Def (cofinalità – v.1)

Dato un cardinale infinito k, la cofinalità di k, $\mathrm{cof}(k)$, è il minimo cardinale μ per cui esiste una famiglia $\{\lambda_i\}_{i\in\mu}$ di cardinali tale che $\forall i\in\mu \ \lambda_i<k$ e $k=\sum_{i\in\mu}\lambda_i$.

In altri termini, $\mathrm{cof}(k)$ è il minimo numero di parti $<k$ in cui può essere diviso un insieme di cardinalità k.

Esempi

$\mathrm{cof}(\aleph_0)=\aleph_0$ — un'unione finita di insiemi finiti è finita

$\mathrm{cof}(\aleph_\omega)=\aleph_0$ — $\sum_{\alpha<\omega}\aleph_\alpha=\aleph_\omega$, se $|I|<\aleph_0$, $\sum_{\alpha\in I}\aleph_\alpha=\aleph_{\max(I)}<\aleph_\omega$

$\mathrm{cof}(\aleph_{\omega_2})=\aleph_{\omega_2}$ — $\aleph_{\omega_2}=\sum_{i\in I}k_i\le\sum_{i\in I}\aleph_{\omega_1}=\max(|I|,\aleph_{\omega_1})\longrightarrow|I|=\aleph_{\omega_2}$

Def (cofinalità – v.2)

Dato un insieme ordinato $(S,<)$, diciamo che $A\subseteq S$ è cofinale in S se $\forall x\in S\ \exists y\in A\ x\le y$ — ossia A non ha maggioranti stretti in S. La cofinalità di $(S,<)$ è la minima cardinalità di un sottoinsieme cofinale di S.

Esempi

$\mathrm{cof}(\omega)=\aleph_0$ — ω è cofinale in sé stesso, un sottoins. finito ha massimo

$\mathrm{cof}(\mathbb{R},<)=\aleph_0$ — $\mathbb{N}$ è cofinale in $\mathbb{R}$

$\mathrm{cof}(\omega+1)=1$ — $\{\omega\}$ è cofinale in $\omega+1$

$\mathrm{cof}(\omega_\omega)=\aleph_0$ — $\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\dots\}$ è cofinale in $\omega_\omega=\sup_{i\in\omega}\omega_i$

$\mathrm{cof}(\omega_{\omega_2})=\aleph_{\omega_2}$ — Per la proposizione seguente

Prop. Se k è un cardinale infinito $\mathrm{cof}^{(V.1)}(k) = \mathrm{cof}^{(V.2)}(k)$.

Dim Siano $\lambda_1 = \mathrm{cof}^{(V.1)}(k)$ e $\lambda_2 = \mathrm{cof}^{(V.2)}(k)$.

$(\lambda_1 \leq \lambda_2)$ Sia A cofinale in k. Siccome k è limite $\alpha \in k \to s(\alpha) \in k$ quindi $\forall \alpha \in k \; \exists \beta \in A \; s(\alpha) \leq \beta$ da cui $\forall \alpha \in k \; \exists \beta \in A \; \alpha \in \beta$ ossia $k = \bigcup A$. Abbiamo quindi $k \leq \sum_{\beta \in A} |\beta| \leq \sum_{\beta \in A} k = k$. Siccome $\forall \beta \in A \; \beta < k$ e k è iniziale, vale anche $\forall \beta \in A \; |\beta| < k$.

L'identità $\sum_{\alpha \in A} |\alpha| = k$ dimostra quindi che $\lambda_1 \leq |A|$.

$(\lambda_2 \leq \lambda_1)$ Se $\lambda_1 = k$ non c'è niente da dimostrare, perché k stesso è cofinale in sé. Assumiamo quindi $\lambda_1 < k$. Per ipotesi, esiste $\{k_i\}_{i \in I}$ con $|I| = \lambda_1$, tale che

$$k = \sum_{i \in I} k_i = \max\left(|I|, \sup_{i \in I} k_i\right) = \sup_{i \in I} k_i$$

(perché $|I| = \lambda_1 < k$)

Dimostriamo che $A \overset{\text{def.}}{=} \{k_i \mid i \in I\}$ è cofinale in k. Da questo segue l'asserto in quanto $|A| \leq |I| = \lambda_1$. Dato $x < k$, se x non fosse un maggiorante di A, avremmo $\forall i \in I \; k_i < x$ ma allora

$$\sup_{i \in I} k_i \leq x < k \quad \text{↯}$$

□

Oss. Sia $(S, <_S)$ totalmente ordinato e $T \subseteq S$ cofinale in S. Indichiamo con $<_T$ la restrizione di $<_S$ a T $\quad <_T \overset{\text{def.}}{=} <_S \cap (T \times T)$

Allora $\mathrm{cof}(S, <_S) = \mathrm{cof}(T, <_T)$.

Dim Dimostriamo che se $A \subseteq T$ è cofinale in $(T, <_T)$, allora A è anche cofinale in S. Mentre se $B \subseteq S$ è cofinale in $(S, <_S)$, allora esiste $B' \subseteq T$ con $|B'| \leq |B|$ cofinale in T.

- Dato $A \subseteq T$ cofinale in T e $x \in S$ dobbiamo trovare un $y \in A$ con $x \leq y$. Siccome T è cofinale in S esiste $t \in T$ con $x \leq t$, e, siccome A è cofinale in T, esiste $y \in A$ con $t \leq y$, per cui $x \leq y$.

- Dato $B \subseteq S$ cofinale, siccome T è cofinale in S, per ogni $b \in B$ possiamo scegliere un $y_b \in T$ con $b < y_b$. Sia $B' = \{y_b \mid b \in B\} \subseteq T$. Siccome la funzione $b \mapsto y_b$ è suriettiva da B a B' abbiamo $|B'| \leq |B|$. Inoltre preso un qualunque $x \in S$ esiste $b \in B$ con $x \leq b$, quindi $x \leq y_b \in B'$. ☐

Oss. Sia k un cardinale infinito, $\mathrm{cof}(k) \leq k$

Dim $k = \sum_{i \in k} 1$

Oss. Sia $(S, <)$ totalmente ordinato, allora

$$\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(S, <)) = \mathrm{cof}(S, <)$$

e, in particolare, per ogni cardinale k, $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(k)) = \mathrm{cof}(k)$.

Dim Sia $k = \mathrm{cof}(S, <)$ e $A \subseteq S$ cofinale con $|A| = k$. Supponiamo, per assurdo, $\mathrm{cof}(k) < k$, quindi esistono $\{k_i\}_{i \in I}$ con $|I| = \mathrm{cof}(k)$ e $\forall i \in I \; k_i < k$ tali che $\sum_{i \in I} k_i = k$. Fissiamo allora una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ di sottoinsiemi di A disgiunti tali che $\forall i \in I \; |A_i| = k_i$ e $\bigcup \{A_i \mid i \in I\} = A$. Per ogni $i \in I$, A_i non è cofinale in S, siccome $|A_i| = k_i < k = \mathrm{cof}(S)$, quindi possiamo scegliere un maggiorante stretto $y_i \in S$ di A_i.

Detto $B = \{a_i \mid i \in S\}$, abbiamo $|B| \leq |I| < k$. D'altro canto, B è cofinale in S, infatti, preso un $x \in S$, siccome A è cofinale, esiste $a \in A$ con $x \leq a$, questo a deve appartenere ad uno degli insiemi A_i, quindi $x \leq a \leq y_i \in B$. Per cui abbiamo trovato un insieme B cofinale in S con $|B| < k = \text{cof}(S)$. ↯

Vedremo ora alcune applicazioni della cofinalità

Corollario (del teorema di König)
Per k cardinale infinito, e λ cardinale ≥ 2.

$$k < k^{\text{cof}(k)} \qquad k < \text{cof}(\lambda^k)$$

Dim Cominciamo dalla prima. Detta $\mu = \text{cof}(k)$, esiste una famiglia $\{k_i\}_{i \in \mu}$ tale che $\forall i \; k_i < k$ e $k = \sum_{i \in \mu} k_i$.
Per König abbiamo

$$k = \sum_{i \in \mu} k_i < \prod_{i \in \mu} k = k^{\mu} = k^{\text{cof}(k)}$$

Passando alla seconda, assumiamo, per assurdo, $\text{cof}(\lambda^k) \leq k$, e applichiamo la prima a λ^k, che è infinito perché $\geq 2^{\aleph_0}$.

$$\lambda^k < (\lambda^k)^{\text{cof}(\lambda^k)} = \lambda^{k \cdot \text{cof}(\lambda^k)} \leq \lambda^{k \cdot k} = \lambda^k$$ ↯

Def La funzione $\beth$ "ghimel" è definita sui cardinali infiniti da

$$\beth(k) = k^{\text{cof}(k)}$$

Con $\qquad k < \beth(k) \qquad \text{cof}(k) < \text{cof}(\beth(k))$

Def. Un cardinale κ è:

- *regolare* se $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$
- *singolare* se $\mathrm{cof}(\kappa) < \kappa$
- *successore* se $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$ per qualche ordinale α
- *limite* se $\kappa = \aleph_\lambda$ con λ ordinale limite
- *limite forte* se $\aleph_0 < \kappa$ e $\forall \alpha \ \aleph_\alpha < \kappa \to 2^{\aleph_\alpha} < \kappa$
- *debolmente inaccessibile* se è regolare e limite
- *(fortemente) inaccessibile* se è regolare e limite forte

Oss. Un cardinale limite forte è anche limite

Dim. Se $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$ allora $\kappa \leq 2^{\aleph_\alpha}$, quindi κ non è limite forte. ∎

Prop. I cardinali successori sono regolari.

Dim. Sia $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$. Supponiamo per assurdo $\lambda = \mathrm{cof}(\kappa) < \kappa$.
Allora esiste $\{\kappa_i\}_{i\in\lambda}$ con $\forall i \in \lambda \ \kappa_i < \kappa$ e $\sum_{i\in\lambda} \kappa_i = \kappa$.
Quindi:

$$\kappa = \sum_{i\in\lambda} \kappa_i \leq \sum_{i\in\lambda} \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot \lambda \leq \aleph_\alpha < \kappa$$ ∎

Cor. Se κ è successore $\beth(\kappa) = 2^\kappa$

Dim. $\beth(\kappa) = \kappa^\kappa = 2^\kappa$ $\quad \left(2^\kappa \leq \kappa^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^\kappa\right)$ ∎

Prop. Se λ è un ordinale limite. $\mathrm{cof}(\aleph_\lambda) = \mathrm{cof}(\lambda)$

Dim. Il sottoinsieme $\{\omega_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \subseteq \omega_\lambda$ è cofinale ed isomorfo, come ordine, a λ. ∎

Per esempio $\mathrm{cof}(\aleph_\omega) = \mathrm{cof}(\omega) = \aleph_0$.

Fatto In generale, un cardinale limite potrebbe essere regolare o singolare. Tuttavia, benché sia facile esibire cardinali limiti singolari, gli assiomi di ZFC non implicano l'esistenza di un cardinale limite e regolare — che si chiama, appunto, debolmente inaccessibile. Insomma, non si può dimostrare che tutti i cardinali limite sono singolari — e non c'è una buona ragione per assumere che lo siano — ma sarebbe coerente con gli assiomi della teoria degli insiemi che tutti i cardinali limite fossero singolari.

Prop (formula di Hausdorff)
Siano κ e λ cardinali infiniti, allora

$$(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$$

Dim Dimostriamo le due disuguaglianze.

($\geq$) Siccome $\kappa^\lambda \cdot \kappa^+ = \max(\kappa^\lambda, \kappa^+)$ basta notare che valgono sia $(\kappa^+)^\lambda \geq \kappa^\lambda$ sia $(\kappa^+)^\lambda \geq \kappa^+$.

($\leq$) Distinguiamo due casi:

- se $\kappa < \lambda$ $\quad (\kappa^+)^\lambda \leq (2^\kappa)^\lambda \leq (\kappa^\lambda)^\lambda = \kappa^\lambda \leq \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$
- se $\kappa \geq \lambda$ Sia $S_\alpha = \{f : \lambda \to \alpha\}$ per cui $|S_\alpha| = |\alpha|^\lambda$ e, in particolare, $(\kappa^+)^\lambda = |S_{\kappa^+}|$. Presa una $f \in S_{\kappa^+}$, osserviamo che $|Im(f)| = \lambda < \kappa^+$ Tuttavia κ^+ è regolare, quindi $Im(f)$ non è cofinale in κ^+, e, di conseguenza, esiste un ordinale $\alpha < \kappa^+$

tale che $\forall x \in \lambda \; f(x) < \alpha$, ossia $f \in S_\alpha$.

Abbiamo dunque dimostrato che $S_{\kappa^+} = \bigcup \{ S_\alpha \mid \alpha < \kappa^+ \}$

Per cui $|S_{\kappa^+}| \leq \sum_{\alpha < \kappa^+} |S_\alpha| \leq \sum_{\alpha < \kappa^+} |\alpha|^\lambda \leq \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$ ∎

Esercizio Dimostrare che $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \beth(\aleph_1) \cdot \beth(\aleph_\omega)$

(* Suggerimento alla pagina successiva)

Fatto La funzione esponenziale κ^λ è determinata ricorsivamente dalle funzioni cof e $\beth$.

Non dimostriamo questo fatto, dimostriamo tuttavia il seguente caso particolare, che basta ad illustrare le tecniche necessarie: la funzione del continuo $\kappa \mapsto 2^\kappa$ è determinata ricorsivamente dalla funzione $\beth$.

Def. Sia κ un cardinale limite. Definiamo

$$2^{<\kappa} \overset{\text{def.}}{=} \sup \{ 2^\lambda \mid \lambda \text{ cardinale } < \kappa \}$$

Lemma Dato κ cardinale limite

$$2^\kappa = \left(2^{<\kappa}\right)^{\text{cof}(\kappa)}$$

Dim. Sia $\lambda = \text{cof}(\kappa)$ e $\{\kappa_i\}_{i \in \lambda}$ tale che $\forall i \in \lambda \; \kappa_i < \kappa$ e $\sum_{i \in \lambda} \kappa_i = \kappa$. Allora

$$2^\kappa = 2^{\sum_{i \in \lambda} \kappa_i} = \prod_{i \in \lambda} 2^{\kappa_i} \leq \prod_{i \in \lambda} 2^{<\kappa} = \left(2^{<\kappa}\right)^\lambda \leq \left(2^\kappa\right)^\lambda = 2^\kappa$$ ∎

Def Sia k un cardinale, diciamo che la funzione $\lambda \mapsto 2^\lambda$ è *definitivamente costante sotto* k se esiste un cardinale $\mu < k$ tale che $\forall \nu$ cardinale $\mu \leq \nu < k \to 2^\nu = 2^\mu$.

Prop. La funzione $k \mapsto 2^k$ è determinata da ∂ come segue:

$$2^k = \begin{cases} \partial(k) & \text{se } k \text{ è successore} \\ & \text{altrimenti:} \\ 2^{<k} \cdot \partial(k) & \text{se } \lambda \mapsto 2^\lambda \text{ è def. costante sotto } k \\ \partial(2^{<k}) & \text{se } \lambda \mapsto 2^\lambda \text{ NON è def. cost. sotto } k \end{cases}$$

Dim Abbiamo già visto il caso successore. Supponiamo che k sia un cardinale limite.

- Caso $\lambda \mapsto 2^\lambda$ definitivamente costante sotto k e k regolare

$$2^{<k} \cdot \partial(k) = 2^{<k} \cdot k^k = 2^{<k} \cdot 2^k = 2^k$$

- Caso $\lambda \mapsto 2^\lambda$ definitivamente costante sotto k e k singolare

  Sia μ tale che $\forall \nu$ cardinale $\mu \leq \nu < k \to 2^\nu = 2^\mu = 2^{<k}$

  allora
$$2^k = \left(2^{<k}\right)^{\mathrm{cof}(k)} = 2^{\mu \cdot \mathrm{cof}(k)} = 2^\mu = 2^{<k}$$

  e si conclude osservando che
$$\partial(k) = k^{\mathrm{cof}(k)} \leq \left(2^k\right)^{\mathrm{cof}(k)} = \left(2^{<k}\right)^{\mathrm{cof}(k)} = 2^{\mu \,\mathrm{cof}(k)} = 2^{<k}$$

---

* Suggerimento per l'esercizio: studiare $\left(\prod_{n \in \omega} \aleph_n\right)^{\aleph_1}$

- Caso $\lambda \mapsto 2^\lambda$ non definitivamente costante sotto κ.

Basta dimostrare che $\mathrm{cof}(2^{<\kappa}) = \mathrm{cof}(\kappa)$, da questo segue

$$2^\kappa = \left(2^{<\kappa}\right)^{\mathrm{cof}(\kappa)} = \left(2^{<\kappa}\right)^{\mathrm{cof}(2^{<\kappa})} > 2^{<\kappa}$$

Dimostriamo che $\mathrm{cof}(2^{<\kappa}) \leq \mathrm{cof}(\kappa)$. Sia $A \subseteq \kappa$ cofinale. Consideriamo $B = \{2^\alpha \mid \alpha \in A\}$. Chiaramente $|B| \leq |A|$.

Mostriamo che B è cofinale in $2^{<\kappa}$. Se $x < 2^{<\kappa}$, allora esiste $\alpha < \kappa$ tale che $x < 2^\alpha$. Siccome A è cofinale in κ, esiste $\beta \in A$ tale che $\alpha \leq \beta$. Quindi $2^\beta \in B$ e $x < 2^\beta$.

Dimostriamo, ora, la disuguaglianza opposta: $\mathrm{cof}(\kappa) \leq \mathrm{cof}(2^{<\kappa})$. Per definizione, dato $\alpha < 2^{<\kappa}$, esiste $\beta < \kappa$ tale che $\alpha < 2^\beta$. Chiamiamo β_α il minimo di questi β. Sia, ora, $A \subseteq 2^{<\kappa}$ un insieme cofinale e definiamo $B = \{\beta_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Come al caso precedente $|B| \leq |A|$: dimostriamo che B è cofinale in κ. Preso $x \in \kappa$, $2^x \leq 2^{<\kappa}$. Però, siccome $\lambda \mapsto 2^\lambda$ non è definitivamente costante sotto κ, esiste y con $x < y < \kappa$ tale che $2^x < 2^y$, quindi $2^x < 2^{<\kappa}$. Sia $\alpha \in A$ con $2^x \leq \alpha$, che esiste perché A è cofinale. Allora $2^x \leq \alpha < 2^{\beta_\alpha}$. Quindi $x < \beta_\alpha$.

∎