leq \gamma$, $g_2(\gamma) = g_1(\beta) \in g_1[\gamma] \cup g_2[\gamma] \cup \{g_1(\gamma)\}$ ↯ ∎