La gerarchia di Von Neumann & l'assioma di buona fondazione

Insiemi come questi sono (forse?) nostri indesiderabili

$\{\{\{\{\{\dots\}\}\}\}\}$ $\quad x = \{x\}$ $\quad y = \{z\}$ $\quad z = \{y\}$



Desideriamo dimostrare, intanto, che, a patto che gli assiomi della teoria degli insiemi non si contraddicano — nel qual caso dimostrerebbero qualunque cosa — essi NON dimostrano la esistenza di insiemi del genere.

Strategia: costruiamo un universo insiemistico V_*, che è una classe propria, al cui interno gli assiomi sono veri, e che, tuttavia, non contiene quella robaccia.

Def Costruiamo per ricorsione transfinita

$$V_0 = \emptyset$$
$$V_{s(\alpha)} = \mathcal{P}(V_\alpha)$$
$$V_\lambda = \bigcup \{V_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \quad \text{per } \lambda \text{ limite}$$

La classe V_* è l'unione degli insiemi V_α, formalmente:

$$x \in V_* \overset{\text{def.}}{\equiv} \exists \alpha \in Ord \; x \in V_\alpha$$

Lemma $\forall \alpha \in Ord \; V_\alpha$ è transitivo

Dim Per induzione transfinita.

- Caso V_0: immediato poiché $\emptyset$ è transitivo a vuoto.

- Caso successore:

$$x \in V_{s(\alpha)} = \mathcal{P}(V_\alpha) \Rightarrow x \subseteq V_\alpha \Rightarrow \forall y \in x \; y \subseteq V_\alpha \Rightarrow \forall y \in x \; y \in V_{s(\alpha)}$$

($\Rightarrow$: poiché V_α è transitivo per ipotesi induttiva)

- Caso limite: $x \in V_\lambda \Leftrightarrow x \in V_\alpha$ per qualche $\alpha < \lambda \Rightarrow x \subseteq V_\alpha \subseteq V_\lambda$ ∎

Con V_* è una classe transitiva, ossia $\forall x \in V_* \; x \subseteq V_*$

Lemma $\forall \alpha, \beta \in Ord \quad \alpha \leq \beta \to V_\alpha \subseteq V_\beta$

Dim Dimostriamo per induzione transfinita su β che

$$\forall \alpha < \beta \quad V_\alpha \subseteq V_\beta$$

- Caso $\beta = 0$: vero a vuoto

- Caso successore: dobbiamo dimostrare $\forall \alpha < \beta + 1 \quad V_\alpha \subseteq V_{s(\beta)}$.
Siccome $\alpha < s(\beta) \hookrightarrow \alpha \leq \beta$, applicando l'ipotesi induttiva, abbiamo $V_\alpha \subseteq V_\beta$ — questa conclusione è, infatti, immediata se $\alpha = \beta$.
Per definizione, quindi: $V_\alpha \in V_{s(\beta)} = \mathcal{P}(V_\beta)$. Infine, per la transitività di $V_{s(\beta)}$, $V_\alpha \in V_{s(\beta)}$.

- Caso limite: $\alpha < \lambda \Rightarrow V_\alpha \subseteq \bigcup \{ V_\alpha \mid \alpha < \lambda \} = V_\lambda$ ∎

Lemma $\forall \alpha \in Ord \quad \alpha \subseteq V_\alpha$.

Dim Per induzione transfinita.

- Caso base: $\emptyset \subseteq V_0 = \emptyset$

- Caso successore:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \subseteq V_\alpha \Rightarrow \alpha \in V_{s(\alpha)} \\ \alpha \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{s(\alpha)} \Rightarrow \{\alpha\} \in V_{s(\alpha)} \end{array}\right\} \Rightarrow s(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq V_{s(\alpha)}$$

- Caso limite: $\lambda = \bigcup\{\alpha \mid \alpha < \lambda\} \subseteq \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha < \lambda\} = V_\lambda$ ∎

Def. Data una formula insiemistica, la possiamo *relativizzare* a V_* rimpiazzando tutti i quantificatori $\exists \square$ con $\exists \square \in V_*$ e tutti i $\forall \square$ con $\forall \square \in V^*$

Esempio Supponiamo di voler relativizzare a V^* la formula

$$\varphi \equiv \exists x \, \forall y \in x \, \exists z \in y \; z \cap x = \emptyset$$

Dobbiamo intanto ridurla al linguaggio della teoria degli insiemi puro, ossia rimuovere tutte le abbreviazioni

$$\exists x \, \forall y \in x \, \exists z \in x \; z \cap x = \emptyset$$

$$\exists x \, \forall y \, (y \in x \to \exists z \, (z \in y \wedge \neg \exists t \; t \in z \cap x))$$

$$\exists x \, \forall y \, (y \in x \to \exists z \, (z \in y \wedge \neg \exists t \; t \in z \cap x))$$

$$\exists x \, \forall y \, (y \in x \to \exists z \, (z \in y \wedge \neg \exists t \, (t \in x \wedge t \in y)))$$

A questo punto rimpiazziamo meccanicamente tutti i quantificatori con quantificatori limitati a V^*

$$\exists x \, \forall y \, (y \in x \to \exists z \, (z \in y \wedge \neg \exists t \, (t \in x \wedge t \in y)))$$

$$\exists x \in V^* \, \forall y \in V^* \, (y \in x \to \exists z \in V^* \, (z \in y \wedge \neg \exists t \in V^* \, (t \in x \wedge t \in y)))$$

Questa nuova formula, φ relativizzata a V^*, come è scritta qua sopra, non è espressa nel linguaggio della teoria degli insiemi puro,

per via dei quantificatori limitati $\forall \square \in V^*$ e $\exists \square \in V^*$, tuttavia, se volessimo, potremmo semplicemente rimpiazzare questi quantificatori con le loro rispettive definizioni.

Teo Valgono gli assiomi della teoria degli insiemi relativizzati a V_*.

Dim

(1) Vuoto: $\exists x \in V_* \ \forall y \in V_* \ y \notin x$

Basta prendere $x = \emptyset \in V_1$

(2) Estensionalità $\forall a, b \in V_* \ a = b \leftrightarrow \forall x \in V_* \ (x \in a \leftrightarrow x \in b)$

Per la transitività dei V_α, dati $a, b \in V_*$, gli elementi di a e b sono anch'essi in V_*, quindi dire $\forall x \in V_* \ (x \in a \leftrightarrow x \in b)$ equivale a dire $\forall x \ (x \in a \leftrightarrow x \in b)$. Si conclude quindi per l'assioma di estensionalità.

(3) Separazione $\forall A \in V_* \ \exists B \in V_* \ \forall x \in V_* \ x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge p(x))$

Per separazione esiste $B = \{x \in A \mid x \in V_* \wedge \varphi(x)\}$. Siccome $B \subseteq A \in V_\alpha$ per qualche α, $B \subseteq V_\alpha$ per transitività, quindi $B \in V_{S(\alpha)}$, quindi $B \in V_*$.

(4) Paio: $\forall a, b \in V_* \ \exists B \in V_* \ \forall x \in V_* \ x \in B \leftrightarrow (x = a \vee x = b)$

Se $a \in V_\alpha$ e $b \in V_\beta$ e, senza perdita di generalità, $\alpha \leq \beta$,

allora $a, b \in V_n$, quindi $\{a, b\} \in \mathcal{P}(V_n) = V_{S(n)}$.

(5) Unione: $\forall A \in V_* \; \exists B \in V_* \; \forall x \in V_* \; x \in B \leftrightarrow \exists y \in A \; x \in y$

Se $A \in V_\alpha$, per la transitività di V_α, $A \subseteq V_\alpha$, e, di nuovo per transitività, $\bigcup A \subseteq V_\alpha$. Quindi $\bigcup A \in V_{S(\alpha)}$.

(6) Parti: $\forall A \in V_* \; \exists B \in V_* \; \forall x \in V_* \; x \in B \leftrightarrow x \subseteq A$

Se $A \in V_\alpha$, $A \subseteq V_\alpha$ per la transitività di V_α, quindi $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{S(\alpha)}$, quindi $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(V_{S(\alpha)}) = V_{\alpha+2}$.

(7) Infinito: $\exists X \in V_* \; \emptyset \in X \wedge \forall y \in V_* \; y \in X \to y \cup \{y\} \in X$

Basta prendere $X = \omega \in V_{S(\omega)}$.

(8) Rimpiazzamento: $F : V_* \to V_*$ funzione classe e $X \in V_* \to F[X] \in V_*$

Se $X \in V_\alpha$, per transitività, $a \in X \to a \in V_\alpha$. Quindi $F(a)$ è ben definito e $\in V_*$ per $a \in X$. Sia α_a minimo con $F(a) \in V_{\alpha_a}$. Sia $\beta = \sup \{\alpha_a \mid a \in X\}$. Allora $F[A] \subseteq V_\beta$, e $F[A] \in V_{S(\beta)}$.

(9) Scelta. $\forall X \in V_* \; (\forall y \in X \; y \neq \emptyset) \to \exists f \in V_* \; f$ è di scelta su X.

Sia f una funzione di scelta su $X \in V_\alpha$, dimostriamo che $f \in V_*$. Osserviamo che $f \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(V_\alpha)) = V_{\alpha+2}$. Quindi $f \in V_{\alpha+3}$.

Oss. Dato $x \in V_*$ esiste il minimo α tale che $x \in V_\alpha$, e questo è necessariamente un ordinale successore, perché se $x \in V_\lambda = \bigcup \{V_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ allora $x \in V_\alpha$ per qualche $\alpha < \lambda$. Possiamo quindi dare la definizione seguente

Def. Dato $x \in V_*$, detto α il minimo ordinale per cui $x \in V_\alpha$, il rango di x, $\mathrm{rank}(x)$, è definito da $\alpha = \mathrm{rank}(x) + 1$.
Ossia:

$$x \in V_\alpha \iff \mathrm{rank}(x) < \alpha$$

Lemma Se $x \in y \in V_*$ allora $\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$.

Dim $y \in V_{s(\mathrm{rank}(y))} = \mathcal{P}(V_{\mathrm{rank}(y)})$, quindi $y \subseteq V_{\mathrm{rank}(y)}$, di conseguenza $x \in V_{\mathrm{rank}(y)}$, per cui $\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$. ∎

Def. Diciamo che una classe C è ben fondata se per ogni insieme S di elementi di C, S contiene un x minimale per appartenenza ($\in$-minimale), ossia tale che $x \cap S = \emptyset$.
"epsilon-minimale"

Prop. La classe C è ben fondata se e solo se NON esiste una famiglia $\{x_i\}_{i \in \omega}$ di elementi di C tale che

$$\forall i \in \omega \; x_{i+1} \in x_i$$

Ossia non esiste una catena infinita discendente per appartenenza

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$$

Dim Se $\{x_i\}_{i \in \omega}$ è una catena infinita discendente, allora $\{x_i \mid i \in \omega\}$ non ha un elemento $\in$-minimale.

D'altro canto, se S non ha un elemento $\in$-minimale, fissata una funzione di scelta f su S, possiamo definire una catena discendente per ricorsione numerabile. Fissiamo $\bar{x} \in S$

$$x_0 = \bar{x} \qquad x_{n+1} = f(\{y \in S \mid y \in x_n\})$$

dove l'insieme a cui è applicata f non è vuoto, altrimenti x_n sarebbe $\in$-minimale ∎

Una classe transitiva ben fondata non può, quindi, contenere mostri.

Prop La classe V_α è ben fondata

Dim Dato un insieme S di elementi di V_α, consideriamo $x \in S$ di rango minimo. Se esistesse $y \in S$ con $y \in x$ allora avremmo $\mathrm{rank}(y) < \mathrm{rank}(x)$ ↯ ∎

Teo Se gli assiomi della teoria degli insiemi sono coerenti, essi non dimostrano l'esistenza di una catena infinita discendente per appartenenza.

Dim Supponiamo di poter dimostrare che questa catena esiste. Allora, siccome gli assiomi valgono relativizzati a V_α, potremmo svolgere l'intera dimostrazione relativizzata, ed otterremmo che esiste una catena infinita discendente in V_α. D'altro canto abbiamo dimostrato che questa non può esistere. Avremmo quindi la dimostrazione di un assurdo. ∎

A questo punto siamo giustificati, se lo desideriamo, ad assumere che i mostri non esistano. Potremmo, per esempio, fare la cosa codarda ed assumere che la classe di tutti gli insiemi V coincida con V_*

$$V = V_*$$

I codardi, però, non fanno mai le cose troppo apertamente, quindi assumiamo quest'altro enunciato equivalente

(10) Assioma (buona fondazione)
"La classe di tutti gli insiemi è ben fondata."
$\forall S \neq \emptyset \; \exists x \in S \; x \cap S = \emptyset$

Per dimostrare $V = V_*$ usando la buona fondazione, è comodo fare leva sul *principio di $\in$-induzione* "epsilon-induzione"

Teo (principio di $\in$-induzione) Se una classe C soddisfa

$$\forall S \; (\forall x \in S \; x \in C) \to S \in C$$

Allora $C = V$, ossia $\forall S \; S \in C$.

La dimostrazione di questo enunciato richiede (10). Prima, però, enunciamo una proposizione che non la richiede.

Prop (esistenza della chiusura transitiva)
Dato un insieme X esiste il più piccolo insieme transitivo $tc(X)$ tale che $X \subseteq tc(X)$.

Dim Costruiamo per ricorsione la successione $\{X_n\}_{n\in\omega}$

$$X_0 = X \qquad X_{n+1} = \bigcup X_n$$

Si verifica immediatamente che

$$tc(X) = \bigcup \{X_n \mid n\in\omega\}$$ ☐

Dim (principio di $\in$-induzione)

Prendiamo, per assurdo, $S \notin C$. Sia

$$S' = \{x \in tc(\{S\}) \mid x \notin C\}$$

Siccome $S \in S'$, S' non è vuoto, quindi, per buona fondazione, esiste $x \in S'$ tale che $\forall y \in x \; y \notin S'$. Siccome $x \in tc(\{S\})$, e quest'ultimo è transitivo, $\forall y \in x \; y \in tc(\{S\})$. E' quindi necessario che $\forall y \in x \; y \in C$. Ma allora $x \in C$ e $x \notin S'$ ↯ ☐

Prop $V = V_*$ —— Ossia $\forall x \; \exists \alpha \in Ord \; x \in V_\alpha$.

Dim Per $\in$-induzione, ci basta dire che, fissato un S, se $\forall x \in S \; x \in V_*$, allora $S \in V_*$. Consideriamo

$$\alpha = \sup \{rank(x)+1 \mid x \in S\}$$

Per ogni $x \in S$ abbiamo $x \in V_{rank(x)+1} \subseteq V_\alpha$, quindi $S \subseteq V_\alpha$.

Di conseguenza $S \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$. ☐

Cor Non esistono catene infinite discendenti per appartenenza.

I nostri sono stati sconfitti.

Fine della storia.

Esercizi

- Definiamo $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$, $\beth_\lambda = \sup\{\beth_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ con λ limite. Dimostrare che $\forall \alpha \in Ord \; |V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$
- Dimostrare che $rank(x) = \sup\{rank(y)+1 \mid y \in x\}$
- Dimostrare che V_ω soddisfa tutti gli assiomi <u>eccetto</u> l'assioma dell'infinito
- Dimostrare che $V_{\omega+\omega}$ soddisfa tutti gli assiomi <u>eccetto</u> l'assioma del rimpiazzamento
- Dimostrare che l'esistenza dell'ordinale $\omega+\omega$ non segue dagli assiomi della teoria degli insiemi <u>escluso</u> il rimpiazzamento, a patto che questi non si contraddicano.
- Dimostrare che, se κ è inaccessibile, allora tutti gli assiomi della teoria degli insiemi valgono in V_κ.
- Dimostrare che, se la teoria degli insiemi è coerente, allora non dimostra l'esistenza di un cardinale inaccessibile.