Riepilogo delle forme equivalenti di AC

Abbiamo visto che diverse proposizioni sono equivalenti allo assioma della scelta. Per esempio, fissati gli altri assiomi, AC e l'affermazione che ogni insieme è bene ordinabile si implicano vicendevolmente. Elenchiamo le principali forme equivalenti dell'assioma della scelta.

Prop Assumendo gli assiomi di estensionalità, insieme vuoto, separazione, paio, unione, parti, infinito e rimpiazzamento, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- l'assioma della scelta
- ogni funzione surgettiva ha un'inversa destra
- il teorema del buon ordinamento
- il lemma di Zorn
- ogni cardinalità infinita è un aleph
- $\forall X, Y \ |X| \leq |Y| \vee |Y| \leq |X|$
- $\forall X \ |X| \geq \aleph_0 \rightarrow |X \times X| = |X|$ ← Dobbiamo ancora dimostrare questo!

Teo (Tarski)
Se per ogni X infinito $|X \times X| = |X|$, allora vale AC.

Dim
Dato un insieme infinito X cerchiamo un buon ordinamento di X. Basta costruire una funzione γ che immerge X negli ordinali.

Applicando l'ipotesi a $X \sqcup H(X)$ otteniamo

$$|X \times H(X)| \leq |(X \sqcup H(X)) \times (X \sqcup H(X))| = |X \sqcup H(X)|$$

Quindi esiste una funzione iniettiva $f : X \times H(X) \to X \sqcup H(X)$.

Per ogni $a \in X$ consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} f_a : H(X) &\to X \sqcup H(X) \\ b &\mapsto f(a,b) \end{aligned}$$

Se l'immagine $f_a[H(X)]$ di f_a fosse contenuta in X, allora avremmo una funzione iniettiva da $H(X)$ a X, che non può esistere. Quindi $f_a[H(X)] \cap H(X) \neq \emptyset$. Definiamo

$$\begin{aligned} g : X &\to H(X) \\ a &\mapsto \min\left(f_a[H(X)] \cap H(X)\right) \end{aligned}$$

Questa funzione è ben definita perché $f_a[H(X)] \cap H(X) \subseteq H(X)$ è un insieme di ordinali, dunque ha un minimo. Inoltre g è iniettiva perché, se $a \neq b$, $g(a) = f(a, \text{qualcosa})$ e, per l'iniettività di f, $f(a, \text{qualcosa}) \neq f(b, \text{qualcosa}) = g(b)$. ∎

Aritmetica cardinale

Notazione κ è un cardinale $\overset{\text{def.}}{\equiv}$ κ è un ordinale iniziale

$\kappa = \lambda^+ \overset{\text{def.}}{\equiv}$ κ è il minimo cardinale $> \lambda$ $\left(\omega_\alpha^+ = \omega_{\alpha+1}\right)$

Possiamo definire le operazioni di prodotto, somma e potenza cardinale, per cui se $\kappa = \omega_\alpha$ $\lambda = \omega_\beta$ $\mu = \omega_\gamma$ scriviamo

$k = \lambda + \mu$, $k = \lambda \cdot \mu$, $k = \lambda^{\mu}$ per $\aleph_\alpha = \aleph_\beta + \aleph_\gamma$, $\aleph_\alpha = \aleph_\beta \cdot \aleph_\gamma$, $\aleph_\alpha = \aleph_\beta^{\aleph_\gamma}$.

Occorre fare attenzione a non confondere le operazioni cardinali con quelle ordinali. In questa sezione, ci occupiamo di operazioni cardinali

Siccome ad ogni cardinalità corrisponde un unico ordinale iniziale che abbia quella cardinalità, possiamo scrivere

$$k = |X| \overset{\text{def.}}{\equiv} k \text{ è un cardinale e } |k| = |X|$$

Def (Somme e prodotti infiniti)

Sia I un insieme e $\{k_i\}_{i \in I}$ una famiglia di cardinali.

Formalmente, la famiglia $\{k_i\}_{i \in I}$ è una funzione f tale che $\mathrm{Dom}(f) = I$ e $\forall i \in I \; f(i)$ è un cardinale, k_i è un'abbreviazione per $f(i)$.

$$\sum_{i \in I} k_i \overset{\text{def.}}{=} \left| \bigcup \{ k_i \times \{i\} \mid i \in I \} \right|$$

$$\prod_{i \in I} k_i \overset{\text{def.}}{=} \left| \{ f : I \to \sup_i k_i \mid \forall i \in I \; f(i) \in k_i \} \right|$$

Nota Se $\forall i \in I \; k_i = |X_i|$ e gli insiemi X_i sono a due a due disgiunti allora

$$\sum_{i \in I} k_i = \left| \bigcup \{ X_i \mid i \in I \} \right|$$

Dim (richiede AC!) $|k_i \times \{i\}| = |k_i| \cdot 1 = |k_i| = |X_i|$

Per ogni i scegliamo una biezione $f_i : k_i \times \{i\} \to X_i$.

Allora $f : \bigcup \{ k_i \times \{i\} \mid i \in I \} \longrightarrow \bigcup \{ X_i \mid i \in I \}$

$(a, i) \longmapsto f_i(a)$

(ossia $f = \bigcup \{ f_i \mid i \in I \}$) è una biiezione. ∎

Nota Se $\forall i \in I \quad k_i = |X_i|$

$$\sum_{i \in I} k_i \geq \left| \bigcup \{ X_i \mid i \in I \} \right|$$

$$\prod_{i \in I} k_i = \left| \{ f : I \to \bigcup \{ X_i \mid i \in I \} \mid \forall i \; f(i) \in X_i \} \right|$$

Dim Per la prima disuguaglianza si osserva che la funzione definita nella dimostrazione precedente è surgettiva — solo l'iniettività richiede, infatti, che gli insiemi X_i siano disgiunti.

La seconda è del tutto analoga. Date $g_i : k_i \to X_i$ biiezioni

$$g : \{ f : I \to \dots \mid \forall i \; f(i) \in k_i \} \longrightarrow \{ f : I \to \dots \mid \forall i \; f(i) \in X_i \}$$

$$g(f)(i) = g_i(f(i))$$

è una biiezione. ∎

Oss

$$k^{\sum_{i \in I} \lambda_i} = \prod_{i \in I} k^{\lambda_i}$$

Dim Un elemento dell'insieme a sinistra è una funzione $f : \bigcup \{ \lambda_i \times \{i\} \mid i \in I \} \to k$ e possiamo identificarla con la funzione $\tilde{f} : I \to \bigcup \{ k^{\lambda_i} \mid i \in I \}$

$i \mapsto \tilde{f}_i$ definita da $\tilde{f}_i(\alpha) = f(\alpha, i)$ ∎

Esercizio Valgono le proprietà ragionevoli, per esempio

- Se $\forall i \in I \quad k_i \leq \lambda_i$

$$\sum_{i\in I} k_i \leq \sum_{i\in I} \lambda_i \qquad \prod_{i\in I} k_i \leq \prod_{i\in I} \lambda_i$$

- $\forall i \in I \quad k_i \leq \sum_{i\in I} k_i$
- Se $\forall i \in I \quad k_i \neq 0$

$$|I| \leq \sum_{i\in I} k_i \qquad \forall i \in I \quad k_i \leq \prod_{i\in I} k_i$$

- Se $I = I_1 \cup I_2$

$$\sum_{i\in I} k_i = \left(\sum_{i\in I_1} k_i\right) + \left(\sum_{i\in I_2} k_i\right) \qquad \prod_{i\in I} k_i = \left(\prod_{i\in I_1} k_i\right)\cdot\left(\prod_{i\in I_2} k_i\right)$$

- $\sum_{i\in k} \lambda = k \cdot \lambda \qquad \prod_{i\in k} \lambda = \lambda^k$
- $\left(\prod_{i\in I} k_i\right)^\lambda = \prod_{i\in I} k_i^\lambda$

Prop: Supponiamo che k_i per $i \in I$ siano cardinali $\neq 0$. Allora

$$\sum_{i\in I} k_i = |I| \cdot \sup_{i\in I} k_i = \max\left(|I|, \sup_{i\in I} k_i\right)$$

Dim $\leq$ $\quad \sum_{i\in I} k_i \leq \sum_{i\in I}\left(\sup_{j\in I} k_j\right) = |I| \cdot \sup_{i\in I} k_i$

$\geq$ Siccome $|I| \cdot \sup_{i\in I} k_i$ è il massimo fra $|I|$ e $\sup_{i\in I} k_i$, basta verificare che $\sum_{i\in I} k_i \geq |I|$ e $\sum_{i\in I} k_i \geq \sup_{i\in I} k_i$.

La prima è conseguenza dell'esercizio precedente.

La seconda segue osservando che $\forall j \in I \quad \sum_{i\in I} k_i \geq k_j$. ∎

Teo (König) Se $\forall i \in I \quad k_i < \lambda_i$ allora $\sum_{i\in I} k_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$

Dim Dimostriamo che non può valere il $\geq$.

Siano: $A = \{ f : I \to \sup_i \lambda_i \mid \forall i \in I \ f(i) \in \lambda_i \}$

$B = \bigcup \{ k_i \times \{i\} \mid i \in I \}$

Data $f : A \to B$, dobbiamo dimostrare che f non è surgettiva.

Consideriamo $f_i : k_i \longrightarrow \lambda_i$

$\alpha \longmapsto f(\alpha, i)(i) \in \lambda_i$

Siccome $k_i < \lambda_i$, f_i non può essere surgettiva, quindi, per ogni i, $\lambda_i \setminus \mathrm{Im}(f_i) \neq \emptyset$. Per l'assioma di scelta, c'è

$g : I \longrightarrow \sup_{i \in I} \lambda_i$

$i \longmapsto g(i) \in \lambda_i \setminus \mathrm{Im}(f_i)$.

Chiaramente $g \in B$, verifichiamo che $g \notin \mathrm{Im}(f)$.

Se $g = f(\alpha, i)$ allora $g(i) = f(\alpha, i)(i) = f_i(\alpha) \in \mathrm{Im}(f_i)$ ↯

Esempio

$$k = \sum_{i \in k} 1 < \prod_{i \in k} 2 = 2^k$$

Quindi il teorema di Cantor ($|X| < |\mathcal{P}(X)|$) si può vedere come conseguenza della disuguaglianza di König.

Esempio

$$\aleph_w = \sum_{\alpha \in w} w_\alpha < \prod_{\alpha \in w} w_{\alpha+1} \leq \aleph_w^{\aleph_0}$$

Quindi, in particolare, possiamo dedurre che $2^{\aleph_0} \neq \aleph_w$

infatti vale

$$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}$$

mentre avremmo $<$ se, per assurdo, $2^{\aleph_0} = \aleph_w$.

Def (cofinalità – v.1)

Dato un cardinale infinito k, la cofinalità di k, $\mathrm{cof}(k)$, è il minimo cardinale μ per cui esiste una famiglia $\{\lambda_i\}_{i\in\mu}$ di cardinali tale che $\forall i\in\mu \ \lambda_i<k$ e $k=\sum_{i\in\mu}\lambda_i$.

In altri termini, $\mathrm{cof}(k)$ è il minimo numero di parti $<k$ in cui può essere diviso un insieme di cardinalità k.

Esempi

$\mathrm{cof}(\aleph_0)=\aleph_0$ — un'unione finita di insiemi finiti è finita

$\mathrm{cof}(\aleph_\omega)=\aleph_0$ — $\sum_{\alpha<\omega}\aleph_\alpha=\aleph_\omega$, se $|I|<\aleph_0$, $\sum_{\alpha\in I}\aleph_\alpha=\aleph_{\max(I)}<\aleph_\omega$

$\mathrm{cof}(\aleph_{\omega_2})=\aleph_{\omega_2}$ — $\aleph_{\omega_2}=\sum_{i\in I}k_i\le\sum_{i\in I}\aleph_{\omega_1}=\max(|I|,\aleph_{\omega_1})\longrightarrow|I|=\aleph_{\omega_2}$

Def (cofinalità – v.2)

Dato un insieme ordinato $(S,<)$, diciamo che $A\subseteq S$ è cofinale in S se $\forall x\in S\ \exists y\in A\ x\le y$ — ossia A non ha maggioranti stretti in S. La cofinalità di $(S,<)$ è la minima cardinalità di un sottoinsieme cofinale di S.

Esempi

$\mathrm{cof}(\omega)=\aleph_0$ — ω è cofinale in sé stesso, un sottoins. finito ha massimo

$\mathrm{cof}(\mathbb{R},<)=\aleph_0$ — $\mathbb{N}$ è cofinale in $\mathbb{R}$

$\mathrm{cof}(\omega+1)=1$ — $\{\omega\}$ è cofinale in $\omega+1$

$\mathrm{cof}(\omega_\omega)=\aleph_0$ — $\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\dots\}$ è cofinale in $\omega_\omega=\sup_{i\in\omega}\omega_i$

$\mathrm{cof}(\omega_{\omega_2})=\aleph_{\omega_2}$ — Per la proposizione seguente