Matematica ed elementi di statistica

Marcello Mamino

Corso di laurea in Chimica e Tecnologia Farmaceutiche
Università di Pisa

v. 1.0.2
18·xi·2026

Indice

I Matematica elementare **7**

1 I numeri **8**
1.1 Intermezzo: il simbolo = . . . 8
1.2 Il gioco, continuato . . . 9
1.3 Insiemi di numeri di uso comune . . . 10

2 Richiamo di algebra elementare **11**
2.1 Esercizi . . . 17

3 Proporzioni & percentuali **19**
3.1 Denominatori convenzionali: le percentuali . . . 19
3.2 Aumenti e diminuzioni . . . 19
3.3 Percentuali facili da ricordare . . . 21
3.4 Esercizi con due partizioni . . . 21
3.5 Esercizi . . . 23

4 Modi di scrivere i numeri reali **24**
4.1 Notazioni algebriche . . . 24
4.2 Notazione decimale . . . 24
4.3 Notazione scientifica . . . 25
4.4 Notazione ingegneristica . . . 25
4.5 Operazioni in notazione scientifica . . . 26
4.5.1 Somme e differenze . . . 26
4.5.2 Prodotti e quozienti . . . 27
4.5.3 Radici quadrate . . . 27
4.6 Esercizi . . . 27

5 Come non sbagliare nei calcoli **28**
5.1 Consigli utili . . . 28
5.2 Esercizi . . . 29

6 Unità di misura **33**
6.1 Prefissi moltiplicatori . . . 33
6.2 Equivalenze . . . 34
6.3 Operazioni fra grandezze fisiche . . . 35
6.4 Ragionare con le unità di misura . . . 36
6.5 Esercizi . . . 37

7 Cifre significative **38**
7.1 Quali cifre sono significative . . . 40
7.2 Arrotondamenti . . . 41
7.3 Esercizi . . . 43

8 Trovare rapporti di numeri interi **44**
8.1 Livello 1: denominatori piccoli . . . 44
8.2 Livello 2: reciproci . . . 45
8.3 Livello 3: la combinazione vincente . . . 45
8.4 Livello ninja: il metodo delle frazioni continue (fuori programma) . . . 46
8.5 Esercizi . . . 47

9 La teoria degli errori **49**
9.1 La propagazione degli errori . . . 50
9.2 Giustificazione della regola di arrotondamento . . . 52
9.3 Propagazione: primi esercizi . . . 53
9.4 Somme algebriche . . . 54
9.5 L'errore relativo . . . 54
9.6 Riassunto delle regole . . . 56
9.7 Problema inverso . . . 57
9.8 Determinazione delle incertezze in un esperimento . . . 58
9.9 Esercizi . . . 59

10 Funzioni & grafici **62**
10.1 Rappresentazioni di funzioni . . . 63
10.2 Grafici . . . 64
10.3 Come si disegna un grafico in pratica? . . . 66
10.4 Come NON tracciare un grafico . . . 67
10.5 Un esercizio . . . 67
10.6 Tabelle & interpolazione lineare . . . 69
10.7 Esercizi . . . 71

11 Funzioni esponenziali **73**
11.1 Grafico dell'esponenziale . . . 73
11.2 Alcuni valori della funzione 10^x . . . 74
11.3 Intermezzo: il numero e . . . 75
11.4 Esercizi . . . 76

12 Logaritmi **78**
12.1 Proprietà dei logaritmi . . . 78
12.2 Formula del cambiamento di base dei logaritmi . . . 79
12.3 Crescite & decadimenti esponenziali . . . 80
12.4 Esercizi . . . 82

13 Scale logaritmiche **84**
13.1 Osservazioni sull'esercizio . . . 85
13.2 A cosa servono le scale logaritmiche? . . . 87
13.3 Grafici semi-logaritmici (o lin-log) . . . 88
13.4 Da grafico semi-logaritmico a espressione . . . 89
13.5 Grafici logaritmici (o log-log) . . . 91
13.6 Dal grafico logaritmico all'espressione . . . 91
13.7 Esercizi . . . 92

14 Altri grafici usati in pratica **94**

15 Soluzione grafica & numerica di equazioni **95**
15.1 Calcolo numerico delle soluzioni 95
15.2 Esercizi 98

II Elementi di statistica **101**

16 Introduzione alla statistica **102**
16.1 Probabilità 102
16.2 Popolazione, individui, campione 103
16.3 Tipi di variabili statistiche 104
16.4 Frequenze e tabelle 105
16.5 Tabelle di contingenza 106
16.6 Studi clinici randomizzati 107
16.7 Variabili confondenti 108
16.8 Studi osservazionali 110
16.9 Il paradosso di Simpson 111

17 Statistica descrittiva per variabili numeriche **113**
17.1 Media, varianza e deviazione standard 113
17.2 Mediana e quantili 115
17.3 Quartili, decili, percentili 116
17.4 Istogrammi 118
17.5 Diagrammi a scatola 122
17.6 Esercizi 124

18 La distribuzione gaussiana **126**
18.1 La gaussiana standard 128
18.2 Esercizi 133

19 Stima della media di una variabile statistica **135**
19.1 Metodo per campioni grandi 135
19.2 Metodo più generale 137
19.3 Misure ripetute 140
19.4 Stima di proporzioni 141
19.5 Esercizi 142

20 Regressione lineare **145**
20.1 Formule e calcoli 148
20.2 Regressione lineare e outlier 151
20.3 Il p-value 152
20.4 Esercizi 154

21 Test di significatività **156**
21.1 Un esempio: il pronetalolo 156
21.2 Ricapitolando 158

21.3 Test t di Student . . . 159
21.4 Test t per il confronto di variabili appaiate . . . 162
21.5 Test t per il confronto di campioni indipendenti . . . 162
21.6 Test χ^2 . . . 163
21.7 Test χ^2 di indipendenza . . . 165
21.8 La correzione di Bonferroni . . . 167
21.9 Riepilogo . . . 168
21.10Esercizi . . . 168

III Elementi di analisi matematica 172

22 Introduzione 173

23 La derivata 174
23.1 Derivate delle funzioni elementari . . . 175
23.2 Regole di derivazione . . . 175
23.3 Notazioni per le derivate . . . 178
23.4 Esercizi . . . 179

24 Grafici e derivate 180
24.1 Massimi e minimi di funzioni . . . 183
24.2 Massimi e minimi in un intervallo chiuso . . . 184
24.3 Massimi e minimi in generale . . . 185
24.4 Esercizi . . . 187

25 Equazioni differenziali 190

26 Integrali indefiniti 192
26.1 Integrali delle funzioni elementari . . . 193
26.2 Regole di integrazione . . . 193
26.3 La regola di sostituzione . . . 194
26.4 Un caso particolare che conviene ricordare . . . 195
26.5 Esercizi . . . 196

27 Bestiario minimo di equazioni differenziali 198
27.1 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo ordine . 198
27.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del secondo ordine 200
27.3 Equazioni differenziali a variabili separabili . . . 203
27.4 Un'applicazione: la cinetica chimica . . . 204
27.5 Esercizi . . . 208

28 Integrali definiti & aree 209
28.1 Calcolo numerico di integrali . . . 211
28.2 Esercizi . . . 214

IV Appendici **215**

A Uso della calcolatrice scientifica **216**
A.1 Configurazione in generale . . . 216
A.2 Caveat . . . 216
A.3 Ripristino delle impostazioni di fabbrica . . . 217
A.4 Fuga dalla modalità baby . . . 217
A.5 Configurazione delle funzioni trigonometriche . . . 218
A.6 Uso efficace della calcolatrice . . . 218
A.7 Uso di Ans . . . 219
A.8 Uso dei registri di memoria . . . 220
A.9 Uso della cronologia dei calcoli . . . 221
A.10 Caveat: numeri negativi, moltiplicazione implicita, tabelle di valori . . . 222
A.11 Funzioni avanzate . . . 223
A.12 Riepilogo . . . 223

B Come tracciare un grafico **224**
B.1 Due grafici accettabili . . . 225
B.2 Alcuni elaborati insufficienti . . . 226
B.3 Come si traccia un buon grafico . . . 228
B.3.1 Predisporre gli assi . . . 228
B.3.2 Riportare alcuni valori di f . . . 229
B.3.3 I punti stazionari . . . 234
B.3.4 Un procedimento creativo . . . 235

C Tavole statistiche **238**
C.1 La gaussiana standard . . . 238
C.2 La t di Student . . . 239
C.3 Il χ^2 . . . 240

V Soluzioni **241**

Parte I
Matematica elementare

§1 I numeri

Cominciamo con un gioco.

Regole del gioco
x è un numero se:

- ha senso confrontare x con altri numeri;
- ha senso dire "x metri" e "x grammi";
- x è una quantità limitata e definita esattamente.

Proviamo subito con tre scritture:

$$27 \quad \text{sì} \qquad \text{XXVII} \quad \text{sì} \qquad 27.00 \cdot 10^0 \quad \text{sì}$$

e sono *lo stesso numero*:

$$27 = \text{XXVII} = 27.00 \cdot 10^0$$

§1.1 Intermezzo: il simbolo =

Notazione
♣ = ♡ equivale a "♣ e ♡ sono la stessa cosa".

Esempio (Uguaglianze numeriche)

$$7 = 7 \qquad 7 + 2 = 9 \qquad 9 = 7 + 2 \qquad 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

Si osservi il secondo e il terzo esempio: l'uguale non ha una "direzione".

Esempio (Uguaglianze algebriche)
Quando scriviamo

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

intendiamo dire: "qualunque sia il valore numerico di x, il risultato dell'operazione $(x+1)^2$ e quello dell'operazione $x^2 + 2x + 1$ coincidono".

Esempio (Equazioni)
"Risolvi l'equazione $x^2 - x = 2$!" significa: "È un dato di fatto che il risultato di $x^2 - x$ e 2 sono la stessa cosa. Sapendo questo, fai il lavoro del detective, e scova x!"

In questo caso l'equazione ha due soluzioni, -1 e 2, infatti

$$\underset{-1 \text{ al posto di } x}{(-1)^2 - (-1) = 2} \qquad \underset{2 \text{ al posto di } x}{2^2 - 2 = 2}$$

mentre qualunque altro numero, messo al posto di x, produrrebbe un risultato diverso da 2. Quindi, dire "le soluzioni sono -1 e 2" significa dire "i sospetti che corrispondono all'identikit $x^2 - x = 2$ sono -1 e 2".

Se, per esempio, x rappresenta una grandezza fisica, la sola equazione $x^2 - x = 2$ non ci permette di capire esattamente quale sia questa grandezza. Ci permette di dire, però, che o è 2 o è -1, ed escludere ogni altro caso.

§1.2 Il gioco, continuato

Torniamo al gioco.

- $\sqrt{7}$ SÌ
- $1 \pm \sqrt{2}$ NO è $\{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$, un insieme di due numeri. Nota: gli insiemi sono disordinati, ossia $\{a, b, c, d\} = \{b, d, a, c\} = \{c, b, d, a\} = \&c$.
- 050 2212175 NO (è il telefono del rettorato dell'università). Un numero di telefono è una sequenza di cifre, e non rappresenta una quantità (terza regola del gioco). Per esempio aggiungere o togliere zeri all'inizio invaliderebbe un numero di telefono, mentre $050\,2212175 = 50\,2212175$ se li leggessimo come numeri.
- $7 + 15 = 22$ NO è l'affermazione "$7 + 15$ fa 22".
- 2.54 cm NO è una lunghezza, la combinazione del numero 2.54 e dell'unità di misura cm. Per esempio, la medesima lunghezza può essere espressa da altre combinazioni: $2.54\,\text{cm} = 1\,\text{in}$. "inch", ossia "pollice".
- ∞ NO ("infinito") non è una quantità limitata.
- x tale che $x + 2 = -x$ SÌ è il numero -1. Infatti $2x = -2$, quindi $x = -1$.
- x tale che $x^2 = 2$ NO potrebbe essere $\sqrt{2}$ o $-\sqrt{2}$.
- x tale che $\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{x-2}$ NO non c'è nessun valore di x che va bene. Infatti, se ci fosse, potremmo eseguire i passaggi seguenti e raggiungere una conclusione falsa:

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x-2} \xrightarrow{\text{inverto ambo i membri}} x + 2 = x - 2$$
$$\xrightarrow{\text{sottraggo } x \text{ ad ambo i membri}} 2 = -2 \quad \text{FALSO}$$

§1.3 Insiemi di numeri di uso comune

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$	numeri "naturali" o "interi non-negativi"
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	numeri interi (ted. *Zahlen*, numeri)
$\mathbb{Q} = \left\{\ldots, -\frac{10}{3}, -2, -\frac{1}{7}, 0, \frac{1}{2}, \frac{7}{5}, 54, \ldots\right\}$	numeri razionali
$\mathbb{R} = \left\{\ldots, -\frac{10}{3}, -\sqrt{2}, -1, 0, \pi, \pi^\pi, \ldots\right\}$	numeri reali

Notazione
Il simbolo $\in$ si legge "appartiene" e denota il fatto che l'oggetto a sinistra è un membro dell'insieme a destra.

Per esempio:

$$\begin{array}{cccc} \sqrt{2} \in \mathbb{R} & \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} & \sqrt{2} \notin \mathbb{Z} & \sqrt{2} \notin \mathbb{N} \\ -2 \in \mathbb{R} & -2 \in \mathbb{Q} & -2 \in \mathbb{Z} & -2 \notin \mathbb{N} \end{array}$$

Notazione
Il simbolo $\subseteq$ si legge "è sottoinsieme di" e denota il fatto che tutti i membri dell'insieme a sinistra sono altresì membri dell'insieme a destra.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

§2 Richiamo di algebra elementare

Esercizio
Risolvi l'equazione

$$(x+1)^4 = (x^2+1)^2 + 4(x-1)^3 + 12x$$

Soluzione. Dobbiamo, intanto, semplificare l'equazione. Il metodo meno sofisticato è, chiaramente, sviluppare le potenze:

$$\begin{aligned}(x+1)^4 &= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1\\ (x^2+1)^2 &= x^4 + 2x^2 + 1\\ (x-1)^3 &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1\end{aligned}$$

Non è necessario ricordare a memoria queste formule, perché, all'occorrenza, si possono ricavare iterando calcoli più semplici. Per esempio:

$$\begin{aligned}(x+1)^4 &= \left((x+1)^2\right)^2 = (x^2+2x+1)^2 = (x^2+2x+1)\cdot(x^2+2x+1)\\ &= (x^2+2x+1)\cdot x^2 + (x^2+2x+1)\cdot 2x + (x^2+2x+1)\\ &= x^4 + 2x^3 + x^2 \quad + 2x^3 + 4x^2 + 2x \quad + x^2 + 2x + 1\\ &= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1\end{aligned}$$

Tornando, però, all'esercizio originale, proviamo a svolgere i calcoli in una maniera diversa. Sfruttiamo la formula

$$\square^2 - \triangle^2 = (\square + \triangle)(\square - \triangle)$$

Portando $(x^2+1)^2$ a sinistra e riconoscendo $(x+1)^4 = (x^2+2x+1)^2$:

$$\begin{aligned}(x+1)^4 &= (x^2+1)^2 + 4(x-1)^3 + 12x\\ (x^2+2x+1)^2 - (x^2+1)^2 &= 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 12x\\ (2x^2+2x+2)\cdot 2x &= 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 + 12x\\ 4x^3 + 4x^2 + 4x &= 4x^3 - 12x^2 + 24x - 4\end{aligned}$$

A sinistra $\square + \triangle = 2x^2 + 2x + 2$ e $\square - \triangle = 2x$. Cancellando $4x^3$ da ambo i membri e dividendo per 4:

$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$

Abbiamo quindi le soluzioni $\dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{8}$, ossia

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = \tfrac{1}{4}$$

□

Nota importante
A questo punto è fondamentale controllare la correttezza della soluzione. Un risultato sbagliato non vale niente, anzi, reca un danno se costituisce la base di calcoli successivi. Questa verifica non deve essere fatta per esteso: apparirebbe goffa e ridondante. Tuttavia, non farla significa esporsi al rischio di vedere il proprio lavoro distrutto da un errore di calcolo, ed è un rischio stupido.

A scopo didattico, facciamo una verifica per iscritto. Nella pratica, poi, uno fa questi calcoli mentalmente o in brutta copia. Abbiamo trovato le soluzioni 1 e $\frac{1}{4}$. Ci acconteremo di controllare il valore 1, ragionando che difficilmente un errore di calcolo può sovvertire una soluzione sola.

$$\begin{aligned}(x+1)^4 &= (x^2+1)^2 + 4(x-1)^3 + 12x \\ \underbrace{(1+1)^4}_{16} &= \underbrace{(1^2+1)^2}_{4} + \underbrace{4(1-1)^3}_{0} + \underbrace{12\cdot 1}_{12} \qquad \text{OK}\end{aligned}$$

Esercizio
Semplifica l'espressione

$$(a+b-c)\cdot(a-b+c)+(b+c)^2$$

Soluzione. Anche qui possiamo sviluppare i prodotti:

$$\begin{aligned}(a+b-c)\cdot(a-b+c) &= a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ac} + \cancel{ab} - b^2 + bc - \cancel{ac} + bc - c^2 \\ &= a^2 - b^2 - c^2 + 2bc \\ (b+c)^2 &= b^2 + c^2 + 2bc\end{aligned}$$

e sommando

$$(a+b-c)\cdot(a-b+c)+(b+c)^2 = a^2 - \cancel{b^2} - \cancel{c^2} + 2bc + \cancel{b^2} + \cancel{c^2} + 2bc = a^2 + 4bc$$

Oppure possiamo cercare di essere creativi usando la formula $\square^2 - \triangle^2 = (\square+\triangle)(\square-\triangle)$:

$$\begin{aligned}(a+b-c)\cdot(a-b+c)+(b+c)^2 &= \\ \big(a+(b-c)\big)\cdot\big(a-(b-c)\big)+(b+c)^2 &= \\ a^2-(b-c)^2+(b+c)^2 &= \\ a^2 + \underbrace{\big((b+c)+(b-c)\big)}_{2b}\cdot\underbrace{\big((b+c)-(b-c)\big)}_{2c} &= a^2+4bc\end{aligned}$$

□

Nota importante
Comunque si proceda, in questo calcolo è facile sbagliare, ottenendo, per errore, $a^2 + 2bc$, o $+5bc$, &c. Anche qui, in brutta copia, dobbiamo fare una verifica. Basterà sostituire alcuni valori numerici alle variabili. Per esempio:

$a = b = c = 1$ $\quad (1+1-1)\cdot(1-1+1)+(1+1)^2 = 1+4\cdot 1\cdot 1$ OK
$a = b = 1,\ c = 0$ $\quad (1+1-0)\cdot(1-1+0)+(1+0)^2 = 1+4\cdot 1\cdot 0$ OK

Esercizio
Semplifica

$$\frac{x^3+10x^2+21x}{x^2-3x-18}$$

Soluzione. Notiamo, intanto, che è possibile trarre a fattor comune una x dal numeratore, ottenendo

$$\frac{x^3+10x^2+21x}{x^2-3x-18} = \frac{x(x^2+10x+21)}{x^2-3x-18}$$

Ora, per investigare la possibilità di semplificare la frazione, occorre fattorizzare i polinomi di secondo grado $x^2+10x+21$ e $x^2-3x-18$. C'è più di un approccio che possiamo seguire.

Fatto
Consideriamo il polinomio ax^2+bx+c. Sia $\Delta = b^2-4ac$ il discriminante dell'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$. Allora sono possibili tre casi:

- se $\Delta < 0$, allora ax^2+bx+c non si fattorizza;
- se $\Delta = 0$, allora l'equazione $ax^2+bx+c=0$ ha una sola soluzione e, detta x_0 questa soluzione,
$$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$$
- se $\Delta > 0$, l'equazione ha due soluzioni x_1, x_2 e
$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Applicando questo fatto a $x^2+10x+21$, otteniamo $\Delta = 16$, quindi $x_{1,2} = -5 \pm 2$, e $x^2+10x+21 = (x+7)(x+3)$.

Procedendo allo stesso modo per il denominatore:

$$\frac{x(x^2+10x+21)}{x^2-3x-18} = \frac{x(x+7)\cancel{(x+3)}}{(x-6)\cancel{(x+3)}} = \frac{x(x+7)}{x-6}$$

□

Osservazione
L'esercizio è concluso, ma notiamo che l'ultima uguaglianza non è tecnicamente corretta, perché, per $x = -3$, l'espressione a sinistra si riduce a $\frac{0}{0}$ che non ha senso, mentre a destra abbiamo $\frac{-12}{-9}$. Nell'uguaglianza

$$\frac{x(x+7)(x+3)}{(x-6)(x+3)} = \frac{x(x+7)}{x-6}$$

non è, quindi, vero che il membro di destra ed il membro di sinistra rappresentano la stessa cosa qualunque sia il valore assegnato ad x. Questo accade, in realtà, per ogni valore di x eccetto -3, per cui, se vogliamo essere molto scrupolosi, dobbiamo aggiungere alla nostra soluzione le parole "per $x \neq -3$". Nel nostro corso, possiamo fare a meno di questo sussiego, basterà avere presente che stiamo perpetrando un piccolo abuso del simbolo $=$.

È possibile risolvere il medesimo esercizio in maniere diverse. Per esempio, possiamo usare:

Fatto (teorema di Ruffini)
Un polinomio $p(x)$ si fattorizza nella forma $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$ se e solo se $p(x_0) = 0$.

In pratica, se abbiamo una soluzione x_0 dell'equazione $p(x) = 0$, allora la regola di Ruffini ci assicura che possiamo scrivere

$$p(x) = (x - x_0) \cdot (\text{un polinomio opportuno})$$

Una volta scoperta, o indovinata, la soluzione x_0, il polinomio opportuno si può costruire semplicemente per aggiustamenti successivi.

Esempio
Sia $p(x) = x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6$ e $x_0 = 1$.
Vediamo subito che $p(x_0) = 1 + 1 - 3 + 7 - 6 = 0$. Scriviamo:

$$x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 = (x - 1) \cdot (?)$$

Siccome vogliamo ottenere $x^5 + \dots$ nella parentesi dovremo scrivere un x^4:

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 &= (x - 1) \cdot (x^4 + \dots \quad ?) \\ &= x^5 - x^4 + \dots \end{aligned}$$

Ora, il termine di quarto grado a destra ci viene $-x^4$, ma noi volevamo ottenere $+x^4$, dobbiamo quindi correggere aggiungendo $+2x^3$ nella parentesi:

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 &= (x - 1) \cdot (x^4 + 2x^3 + \dots \quad ?) \\ &= x^5 + x^4 - 2x^3 + \dots \end{aligned}$$

Ora i monomi x^5 e x^4 sono giusti, ma al grado tre, a sinistra non c'è alcun monomio, mentre, a destra, ci viene $-2x^3$; dobbiamo quindi aggiungere nella parentesi $+2x^2$ per cancellarlo:

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 &= (x-1) \cdot \left(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + \dots \quad ?\right) \\ &= x^5 + x^4 - 2x^2 + \dots \end{aligned}$$

Adesso bisogna aggiustare l'addendo di secondo grado. Procedendo così, alla fine, arriviamo a

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 &= (x-1) \cdot \left(x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x + 6\right) \\ &= x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 \qquad \text{OK} \end{aligned}$$

Come si vede, alla fine, l'uguaglianza è soddisfatta.

Per tornare all'esercizio, per esempio, una volta fattorizzato il numeratore come $x(x+7)(x+3)$, sappiamo che questi sono gli unici fattori che possiamo aver speranza di semplificare. Quindi, usando il teorema di Ruffini, possiamo verificare se questi fattori siano divisori del denominatore, controllando se il denominatore si annulla in 0, -7 o -3. Se sì, determiniamo la scomposizione come nell'esempio.

Ci sono ancora altre tecniche, però non è richiesto di conoscere tutti i modi di venire a capo di questi calcoli: basta saper trovare la soluzione in qualche modo. Ripetiamo ancora una volta — quando si è trovata la soluzione

$$\frac{x^3 + 10x^2 + 21x}{x^2 - 3x - 18} = \frac{x(x+7)}{x-6}$$

è consigliabile fare, in brutta copia, qualche verifica numerica.

Esercizio
Risolvi la seguente disequazione

$$\frac{1}{x+1} \leqslant 2x+3$$

Soluzione. Un modo di procedere è portare tutti i termini della disequazione al primo membro e poi ridurre a comun denominatore

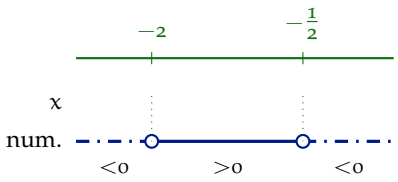
$$\frac{1}{x+1} - 2x - 3 \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1-(2x+3)(x+1)}{x+1} \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{-2x^2-5x-2}{x+1} \leqslant 0$$

A questo punto studiamo il segno di numeratore e denominatore separatamente, in funzione di x.

Numeratore: $-2x^2-5x-2$. Si annulla in

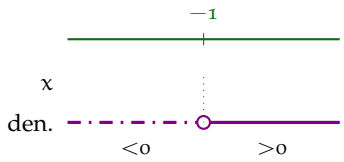
$$\frac{5 \pm \sqrt{9}}{-4} = \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Siccome il segno del coefficiente di x^2 è negativo, il numeratore è positivo fra questi due valori.



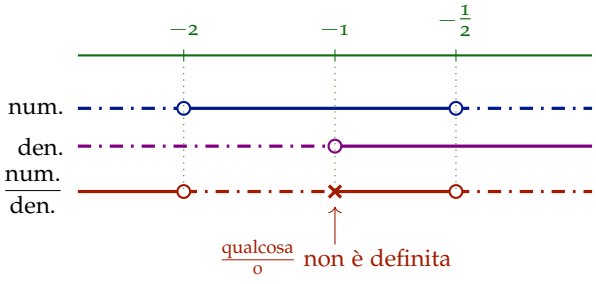
Denominatore: $x+1$.

$$\begin{aligned} x+1 < 0 &\iff x < -1 \\ x+1 = 0 &\iff x = -1 \\ x+1 > 0 &\iff x > -1 \end{aligned}$$



Combiniamo queste informazioni in un unico diagramma per mezzo della regola dei segni:

$$\frac{+}{+} = \frac{-}{-} = +\,, \qquad \frac{+}{-} = \frac{-}{+} = -\,, \qquad \text{\&c.}$$



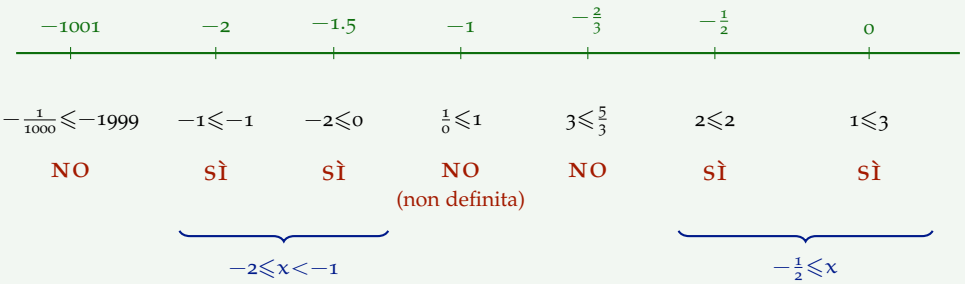
Infine leggiamo dal disegno la soluzione, ossia i valori di x per cui $\frac{\text{num.}}{\text{den.}} \leqslant 0$:

$$-2 \leqslant x < -1 \quad \text{oppure} \quad -\tfrac{1}{2} \leqslant x$$

□

Osservazione (Un altro modo di risolvere l'esercizio)
Si procede come segue.

1. Risolviamo l'equazione $\frac{1}{x+1} = 2x+3$ ignorando i problemi di annullamento del denominatore:
$$\frac{1}{x+1} = 2x+3 \implies 1 = (2x+3)(x+1)$$
$$\implies 2x^2+5x+2 = 0 \implies x = -2 \text{ o } x = -\tfrac{1}{2}$$
2. Troviamo i punti di annullamento dei denominatori. In questo caso c'è l'unico denominatore $x+1$, e $x+1 = 0 \implies x = -1$.
3. Individuiamo i numeri calcolati in (1) e (2) su una retta.
4. Verifichiamo la disuguaglianza data $\frac{1}{x+1} \leqslant 2x+3$ nei punti indicati sul diagramma e negli intervalli fra di essi, usando, per ciascun intervallo, un valore arbitrario in esso contenuto.



Come prima, la soluzione si legge da questo diagramma:

$$-2 \leqslant x < -1 \quad \text{oppure} \quad -\tfrac{1}{2} \leqslant x$$

§2.1 Esercizi

Test 1 (soluzione a p. 241)
Risolvi la disequazione $1 + \dfrac{1}{x} < 0$.

Test 2 (soluzione a p. 241)
Risolvi la disequazione $x^2 + 2x > 3$.

Test 3 (soluzione a p. 241)
Scrivi un'equazione di secondo grado le cui soluzioni siano 2 e 7.

Esercizio 4 (soluzione a p. 242)
Semplifica l'espressione

$$(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2-(a+b+c)^2$$

Esercizio 5 (soluzione a p. 242)
Semplifica l'espressione

$$(x+1)^3-\big((x+3)x+3\big)x$$

Esercizio 6 (soluzione a p. 243)
Risolvi l'equazione

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3x^2+4x+1}$$

Esercizio 7 (soluzione a p. 244)
Risolvi l'equazione

$$(x+1)^4+(x-1)^4-2x^4=10x$$

Esercizio 8 (soluzione a p. 244)
Risolvi l'equazione

$$x+\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{x^2}$$

Esercizio 9 (soluzione a p. 245)
Risolvi la disequazione

$$x^4<x^3+2x^2$$

Esercizio 10 (soluzione a p. 245)
Risolvi la disequazione

$$\frac{2}{x}\leqslant x+1$$

§3 Proporzioni & percentuali

Notazione
La proporzione

$$A : B = C : D$$

equivale — vale a dire che è un modo alternativo di scrivere —

$$A \cdot D = B \cdot C$$

ossia, se non siamo troppo formali a proposito della possibilità che si annullino denominatori,

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

In pratica, quindi, i segni : in $A : B = C : D$ sono semplicemente dei diviso, o, che è lo stesso, delle linee di frazione. Spesso, ma non esclusivamente, si usa la scrittura $A : B = C : D$ per suggerire che A e C rappresentano parti il cui totale è rispettivamente B e D.

§3.1 Denominatori convenzionali: le percentuali

Nelle situazioni in cui si parla di una parte ed un tutto, frequentemente, si rappresenta la frazione $\frac{\text{parte}}{\text{tutto}}$ raffrontando il tutto ad una quantità convenzionale. Nascono così le percentuali, quando si usa 100 per indicare la totalità, e, per esempio, le parti per milione (ppm) quando il termine di paragone è 1 000 000 — queste ultime si usano spesso per indicare frazioni molto piccole, concentrazioni di impurità nei reagenti chimici, &c.

In pratica:

$$A \text{ è l'}x\%\text{ di } B \quad \Longleftrightarrow \quad A : B = x : 100 \quad \Longleftrightarrow \quad A \cdot 100 = B \cdot x$$

§3.2 Aumenti e diminuzioni

Incrementare una quantità dello x% significa aggiungere a questa quantità il suo x%, che, algebricamente, equivale a moltiplicare la quantità per $1 + \frac{x}{100}$. Simmetricamente, diminuire una quantità dello x% significa moltiplicarla per $1 - \frac{x}{100}$.

$$\text{Aumentare dello } x\% \quad \longleftrightarrow \quad \text{Moltiplicare per } 1 + \frac{x}{100}$$

$$\text{Diminuire dello } x\% \quad \longleftrightarrow \quad \text{Moltiplicare per } 1 - \frac{x}{100}$$

Esercizio
Il prezzo dell'oro sale del 10%, poi scende del 10%. In totale quale è stata la variazione percentuale del prezzo dell'oro?

Soluzione. L'esercizio coinvolge tre prezzi: un prezzo iniziale, uno intermedio, e uno finale. Abbiamo

$$\text{intermedio} = \text{iniziale} \cdot \underbrace{\left(1 + \tfrac{10}{100}\right)}_{1.1} \qquad \text{finale} = \text{intermedio} \cdot \underbrace{\left(1 - \tfrac{10}{100}\right)}_{0.9}$$

Combinando queste due relazioni otteniamo

$$\text{finale} = \text{iniziale} \cdot 1.1 \cdot 0.9 = \text{iniziale} \cdot 0.99$$

Il prezzo, in totale, è quindi sceso. Per trovare di quanto, dobbiamo scrivere 0.99 nella forma $1 - \frac{x}{100}$:

$$0.99 = 1 - \frac{x}{100} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{100} = 1 - 0.99 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

Di conseguenza, il prezzo è sceso dell'1%. □

Esercizio
Il prezzo del petrolio scende del 10%, poi sale del 10%: di quanto cambia in percentuale?

Soluzione. Qui crescita e decrescita sono scambiate rispetto all'esercizio precedente. Procediamo con lo stesso metodo.

$$\text{intermedio} = \text{iniziale} \cdot \underbrace{\left(1 - \tfrac{10}{100}\right)}_{0.9} \qquad \text{finale} = \text{intermedio} \cdot \underbrace{\left(1 + \tfrac{10}{100}\right)}_{1.1}$$

$$\text{finale} = \text{iniziale} \cdot 0.9 \cdot 1.1 = \text{iniziale} \cdot 0.99$$

Nuovamente moltiplichiamo il prezzo per 0.99, quindi il risultato è il medesimo dell'esercizio precedente. □

Osservazione
Non è un caso che questi due risultati coincidano. Infatti, abbiamo detto che incrementare o decrementare una quantità di una certa percentuale equivale a moltiplicarla per determinati fattori. Per la proprietà commutativa della moltiplicazione, cambiando l'ordine dei fattori, il prodotto non cambia. Di conseguenza, cambiando l'ordine delle variazioni percentuali, il valore finale non cambia.

$$\begin{aligned}\text{finale} &= \text{iniziale} \cdot \left(1 \pm \frac{\text{perc. 1}}{100}\right) \cdot \left(1 \pm \frac{\text{perc. 2}}{100}\right) \\ &= \text{iniziale} \cdot \left(1 \pm \frac{\text{perc. 2}}{100}\right) \cdot \left(1 \pm \frac{\text{perc. 1}}{100}\right)\end{aligned}$$

§3.3 Percentuali facili da ricordare

$$\begin{aligned} 1\% &= \frac{1}{100} & 99\% &= \frac{99}{100} \\ 2\% &= \frac{1}{50} & 98\% &= \frac{49}{50} \\ 5\% &= \frac{1}{20} & 95\% &= \frac{19}{20} \\ 10\% &= \frac{1}{10} & 90\% &= \frac{9}{10} \\ 20\% &= \frac{1}{5} & 80\% &= \frac{4}{5} \\ 25\% &= \frac{1}{4} & 75\% &= \frac{3}{4} \\ 33\% &\approx \frac{1}{3} & 67\% &\approx \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$50\% = \frac{1}{2}$$

§3.4 Esercizi con due partizioni

Esercizio
Inizialmente i marziani verdi sono $\frac{2}{7}$ dei $\frac{3}{5}$ del totale dei marziani. Il 25% dei marziani emigra verso Venere, e, di questi, la metà è verde. Dopo la migrazione, che percentuale dei marziani rimasti è verde?

Soluzione. Questo esercizio concerne due partizioni dell'insieme di tutti i marziani. Una è la divisione VERDE–NON VERDE e una la divisione EMIGRATO–RIMASTO.

Possiamo quindi schematizzare la situazione in questo diagramma:

	verdi	non verdi
emigrati	VE	$\overline{\text{V}}\text{E}$
rimasti	$\text{V}\overline{\text{E}}$	$\overline{\text{V}}\overline{\text{E}}$

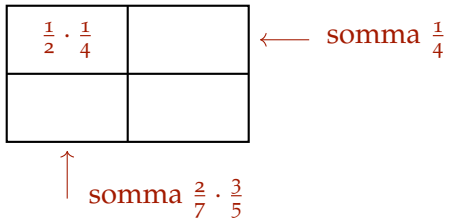
$\text{VE} =$ frazione di VERDI EMIGRATI
$\overline{\text{V}}\text{E} =$ " NON VERDI EMIGRATI
$\text{V}\overline{\text{E}} =$ " VERDI NON EMIGRATI
$\overline{\text{VE}} =$ " NON VERDI NON EMIGRATI

I dati dell'esercizio sono i seguenti:

- la frazione dei marziani verdi è $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$, ossia la somma dei numeri sulla prima colonna è $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$;

- la frazione dei marziani emigrati è il 25%, ossia la somma dei numeri sulla prima riga è $\frac{1}{4}$;
- gli emigrati verdi sono la metà del 25%, ossia il numero nella casella in alto a sinistra è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$.

Possiamo schematizzare questi dati così:



A questo punto non è difficile completare la tabella: il totale delle caselle deve fare 1; avendo calcolato le altre caselle, l'ultima è quindi obbligata a valere 1 meno la loro somma.

	verdi	non verdi
emigrati	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
rimasti	$\frac{13}{280}$	$\frac{197}{280}$

$$\overline{\text{V}}\text{E} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}$$
$$\text{V}\overline{\text{E}} = \tfrac{2}{7} \cdot \tfrac{3}{5} - \tfrac{1}{8}$$
$$\overline{\text{V}}\overline{\text{E}} = 1 - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{13}{280}$$

La domanda dell'esercizio è: *che percentuale dei marziani rimasti è verde?* Quando viene chiesta una percentuale, bisogna capire quali siano questi due elementi: la parte e il tutto. Nel nostro caso abbiamo

$$\text{tutto} = \text{marziani rimasti} = \text{V}\overline{\text{E}} + \overline{\text{V}}\overline{\text{E}} = \tfrac{3}{4} \qquad (*)$$
$$\text{parte} = \text{marziani rimasti che sono verdi} = \text{V}\overline{\text{E}} = \tfrac{13}{280}$$

Risolviamo la proporzione

$$\text{parte} : \text{tutto} = \text{percentuale} : 100$$
$$\text{percentuale} = \frac{13}{280} \cdot \frac{4}{3} \cdot 100 = \frac{130}{21} \approx 6.19$$

La risposta è quindi il 6.19%. □

Osservazione

$(*)$ Questo numero si può calcolare facendo $\frac{13}{280} + \frac{197}{280}$, però anche, più semplicemente, ricordando che

$$\text{VE} + \overline{\text{V}}\text{E} + \text{V}\overline{\text{E}} + \overline{\text{V}}\overline{\text{E}} = 1 \qquad \text{e} \qquad \text{VE} + \overline{\text{V}}\text{E} = \tfrac{1}{4}$$

da cui

$$\text{V}\overline{\text{E}} + \overline{\text{V}}\overline{\text{E}} = \left(\text{VE} + \overline{\text{V}}\text{E} + \text{V}\overline{\text{E}} + \overline{\text{V}}\overline{\text{E}}\right) - \left(\text{VE} + \overline{\text{V}}\text{E}\right) = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}$$

§3.5 Esercizi

Test 11 (soluzione a p. 246)
A che percentuale corrisponde la frazione $\frac{7}{20}$?

Test 12 (soluzione a p. 246)
Calcola 40 aumentato del 15%.

Esercizio 13 (soluzione a p. 246)
In un collegio per studenti ci sono camere doppie e camere singole. Le doppie sono il doppio delle singole, il 10% delle doppie è al pian terreno, e il 20% delle singole è al pian terreno.

1. Quale percentuale delle camere del pian terreno è costituita da doppie?
2. Che percentuale degli studenti che abitano al pian terreno è in singola?
3. Le camere doppie non sono mai abitate da due studenti di sessi opposti. Inoltre, metà del totale delle camere è abitata da studentesse, e l'altra metà da studenti maschi. Diciamo che l'x% delle camere doppie è abitato da studentesse, e l'y% delle studentesse è in doppia. Che relazione (che formula) lega x e y?

Esercizio 14 (soluzione a p. 249)
A e B sono due elementi capaci di formare tanto il composto A_2B_3 quanto il composto AB_3. Se 0.20 mol di A_2B_3 corrispondono a una massa di 30.4 g, e 0.20 mol di AB_3 corrispondono a una massa di 20.0 g, quali sono le masse atomiche degli elementi A e B?

Esercizio 15 (soluzione a p. 250)
Un certo elemento M forma un bromuro di formula MBr_3. Nel bromuro, il bromo è presente per l'82.17% in peso. Determina la massa atomica dell'elemento M, sapendo che quella del bromo è 79.90 g/mol.

Esercizio 16 (soluzione a p. 250)
Un minerale contiene il 17% in peso di FeS_2 (pirite). Calcola la massa in grammi di minerale che contiene 135 g di ferro. Masse atomiche: ferro 55.85 g/mol, zolfo 32.06 g/mol.

§4 Modi di scrivere i numeri reali

§4.1 Notazioni algebriche

$$\sqrt{2}, \qquad 2\pi, \qquad \sin(30^\circ), \qquad e^{2.5}, \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad 0$$

pro: notazione assolutamente precisa
contro: è difficile farsi un'idea concreta dei numeri

Es. $\sqrt{10}$ è più o meno di π? e^{π} è più o meno di $\pi + 20$?

§4.2 Notazione decimale

$$1.41, \qquad -42, \qquad 3.1415\ldots, \qquad 128\,000\,000, \qquad 0.000\,000\,012\,345$$

pro: elementare confrontare e manipolare numeri
contro: alcuni numeri devono essere troncati

Es. $\pi = 3.1415\ldots$, $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$, $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$

scomodo gestire numeri molto grandi o piccoli

Es. $0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,27$ contro $2.7 \cdot 10^{-19}$; il numero di Avogadro $\approx 6.02 \cdot 10^{23}$.

Nota
Conviene fare attenzione a non confondere il separatore decimale con il simbolo che separa gli elementi di una lista. Questa lista:

$$2.7,4,0.54,37.64,92$$

— sebbene scritta senza colori: $2.7, 4, 0.54, 37.64, 92$ — rimane leggibile senza ambiguità.

Se ora rimpiazziamo i punti con virgole, la lista diviene illeggibile:

$$2,7,4,0,54,37,64,92$$

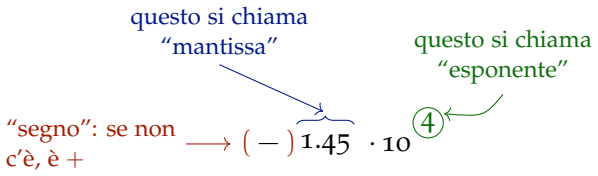
$2,7,4,0,54,37,64,92$? $2.7,4.0,54.37,64.92$

$2,7.4,0,54.37,64.92$ $2.7,4,0.54,37.64,92$

Per questa ragione, io, personalmente, preferisco usare il punto per separare le cifre decimali e la virgola per formare liste &c. Non è richiesto di conformarsi alla mia abitudine, è richiesto, tuttavia, di usare una notazione non ambigua.

§4.3 Notazione scientifica

$$1.45 \cdot 10^4, \qquad -3.21 \cdot 10^6, \qquad 4.5 \cdot 10^{-8}, \qquad 6.00 \cdot 10^{-16}$$



Regola
La mantissa deve essere < 10 e $\geqslant 1$. Detto in altri termini, la mantissa deve avere esattamente una cifra prima del punto decimale, e questa cifra non può essere 0.

È sempre possibile ricondursi alla situazione prescritta dalla regola moltiplicando e dividendo per opportune potenze di 10.

Es.

$$172.31 = 172.31 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 1.7231 \cdot 10^2$$
$$0.0092 = 0.0092 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = 9.2 \cdot 10^{-3}$$
$$154 \cdot 10^9 = 154 \cdot 10^9 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 1.54 \cdot 10^{11}$$

pro: adatta a numeri molto grandi e molto piccoli; rappresenta chiaramente il numero di cifre significative (vedremo nel capitolo 7)
contro: leggermente più complicata della notazione decimale

§4.4 Notazione ingegneristica

$$14.5 \cdot 10^3, \qquad -3.21 \cdot 10^6, \qquad 45 \cdot 10^{-9}, \qquad 600 \cdot 10^{-18}$$

Non è fondamentale conoscerla, corrisponde al tasto ENG su molte calcolatrici.

Regola
La mantissa deve essere < 1000 e $\geqslant 1$; l'esponente deve essere multiplo di 3.

pro: si adatta bene ai prefissi SI

Es. $72 \cdot 10^6\,\mathrm{J} = 72\,\mathrm{MJ}$ ("megajoule"); $3.4 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{s} = 3.4\,\mathrm{fs}$ ("femtosecondi").

Nota (Curiosità)
Come è ben noto ci sono frazioni che possono essere scritte in notazione decimale, e altre che richiederebbero una quantità illimitata di cifre:

$$\frac{7}{4} = 1.75 \qquad \text{ma} \qquad \frac{1}{3} = 0.3333\ldots \textit{ ad infinitum}$$

Che numero otteniamo dalla somma

$$0.7777\ldots + 0.2222\ldots = ?$$

Possiamo svolgere la somma in colonna:

$$\begin{array}{r} 0.7777\ldots + \\ 0.2222\ldots = \\ \hline 0.9999\ldots \end{array}$$

Oppure possiamo convertire i due numeri in frazioni:

$$\underbrace{0.7777\ldots}_{=7/9} + \underbrace{0.2222\ldots}_{=2/9} = \frac{7}{9} + \frac{2}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Quale è quindi il risultato: $0.9999\ldots$ oppure 1? La risposta è che il 9 periodico è vietato. L'operazione in colonna non è sbagliata: semplicemente $0.9999\ldots$ è un modo improprio per scrivere 1; lo si vieta, quindi, non perché fonte di contraddizione, ma solo per evitare che lo stesso numero (in questo esempio 1) abbia due scritture decimali diverse.

§4.5 Operazioni in notazione scientifica

§4.5.1 Somme e differenze

Calcoliamo $1.054 \cdot 10^{-9} - 7.3 \cdot 10^{-11}$.

1. Convertire il numero con l'esponente più piccolo in modo da portare i due esponenti a coincidere.

$$1.054 \cdot 10^{-9} - 7.3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{2} \cdot 10^{-11} = 1.054 \cdot 10^{-9} - 0.073 \cdot 10^{-9}$$

2. Sommare o sottrarre le mantisse.

$$1.054 \cdot 10^{-9} - 0.073 \cdot 10^{-9} = (1.054 - 0.073) \cdot 10^{-9} = \underbrace{0.981}_{\text{ops: non è più } \geqslant 1} \cdot 10^{-9}$$

3. Normalizzare il risultato.

$$0.981 \cdot 10^{-9} = \underbrace{0.981 \cdot 10}_{9.81} \cdot \underbrace{10^{-1} \cdot 10^{-9}}_{10^{-10}} = 9.81 \cdot 10^{-10}$$

§4.5.2 Prodotti e quozienti

Calcoliamo $4.7 \cdot 10^6 \cdot 3.1 \cdot 10^{-8}$.

1. Riordinare i fattori.

$$4.7 \cdot 10^6 \cdot 3.1 \cdot 10^{-8} = 4.7 \cdot 3.1 \cdot 10^6 \cdot 10^{-8}$$

2. Moltiplicare le mantisse e sommare gli esponenti.

$$4.7 \cdot 3.1 \cdot 10^6 \cdot 10^{-8} = \underbrace{14.57}_{\text{Ops: non è più } < 10} \cdot 10^{-2}$$

3. Normalizzare il risultato.

$$14.57 \cdot 10^{-2} = \underbrace{14.57 \cdot 10^{-1}}_{1.457} \cdot \underbrace{10 \cdot 10^{-2}}_{10^{-1}} = 1.457 \cdot 10^{-1}$$

§4.5.3 Radici quadrate

Calcoliamo $\sqrt{4.096 \cdot 10^{-9}}$.

1. Se l'esponente è dispari, moltiplicare per $1 = 10 \cdot 10^{-1}$.

$$\sqrt{4.096 \cdot 10^{-9}} = \sqrt{\underbrace{4.096 \cdot 10}_{40.96} \cdot \underbrace{10^{-1} \cdot 10^{-9}}_{10^{-10}}} = \sqrt{40.96 \cdot 10^{-10}}$$

2. Estrarre la radice della mantissa e dimezzare l'esponente.

$$\sqrt{40.96 \cdot 10^{-10}} = \underbrace{\sqrt{40.96}}_{6.4} \cdot \underbrace{\sqrt{10^{-10}}}_{10^{-5}} = 6.4 \cdot 10^{-5}$$

> **Nota**
> Nel calcolo di radici quadrate, non può capitare che sia necessario normalizzare.

§4.6 Esercizi

Test 17 (soluzione a p. 251)
Calcola in notazione scientifica $1.10 \cdot 10^4 - 1.4 \cdot 10^3$.

Test 18 (soluzione a p. 251)
Calcola $\sqrt{4.9 \cdot 10^{-5}}$ scrivendo il risultato in notazione scientifica.

§5 Come non sbagliare nei calcoli

In breve, non c'è modo. Gli errori sono inevitabili, concentrarsi su non sbagliare è futile, perché impossibile, e frustrante. Bisogna invece riconoscere gli errori, quando capitano, il prima possibile, fermarsi, e cercare il passaggio sbagliato.

Questo è difficile perché la psicologia umana ci spinge verso metodi inefficaci.

Primo: noi tendiamo verso la conclusione del lavoro, fermarsi per verificare i risultati — che è la cosa furba da fare — sembra distrarci dalla meta, e non lo facciamo.

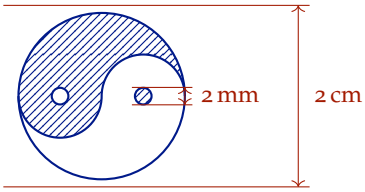
Secondo: noi abbiamo paura dell'incerto e troviamo conforto nella sicurezza. Per questo preferiamo applicare il procedimento che conosciamo — anche se magari è sbagliato! — piuttosto che chiederci "ma questa sarà davvero la via da seguire?" — e se poi la risposta è no? E se viene fuori che non so la via da seguire? Brrr.≈–

Terzo ed ultimo: siamo pigri. Una volta appreso un metodo per risolvere un problema, ci accontentiamo, e pare uno spreco studiare gli altri approcci che ci potrebbero essere — e invece più strade si conoscono maggiori sono le probabilità di trovare quella che ci porta a destinazione con poca fatica, e meno fatica nei calcoli significa che è più difficile sbagliare.

§5.1 Consigli utili

- Saper fare calcoli approssimati a mente e verificare i risultati di calcolatrici e computer — è anche a questo che serve saper fare le operazioni in notazione scientifica.
- Usare notazioni non ambigue — per esempio EVITARE 41,54 , 7 , 18
- Verificare le soluzioni delle equazioni — anche graficamente, numericamente.
- Provare le espressioni calcolate in astratto usando dei valori numerici concreti.
- Studiare casi particolari del problema.
- Accorgersi di risultati (anche intermedi) che non hanno senso: una parte $> 100\%$, un volume negativo, un numero di persone che non è intero, &c.
- Sfruttare semplificazioni del problema.

Esempio
Calcoliamo l'area tratteggiata nella figura qui sotto.



Dal momento che l'intera figura è contenuta in un quadrato di lato 2 cm è chiaro che qualunque area ci verrà alla fine dovrà essere $\leqslant 4\,\mathrm{cm}^2$: se questo non dovesse accadere, dobbiamo tornare indietro e scovare l'errore perché, così com'è per ora, la soluzione che abbiamo vale ZERO.

- Sfruttare simmetrie del problema.

Esempio
Calcoliamo, adesso, l'area di quella faccenda.

Beh, siccome il cerchio di diametro 2 cm è esattamente metà tratteggiato e metà bianco, l'area cercata è

$$A = \frac{1}{2}\,\text{raggio}^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{2}\,\text{cm}^2 \approx 1.57\,\text{cm}^2$$

- Usare buon senso — $1\,\text{m}^3$ di neve non pesa un chilo, un uomo non ha 12 globuli rossi al litro di sangue, la probabilità di morire di cancro al polmone, per un fumatore, non è del 70%, una mummia egizia non è vecchia di 170 000 anni, &c.

§5.2 Esercizi

In ciascuno degli esercizi seguenti c'è una soluzione già svolta. Alcune sono giuste, altre sbagliate: identifica quelle sbagliate, trova l'errore e correggilo. Prima di rifare i conti, prova a smascherare l'errore con uno dei consigli sopra — un valore numerico concreto, un caso particolare, una verifica della soluzione, il buon senso.

Esercizio 19 (soluzione a p. 251)
Semplifica $(x+y)^3-(x-y)^3$. La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned}(x+y)^3-(x-y)^3 &= \big((x+y)-(x-y)\big)\big((x+y)^2+(x+y)(x-y)+(x-y)^2\big)\\ &= 2y(x^2+y^2+2xy+x^2-y^2+x^2+y^2-2xy)\\ &= 2y(2x^2+y^2)\\ &= 4x^2y+2y^3\end{aligned}$$

Esercizio 20 (soluzione a p. 252)
Se una spuma scontata del 20% *costa la metà di un etto di cecina, al prezzo di un chilo di cecina quante spume compro senza sconti?* La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA Mezzo etto di cecina costa quanto 0.8 spume, quindi un chilo di cecina, che sono venti *mezzi etti*, costa quanto $20 \cdot 0.8$ spume, ossia 16 spume.

Esercizio 21 (soluzione a p. 252)
Risolvi l'equazione $(x+2)^2 + x = 0$. La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned}(x+2)^2 + x &= 0\\ x^2 + 2x + 4 + x &= 0\\ x^2 + 3x + 4 &= 0\\ \Delta = 9 - 16 &< 0\end{aligned}$$

quindi l'equazione non ha soluzioni.

Esercizio 22 (soluzione a p. 252)
Briga e Magonza si trovano a 500 km *di distanza. Un brigante parte da Briga a mezzogiorno e viaggia verso Magonza ai* 160 km/h. *Un mago parte da Magonza all'una in punto e viaggia verso Briga ai* 180 km/h. *A che ora si incontrano?* La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA All'una il brigante ha percorso 160 km, quindi restano altri 340 km di separazione fra i due personaggi. Ora, entrambi sono in moto, e si avvicinano alla velocità combinata di $(160 + 180)$ km/h, ossia 340 km/h. I due personaggi impiegano quindi un'ora per incontrarsi e, di conseguenza, si incontrano alle due.

Esercizio 23 (soluzione a p. 253)
All'una una colonia di batteri contiene un milione di individui, e il numero di individui raddoppia ogni ora. Quanti individui ci sono alle dieci? La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA Il numero di individui all'ora x è 2^x milioni. Quindi alle dieci ce ne sono 2^{10} milioni, ossia 1 024 000 000.

Esercizio 24 (soluzione a p. 253)
Risolvi la disequazione $x^3 > x$. La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned} x^3 &> x \\ x^2 &> 1 \\ x^2 - 1 &> 0 \\ (x+1)(x-1) &> 0 \end{aligned}$$

Quindi sono soluzioni tutte le x con $-1 < x < 1$.

Esercizio 25 (soluzione a p. 254)
Risolvi l'equazione

$$\frac{x^2-1}{x-1} = 2x - 2$$

La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x-1} &= 2x-2 \\ x^2 - 1 &= (2x-2)(x-1) \\ x^2 - 1 &= 2x^2 - 4x + 2 \\ 0 &= x^2 - 4x + 3 \\ x_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \end{aligned}$$

Le soluzioni sono quindi $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.

Esercizio 26 (soluzione a p. 254)
Risolvi il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ x + 4y + 9z = 16 \end{cases}$$

La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA Sottraendo la prima equazione dalle altre due, e poi il triplo della seconda dalla terza:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 3 \\ 3y + 8z = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 3 \\ 2z = 6 \end{cases}$$

Da cui $z = 3$, $y = -3$, $x = 1$.

Esercizio 27 (soluzione a p. 255)
Risolvi l'equazione $\sqrt{x+\sqrt{2x}} = x$. La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+\sqrt{2x}} &= x \\
x+\sqrt{2x} &= x^2 \\
\sqrt{2x} &= x^2 - x \\
\sqrt{2x} &= x(x-1) \\
2x &= x^2(x^2-2x+1) \\
0 &= x(x^3-2x^2+x-2) \\
0 &= x(x^2+1)(x-2)
\end{aligned}$$

Quindi le soluzioni sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

Esercizio 28 (soluzione a p. 255)
La velocità media lungo un tragitto è definita come la lunghezza del tragitto divisa per il tempo impiegato a percorrerlo. Un'auto viaggia ai 60 km/h *per* 100 km, *poi ai* 120 km/h *per altri* 100 km, *completando così un tragitto di* 200 km. *A che velocità media lo ha percorso?* La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA La velocità media è

$$\frac{60\,\mathrm{km/h} + 120\,\mathrm{km/h}}{2}$$

quindi 90 km/h.

§6 Unità di misura

Le unità di misura fisiche sono grandezze convenzionali fissate per ogni grandezza fisica (es. il metro per la lunghezza, il newton per la forza, &c.). Il sistema SI (fr. *Système International*) prevede sette unità fondamentali.

m	metro	lunghezza
kg	chilogrammo	massa
s	secondo	tempo
A	ampere	intensità di corrente elettrica
K	kelvin	temperatura
mol	mole	quantità di sostanza
cd	candela	intensità luminosa

Le unità derivate si ottengono moltiplicando unità fondamentali.

Esempio

$$\text{forza} = \text{massa} \cdot \text{accelerazione}$$
$$N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$$

$$\text{lavoro} = \text{forza} \cdot \text{spostamento}$$
$$J = N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

$$\text{pressione} = \text{forza} \ / \ \text{superficie}$$
$$Pa = N \cdot m^{-2} = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$$
Pa: "pascal"; $1/m^2 = m^{-2}$

$$\text{potenza} = \text{lavoro} \ / \ \text{tempo}$$
$$W = J \cdot s^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$$

$$\text{potenza} = \text{corrente} \cdot \text{tensione}$$
$$W = A \cdot V$$
da cui
$$V = W \cdot A^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$$

§6.1 Prefissi moltiplicatori

Moltiplicano le unità per una potenza di 10.

da	10	deca	d	10^{-1}	deci
h	10^2	etto	c	10^{-2}	centi
k	10^3	chilo	m	10^{-3}	milli
M	10^6	mega	µ	10^{-6}	micro
G	10^9	giga	n	10^{-9}	nano
T	10^{12}	tera	p	10^{-12}	pico
P	10^{15}	peta	f	10^{-15}	femto
E	10^{18}	exa	a	10^{-18}	atto
Z	10^{21}	zetta	z	10^{-21}	zepto
Y	10^{24}	yotta	y	10^{-24}	yocto

Nota importante
Occhio: K kelvin, maiuscola — k chilo, minuscola.

Nota: Z, Y, z, y sono stati introdotti nel 1991 e sono più rari — non serve ricordarli.

§6.2 Equivalenze

Una grandezza fisica si esprime come "numero · unità di misura". In generale, la medesima grandezza si può esprimere in più modi — es. $10\,\mathrm{cm} = 0.1\,\mathrm{m}$. Vediamo come convertire fra unità di misura omologhe.

Esercizio (Metodo)
Converti $3.7\,\mathrm{N/cm^2}$ in kPa.

Soluzione. Scriviamo l'equazione

$$3.7\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm^2}} = x\,\mathrm{kPa}$$

Il nostro scopo è ora semplificare le unità, quindi conviene rimpiazzare i pascal — che non compaiono a sinistra — con la loro definizione

$$3.7\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm^2}} = x\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m^2}}$$

Espandiamo i prefissi

$$3.7\,\frac{\mathrm{N}}{\underbrace{(10^{-2}\,\mathrm{m})^2}_{10^{-4}\,\mathrm{m^2}}} = x\,\frac{10^3\,\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}$$

Le unità si trattano algebricamente come se fossero variabili moltiplicate, facciamo quindi le semplificazioni algebriche

$$3.7\,\frac{\cancel{\mathrm{N}}}{10^{-4}\,\cancel{\mathrm{m^2}}} = x\,\frac{10^3\,\cancel{\mathrm{N}}}{\cancel{\mathrm{m^2}}} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 37$$

Quindi $3.7\,\mathrm{N/cm^2} = 37\,\mathrm{kPa}$. □

Chiaramente, in pratica, i calcoli si eseguono mentalmente.

Esempio (Altre conversioni)

$$0.071\,\mathrm{mA} = ?\,\mu\mathrm{A}$$
$$0.071\,\mathrm{mA} = x\,\mu\mathrm{A}$$
$$0.071 \cdot 10^{-3}\,\cancel{\mathrm{A}} = x \cdot 10^{-6}\,\cancel{\mathrm{A}}$$
$$x = 0.071 \cdot 10^{3} = 71$$
$$0.071\,\mathrm{mA} = 71\,\mu\mathrm{A}$$

$\mathrm{L} = (\mathrm{dm})^3, \quad \mathrm{h} = 60\,\mathrm{min}$

$$140.3\,\tfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}} = ?\,\tfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$$
$$140.3\,\tfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}} = x\,\tfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$$
$$140.3\,\frac{(10^{-1}\,\mathrm{m})^3}{\mathrm{min}} = x\,\frac{\mathrm{m}^3}{60\,\mathrm{min}}$$
$$140.3\,\frac{10^{-3}\,\cancel{\mathrm{m}^3}}{\cancel{\mathrm{min}}} = x\,\frac{\cancel{\mathrm{m}^3}}{60\,\cancel{\mathrm{min}}}$$
$$x = 60 \cdot 140.3 \cdot 10^{-3} = 8.418$$
$$140.3\,\tfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}} = 8.418\,\tfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$$

§6.3 Operazioni fra grandezze fisiche

Le grandezze fisiche si comportano quasi come numeri, salvo che non tutte le operazioni sono lecite.

- **Somme e sottrazioni** sono lecite solo fra grandezze omologhe, ossia riferite alla medesima grandezza — es. due lunghezze, due masse, &c. Numericamente, è necessario convertire le grandezze alla medesima unità di misura prima di sommare o sottrarre i numeri.

  Es.
  $$30\,\mathrm{cm} + 1.2\,\mathrm{m} = 0.3\,\mathrm{m} + 1.2\,\mathrm{m} = 1.5\,\mathrm{m}$$
  $12\,\mathrm{A} + 15\,\mathrm{kg}$ NON HA SENSO
  $$1.2\,\mathrm{bar} + 5\,\mathrm{psi} \approx 1.2\,\mathrm{bar} + 0.34\,\mathrm{bar} = 1.54\,\mathrm{bar}$$

- **Prodotti e quozienti** sono sempre leciti.

  Es.
  $$\frac{7\,\mathrm{kg}}{5\,\mathrm{m}^3} = 1.4\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \qquad \frac{1\,\mathrm{in}}{2\,\mathrm{cm}} = \frac{2.54\,\cancel{\mathrm{cm}}}{2\,\cancel{\mathrm{cm}}} = 1.27$$

- **Esponenziali** hanno senso solo se base ed esponente sono numeri puri — un numero puro è semplicemente un numero: una grandezza senza dimensioni fisiche.

  Infatti $7.1^{4.3\,\mathrm{kg}}$ potrebbe voler dire $7.1^{4.3}\,\mathrm{kg}$, oppure $7.1^{4300}\,\mathrm{g}$ — che sono diversi! — oppure $7.1^{4.3} \cdot 7.1^{\mathrm{kg}}$, che non significa niente. Quindi

  $$7.1^{4.3\,\mathrm{kg}} \qquad \text{NON HA SENSO}$$

§6.4 Ragionare con le unità di misura

Le regole della sezione precedente sono ottime per evitare errori grossolani nei calcoli — ad esempio, se mi trovo a dover sommare una lunghezza con un tempo, oppure un risultato che dovrebbe essere una massa esce in $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}$, so immediatamente di aver sbagliato qualcosa di grosso. Spesso non ci sono molti modi di combinare i dati di un problema, per cui avviene addirittura che sia possibile ottenere la soluzione semplicemente combinando ragionamenti di buon senso con i vincoli imposti dalle unità di misura — per usare un termine altisonante, questo modo di brancolare nel buio si chiama analisi dimensionale.

Esercizio (come risolvere un esercizio senza conoscere l'argomento)
La camicia di un reattore è attraversata da un fluido riscaldante, con calore specifico $6\,\mathrm{J}/(\mathrm{g} \cdot \mathrm{K})$, che entra a $80\,^\circ\mathrm{C}$ ed esce a $40\,^\circ\mathrm{C}$. La portata del fluido è $750\,\mathrm{kg/h}$. Quale potenza termica fornisce la camicia?

Soluzione. Facciamo finta — non è difficile — di non sapere nulla di reattori e di termodinamica.

Ragionevolmente, i $6\,\mathrm{J}/(\mathrm{g} \cdot \mathrm{K})$ vorranno dire che ogni grammo del liquido, ogni volta che si raffredda di un kelvin, cede sei joule — questo almeno è il significato suggerito dall'unità $\mathrm{J}/(\mathrm{g} \cdot \mathrm{K})$. La portata di $750\,\mathrm{kg/h}$ ci dice che ogni ora entrano in questa *camicia* $750\,\mathrm{kg} = 750 \cdot 10^3\,\mathrm{g}$ di liquido, e questi, passando da $80\,^\circ\mathrm{C}$ a $40\,^\circ\mathrm{C}$, si raffreddano di $40\,\mathrm{K}$. Ogni ora, la nostra camicia riceve quindi

$$750 \cdot 10^3\,\cancel{\mathrm{g}} \cdot 40\,\cancel{\mathrm{K}} \cdot 6\,\frac{\mathrm{J}}{\cancel{\mathrm{g}} \cdot \cancel{\mathrm{K}}} = 180 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$$

L'esercizio chiede una potenza, che è un'energia divisa per il tempo in cui viene fornita. Ci aspettiamo quindi la risposta

$$\frac{180 \cdot 10^6\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{h}} = \frac{180 \cdot 10^6\,\mathrm{J}}{3600\,\mathrm{s}} = 50 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 50\,\mathrm{kW}$$

Se riguardiamo i calcoli eseguiti, in definitiva, abbiamo fatto

$$750\,\mathrm{kg/h} \cdot (80\,^\circ\mathrm{C} - 40\,^\circ\mathrm{C}) \cdot 6\,\mathrm{J}/(\mathrm{g} \cdot \mathrm{K}) = 50\,\mathrm{kW}$$

Pochi tentativi basteranno a convincerci che questa è essenzialmente l'unica maniera di combinare i dati per produrre una potenza (ossia dei W). La potenza di $50\,\mathrm{kW}$ sembra compatibile con un processo industriale di qualche genere — un numero dell'ordine dei watt mi avrebbe insospettito (è la potenza, diciamo, di una lampadina), così come un numero dell'ordine di molti megawatt (una locomotiva è capace di qualche megawatt). Una piccola caldaia per il riscaldamento domestico produce una potenza termica di circa $25\,\mathrm{kW}$. In definitiva, non abbiamo ragioni di sospettare della risposta a cui siamo giunti. □

Nota importante
L'analisi dimensionale non vede i numeri puri: se il risultato giusto fosse la metà di quello trovato, oppure se nella formula ci fosse un π, le unità di misura non lo direbbero — per questo è importante cercare di capire la logica della formula che supponiamo essere corretta.

Nota
Il calore specifico è in $\mathrm{J}/(\mathrm{g}\cdot\mathrm{K})$, cioè joule per grammo e per kelvin, mentre le temperature del fluido sono date in gradi Celsius. Non c'è nessun errore: la scala Celsius ha gradi della stessa ampiezza del kelvin, e li riferisce a uno zero convenzionale che chiamiamo $0\,^\circ\mathrm{C}$. Una differenza di temperature, come $80\,^\circ\mathrm{C} - 40\,^\circ\mathrm{C}$, rappresenta un certo numero di gradi della scala, quindi, in questo caso, $40\,\mathrm{K}$.

Semmai, il K a denominatore conferma la nostra intuizione che quel numero vada moltiplicato per una *differenza* di temperature.

§6.5 Esercizi

Test 29 (soluzione a p. 256)
Converti $150\,\mathrm{mm}^3$ in millilitri.

Esercizio 30 (soluzione a p. 256)
Quanti psi (pound per square inch) sono 1 bar?

Dati:

$$1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa} \qquad 1\,\mathrm{psi} = 1\,\mathrm{lbf}/\mathrm{in}^2 \qquad 1\,\mathrm{lbf} = g\cdot 1\,\mathrm{lb}$$
$$g = 9.81\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2 \qquad 1\,\mathrm{lb} = 0.453\,\mathrm{kg} \qquad 1\,\mathrm{in} = 2.54\,\mathrm{cm}$$

Esercizio 31 (soluzione a p. 256)
Calcola la portata volumetrica, in m^3/h, di un fluido che scorre in una tubazione del diametro di 10.0 cm alla velocità di $1.50\,\mathrm{m}/\mathrm{s}$.

Esercizio 32 (soluzione a p. 257)
Una soluzione satura di un principio attivo viene fatta cristallizzare raffreddandola, a volume costante, da $60\,^\circ\mathrm{C}$ a $25\,^\circ\mathrm{C}$. Se la solubilità diminuisce di otto volte, qual è la resa di cristallizzazione?

Esercizio 33 (soluzione a p. 258)
Una soluzione satura di un principio attivo, con solubilità 20 g/L, viene fatta cristallizzare facendo evaporare il solvente a temperatura costante. Se il volume iniziale del solvente è di 1000 L e la resa di cristallizzazione è del 90%, quanto solvente è evaporato?

§7 Cifre significative

Se immaginiamo di scrivere una quantità numerica negli spazi di un modulo prestampato, potremmo trovarci, per esempio, ad inserire un prezzo dentro una griglia fatta così

$$\text{PREZZO} : \square\square,\square\square \text{ €}$$

Questo ci dice, in un istante, che il prezzo è minore di 100 € e che lo possiamo specificare con la precisione di un centesimo. Siccome da 0 a 100 ci sono 10 000 incrementi di un centesimo, vediamo che 4 cifre possono essere scelte in $10\,000 = 10^4$ modi diversi. Più in generale n cifre si possono scegliere in 10^n modi.

Ragionando al contrario, quindi in maniera un po' imprecisa, possiamo dedurre che, se leggiamo un dato che è scritto con quattro cifre di precisione, per esempio

$$\text{massa} = 42.84\,\text{kg}$$

questo rappresenti una di 10 000 possibilità.

Supponiamo, adesso, di dover usare questo numero in un certo calcolo, come

$$\text{peso} = \text{massa} \cdot 9.807\,\text{m/s}^2$$

Procedendo aritmeticamente otterremmo

$$\text{peso} = 42.84 \cdot 9.807\,\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = 420.13188\,\text{N}$$

Il numero 420.13188 è giusto, ma suggerisce un'idea sbagliata, ossia che noi conosciamo il peso così precisamente da saper dire quale sia la cifra esatta dei centomillesimi. Non sappiamo questa cifra perché $\frac{1}{100\,000}$ N corrisponde, grosso modo, a un milionesimo di kg, e noi abbiamo la massa solo fino alla cifra dei centesimi. Per dare un risultato onesto, occorre quindi indicare il peso con meno cifre di quante ne abbiamo ottenute aritmeticamente.

Ma quante? Dobbiamo ragionare che il dato di 42.84 kg è, si è detto, uno fra 10 000 possibili. Se, a ciascuno di questi corrisponde un risultato, anche i risultati possibili sono 10 000. Quindi indicheremo il risultato con quattro cifre di precisione.

$$\text{peso} = 420.1\,\text{N}$$

In definitiva, abbiamo scoperto la regola seguente.

Regola
Quando una computazione si basa su dati soggetti a incertezze, in generale, conviene esprimere il risultato con tante cifre significative quante il meno preciso dei dati.

Possiamo illustrare ulteriormente questo concetto considerando l'esercizio seguente.

Esercizio
Misuri il diametro interno di un condotto avente sezione circolare utilizzando un calibro che permette di leggere il decimo di millimetro, e ottieni

$$\text{diametro} = 45.2\,\text{mm}$$

Quanto vale l'area della sezione del tubo (in cm^2)?

Soluzione. Chiaramente dobbiamo calcolare

$$\text{area} = \text{raggio}^2 \cdot \pi = \left(\frac{\text{diametro}}{2}\right)^2 \cdot \pi = \overbrace{16.0}^{\text{cifre significative}}459986\ldots\ \text{cm}^2$$

Secondo la regola, tuttavia, solo le prime tre di queste sono significative. Il risultato va quindi riportato nella forma

$$\text{area} = 16.0\,\text{cm}^2$$

□

Osservazione (Perché questa scelta è ragionevole?)
L'esercizio ci dice che la misura è stata eseguita con uno strumento che permette di leggere il decimo di millimetro. Quindi, per quanto ne sappiamo, il diametro reale potrebbe sì essere esattamente 45.2 mm, ma potrebbe ugualmente essere, per esempio, 45.24 mm o 45.18 mm. Tutte queste lunghezze verrebbero lette come 45.2 mm dal nostro calibro, che non permette di misurare i centesimi di millimetro. Proviamo a calcolare l'area in ciascuno dei tre casi.

diametro [mm]	area [cm^2]
45.18	16.0 | 318…
45.2	16.0 | 459…
45.24	16.0 | 744…

La barra verticale segna il punto in cui le tre risposte cominciano a divergere.

Come si vede, noi possiamo dire di sapere le cifre che la regola indica come significative, perché non dipendono da quale dei casi possibili è quello vero. Non possiamo, tuttavia, dire onestamente di sapere le altre, perché la nostra misura non ci permette di escludere nessuno dei casi considerati.

Nota importante
Nei passaggi intermedi bisogna lavorare con almeno due cifre significative in più rispetto alla precisione richiesta.

§7.1 Quali cifre sono significative

La regola parla di cifre *significative* perché non tutte le cifre lo sono. Se avessimo espresso la massa di 42.84 kg in tonnellate, avremmo scritto

$$\text{massa} = 0.04284\,\text{t}$$

Questo è lo stesso dato di prima, quindi è chiaro che deve ancora avere le sue quattro cifre significative, segno che lo 0.0 iniziale non è significativo. Quegli zeri lì sono, infatti, dei meri segna-posto. Servono per dire che il 4 successivo si trova nella posizione dei centesimi, e, se scrivessimo il numero in notazione scientifica, sparirebbero.

$$\text{massa} = 4.284 \cdot 10^{-2}\,\text{t}$$

Quali cifre sono significative e quali, invece, segna-posto?

Regola (versione 1)
Le cifre sono o significative o segna-posto.

- In notazione scientifica tutte le cifre della mantissa sono significative.
- Gli zeri alla fine di un numero intero (senza indicazione di cifre decimali) sono segna-posto.
- Gli zeri all'inizio di un numero che inizia con 0. sono segna-posto.

Esempi (le cifre significative sono sottolineate in verde).

$$\underline{24} \qquad 0.\underline{24} \qquad \underline{2.4} \qquad 0.0\underline{24} \qquad \underline{24}000 \qquad \underline{2.4} \cdot 10^{-70}$$

— tutti con due cifre significative —

$$\underline{240.0}_{\text{4 c.s.}} \qquad \underline{240}_{\text{2 c.s.}} \qquad 0.0\underline{24}_{\text{2 c.s.}} \qquad \underline{1.024}_{\text{4 c.s.}} \qquad 0.0\underline{240}_{\text{3 c.s.}} \qquad \underline{7.400} \cdot 10^{-2}{}_{\text{4 c.s.}}$$

Attenzione al numero 240.0: siccome lo .0 finale non è necessario per specificare il posto delle altre cifre, quello non può essere un segna-posto. Quindi deve essere significativo.

Regola (versione 2)
Alle volte gli zeri all'inizio o alla fine di una scrittura decimale non sono significativi.

- Se rimuovere uno zero cambierebbe il numero, quello zero non è significativo.

- Se rimuovere uno zero non cambierebbe il numero, quello zero è significativo.

Nota
La regola per contare le cifre significative è da intendersi più come un consiglio di prudenza che come una norma ferrea. Se, per esempio, leggiamo sul giornale che 6000 persone hanno preso parte ad una manifestazione, è sensato credere che quel 6000 sia un'approssimazione, e che, magari, le persone erano in realtà 5784 o 6319. Insomma, è naturale pensare che solo il 6 sia significativo, mentre verosimilmente gli zeri sono frutto di un arrotondamento — appunto una cifra significativa, secondo la regola. Non è assicurato che sia così: è improbabile, ma possibile, che il giornalista volesse dire che esattamente 6000 persone hanno partecipato — contate come? —, ma, in quel caso, forse avrebbe fatto meglio a scrivere "esattamente 6000".

Non potendo sapere con assoluta sicurezza, conviene assumere l'interpretazione più probabile, che è anche la più sicura. Infatti, se considerassimo quel 6000 un numero esatto, e fossimo in errore, allora vedremmo un'informazione là dove non c'è — negli zeri del 6000 — e questo è gravissimo. Seguendo la regola, invece, al massimo rischiamo di scartare un po' di informazione buona, ma non di introdurne di falsa.

§7.2 Arrotondamenti

Quando si riduce il numero di cifre significative in una scrittura decimale, è necessario arrotondare l'ultima cifra significativa in modo tale da rendere il numero arrotondato più vicino possibile al valore esatto.

Per esempio, se stiamo arrotondando il numero 42.824 alla prima cifra dopo il punto decimale, possiamo arrotondare per difetto a 42.8, oppure per eccesso a 42.9. In questo caso è corretto scegliere l'arrotondamento per difetto, 42.8, perché, fra i due, è il più vicino al numero dato.

$$\begin{aligned} &42.8 \quad \leftarrow \text{approssimazione corretta} && \text{distanza} = 42.824 - 42.8 = 0.024 \\ &42.824 \\ &42.9 && \text{distanza} = 42.9 - 42.824 = 0.076 \end{aligned}$$

Se, invece, arrotondiamo 31.764, di nuovo alla prima cifra decimale, la situazione si inverte.

$$\begin{aligned} &31.7 && \text{distanza} = 31.764 - 31.7 = 0.064 \\ &31.764 \\ &31.8 \quad \leftarrow \text{approssimazione corretta} && \text{distanza} = 31.8 - 31.764 = 0.036 \end{aligned}$$

Regola
La regola da seguire in pratica è semplice: se la prima cifra troncata è 0…4 si arrotonda per difetto, se la prima cifra troncata è 5…9 per eccesso.

$$42.824 \xrightarrow{2 \text{ è } 0\ldots4} 42.8 \qquad 31.764 \xrightarrow{6 \text{ è } 5\ldots9} 31.8$$

Esercizio
Calcola la soluzione positiva dell'equazione

$$3.1 \cdot 10^{-3}\, x^2 + 1.2 \cdot 10^{2}\, x - 2.4 = 0$$

con due cifre significative di precisione.

Questo esercizio è stato costruito apposta per illustrare l'effetto devastante che può avere l'errore di lavorare con una precisione insufficiente nei passaggi intermedi.

Soluzione. Facciamo dapprima il calcolo in maniera molto precisa.

$$\underbrace{3.1 \cdot 10^{-3}}_{0.0031}\, x^2 + \underbrace{1.2 \cdot 10^{2}}_{120}\, x - 2.4 = 0$$

$$x = \frac{-120 + \sqrt{14\,400.02976}}{0.0062} = \frac{-120 + 120.00012399993\ldots}{0.0062} = 0.01999998\ldots$$

È chiaro che la risposta giusta, correttamente arrotondata, è 0.020. □

Studiamo, però, cosa sarebbe avvenuto se avessimo usato due sole cifre significative nei passaggi intermedi:

$$x = \frac{-120 + \sqrt{14\,000}}{0.0062} = \frac{-120 + 120}{0.0062} = 0 \qquad \text{OPS!}$$

Siccome questo esercizio presenta una situazione estrema, anche seguendo la regola generale di tenere due cifre significative in più di quelle desiderate avremmo ottenuto zero. Per ottenere un risultato diverso da zero, dobbiamo lavorare con non meno di sette cifre significative. Proviamo a ripetere il calcolo con sette:

$$x = \frac{-120 + \sqrt{14\,400.03}}{0.0062} = \frac{-120 + 120.0001}{0.0062} \approx 0.016$$

il risultato è ancora sbagliato, e solo lavorando con nove cifre otteniamo, finalmente, il risultato giusto

$$x = \frac{-120 + \sqrt{14\,400.0298}}{0.0062} = \frac{-120 + 120.000124}{0.0062} = 0.020$$

Nota importante (Morale)
Le sottrazioni fra numeri vicini $(120.000124 - 120)$ possono causare disastrose perdite di precisione. Quando ci si trova in una situazione come questa, è consigliabile usare, nei passaggi intermedi, la massima precisione di cui si può disporre.

Nota importante (Morale 2)
È utilissimo, permette di risparmiare tempo, e di evitare errori, usare le funzioni memoria delle calcolatrici, anziché scrivere e ri-inserire i risultati intermedi.

Nota (Curiosità)
Il procedimento seguente è pericoloso, ma avrebbe condotto al risultato giusto.

$$\underbrace{0.0031 \cdot x^2}_{\text{questo è piccolo: lo TRASCURO provvisoriamente}} + 120 \cdot x - 2.4 = 0$$

$$120 \cdot x - 2.4 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{2.4}{120} = 0.020$$

Constato che $0.0031 \cdot 0.020^2 \approx 0.000\,001\,2$ è effettivamente molto piccolo rispetto a $120 \cdot 0.020$ e a 2.4, quindi la scelta provvisoria di trascurare quel termine, a posteriori, è giustificata, pertanto il risultato ottenuto, $x = 0.020$, è accettabile.

§7.3 Esercizi

Test 34 (soluzione a p. 258)
Quante sono le cifre significative di 0.0308?

Test 35 (soluzione a p. 258)
Quante sono le cifre significative di 51 900?

Test 36 (soluzione a p. 258)
Quante sono le cifre significative di 51 900.0?

Test 37 (soluzione a p. 259)
Scrivi 0.035792 arrotondato a tre cifre significative.

§8 Trovare rapporti di numeri interi

Capita spesso, soprattutto negli esercizi di stechiometria, di ottenere da un calcolo un numero con la virgola e di sapere che quel numero, in realtà, è il rapporto di due interi piccoli. Il problema è questo:

> dato un numero arrotondato x, trovare la frazione $\frac{a}{b}$, ridotta ai minimi termini, tale che $\frac{a}{b} = x$.

Il fatto che x sia arrotondato è la difficoltà principale: dovremo cercare una frazione che sia compatibile con il dato, non una che lo riproduca esattamente.

§8.1 Livello 1: denominatori piccoli

Conviene avere in memoria le frazioni con denominatore fino a 5.

$$\frac{1}{2} = 0.5 \qquad \frac{1}{3} = 0.333\ldots \qquad \frac{1}{4} = 0.25 \qquad \frac{1}{5} = 0.2$$
$$\frac{2}{3} = 0.666\ldots \qquad \frac{3}{4} = 0.75 \qquad \frac{2}{5} = 0.4$$
$$\frac{3}{5} = 0.6$$
$$\frac{4}{5} = 0.8$$

Se la frazione cercata $\frac{a}{b}$ ha denominatore $b \leqslant 5$, la riconoscerai osservando la parte frazionaria di x, cioè quello che resta togliendo la parte intera.

Esempio ($x = 1.666$)

$$x = 1.666 = \underbrace{1}_{\text{parte intera}} + \underbrace{0.666}_{\text{parte frazionaria}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Esempio ($x = 2.498$)
Qui non riconosco 0.498, ma è facile che ci sia un errore di arrotondamento sull'ultima cifra. Conviene quindi assumere che il valore di x sia $2.500 \approx 2.498$, da cui

$$x = 2.500 = 2 + 0.5 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

L'alternativa sarebbe scrivere

$$x = \frac{2498}{1000} = \frac{1249}{500}$$

che è aritmeticamente corretto, però non semplifica affatto la scrittura di x — e non è quello che ci serve.

§8.2 Livello 2: reciproci

Se $0 < x < 1$, allora il numeratore a è più piccolo del denominatore b: anziché cercare $x = \frac{a}{b}$ conviene cercare $\frac{1}{x} = \frac{b}{a}$, che ha la parte intera diversa da zero.

Esempio ($x = 0.4286$)
Non riconosco questa parte frazionaria; provo allora a calcolare il reciproco:

$$\frac{1}{x} = 2.3332 = 2 + 0.3332 \approx 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

(la cifra in rosso è l'errore di arrotondamento che ci aspettiamo). Siccome $\frac{1}{x} = \frac{7}{3}$, deduciamo che

$$x = \frac{3}{7}$$

Importante: per verifica calcoliamo $\frac{3}{7} = 0.428571428\ldots$ e constatiamo che è compatibile con il dato $x = 0.4286$.

Esempio ($x = 0.7143$)

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{0.7143} = 1.400 = 1 + 0.4 = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{5}{7}$$

Verifica: $\frac{5}{7} = 0.714285\ldots$, compatibile con il dato.

§8.3 Livello 3: la combinazione vincente

Combiniamo le due tecniche precedenti. La parte frazionaria di x ha il medesimo denominatore di x stesso; d'altro canto una parte frazionaria è sempre compresa fra 0 e 1. È quindi garantito che la frazione corrispondente al numero

$$\frac{1}{\text{parte frazionaria di } x} = \frac{1}{x - \text{parte intera di } x}$$

è più semplice della frazione di x.

Esempio ($x = 2.3077$)
Calcoliamo

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{0.3077} = 3.2499 \approx 3.25 = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

(anche qui si tollera l'errore di arrotondamento). Da cui otteniamo l'equazione

$$\frac{1}{x-2} = \frac{13}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 2 + \frac{4}{13} = \frac{30}{13}$$

§8.4 Livello ninja: il metodo delle frazioni continue (fuori programma)

Siccome il trucco del livello 3 ci garantisce di semplificare il problema, se non riusciamo a concludere al primo tentativo possiamo semplicemente ripeterlo: prima o poi otterremo una frazione che riconosciamo.

Esempio ($x = 2.6957$)
Scriviamo $x_0 = 2.6957$ e calcoliamo, un passo alla volta,

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - 2} = \frac{1}{0.6957} = 1.4374 \qquad x_0 = 2 + \frac{1}{x_1}$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{0.4374} = 2.2862 \qquad x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - 2} = \frac{1}{0.2862} = 3.4941 \qquad x_2 = 2 + \frac{1}{x_3}$$

Noto che, probabilmente, $x_3 \approx 3.5 = \frac{7}{2}$ al netto dell'errore di arrotondamento già presente nel dato del problema. Assumendo $x_3 = \frac{7}{2}$ calcolo, usando le formule nella colonna a destra,

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{x_3}}} = 2 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{2}{7}}} = 2 + \frac{1}{1 + \dfrac{7}{16}} = 2 + \frac{16}{23} = \frac{62}{23}$$

Per verifica, $\frac{62}{23} = 2.69565217\ldots$ è compatibile con il dato $x = 2.6957$.

Nota
Perché, benché $x = 2.6957$ fosse dato con cinque cifre significative di precisione, abbiamo assunto che $x_3 = 3.4941$ fosse $\frac{7}{2} = 3.5$, tollerando un errore già alla terza cifra? La risposta è che questo procedimento, ad ogni passaggio, estrae un po' di informazione da x e la trasferisce nelle parti intere (2, 1, 2 nell'esempio) che serviranno, alla fine, per ricostruire la frazione. Ad ogni passaggio viene estratta grossolanamente una cifra di informazione, e ci aspettiamo quindi una corrispondente perdita di precisione nelle x_i: più o meno una cifra per passaggio.

Nota importante (circa le cifre significative)
La quantità di informazione contenuta in una frazione è misurata dal totale delle cifre fra numeratore e denominatore. Se intendiamo scoprire una frazione i cui termini sono numeri, diciamo, di due cifre, dobbiamo partire avendo non meno di quattro cifre di precisione nel dato. E, in realtà, ne serviranno almeno cinque per avere un risultato ragionevolmente affidabile.

§8.5 Esercizi

Esercizio 38 (soluzione a p. 259)
Ciascuno dei numeri seguenti è il valore arrotondato di una frazione di interi piccoli. Trova la frazione, ridotta ai minimi termini, e verifica la risposta.

(a) $x = 4.2000$ (b) $x = 0.3750$ (c) $x = 3.1429$ (d) $x = 1.4783$

Esercizio 39 (soluzione a p. 260)
239.6 mg di un ossido di ferro solido vengono integralmente decomposti, ad elevata temperatura, in ossigeno gassoso e ferro metallico solido. Di quest'ultimo si ottengono 167.7 mg. Stabilisci la formula dell'ossido di ferro.

Masse atomiche: Fe = 55.85 g/mol, O = 16.00 g/mol.

Esercizio 40 (soluzione a p. 261)
Un elemento X forma due composti clorurati di formula, rispettivamente, XCl_a e XCl_b. Nel primo composto l'elemento X è contenuto per il 22.545% in peso; nel secondo, l'elemento Cl è contenuto per lo 85.132% in peso. Tenendo presente che a e b sono due numeri interi piccoli, e che la massa atomica del cloro è nota, determina la massa atomica di X e la formula dei due composti.

Massa atomica: Cl = 35.453 g/mol.

Esercizio 41 (soluzione a p. 262)
Per un buon esercizio di matematica non c'è niente come cercare *sondaggi grande fratello* sul web. Il sito `www.tuttosulgossip.it`, alla domanda "chi è il tuo preferito?", riporta le percentuali seguenti:

Risposte	Statistiche
Anita Mazzotta	17.45%
Grazia Kendi	17.45%
Donatella Mercoledisanto	13.42%
Jonas Pepe	12.08%
Omer Elomari	7.38%
Giulia Soponariu	6.04%
Domenico D'Alterio	5.37%
Francesca Carrara e Simone De Bianchi	5.37%
Benedetta Stocchi	4.70%
Francesco Rana	4.70%
Matteo Azzali	3.36%
Giulio Carotenuto	2.68%

Se leggessi risultati del genere in uno studio serio avresti forti ragioni di sospetto: ci sono numerose percentuali identiche, e questo suggerisce che il numero degli individui coinvolti sia limitato.

Domanda: su quanti voti è basato questo sondaggio?

Suggerimento: parti dal 17.45%, cioè cerca $\frac{a}{b} = 0.1745$. Poi verifica che il denominatore b vada bene anche per le altre percentuali; se no correggilo, prova arrotondamenti diversi, e così via. Avrai finito quando potrai esprimere tutte le percentuali come frazioni con il medesimo denominatore: quello sarà la numerosità del campione.

§9 La teoria degli errori

Le cifre significative offrono un'idea rozza di quanto sia preciso un certo dato di origine sperimentale. La teoria degli errori permette di quantificare le incertezze di misura in modo preciso.

Nota importante
Gli errori di cui si parla sono le incertezze inevitabili nelle misure sperimentali. Gli sbagli e i guai derivanti da uno strumento guasto, o da una tecnica approssimativa, non sono oggetto della teoria degli errori.

Se scriviamo un dato sperimentale nella forma

$$\text{massa} = (42.84 \pm 0.03)\,\text{kg}$$

vogliamo dire che siamo incerti sul valore, in questo caso, della massa, però sappiamo che questo valore è probabilmente compreso fra $(42.84 - 0.03)\,\text{kg}$ e $(42.84 + 0.03)\,\text{kg}$.

Quindi la scrittura precedente significa

$$\text{“probabilmente } 42.81\,\text{kg} \leqslant \text{massa} \leqslant 42.87\,\text{kg”}$$

Chiameremo l'intervallo $42.81 \leqslant \ldots \leqslant 42.87$ (o, più formalmente, $[42.81, 42.87]$) intervallo di incertezza (altri nomi: intervallo di fiducia, i. di errore).

Nota
Nelle formule precedenti, l'unità di misura kg si comporta, algebricamente, come se fosse una variabile moltiplicata per i valori numerici. Per questa ragione, preferisco scrivere $(42.84 \pm 0.03)\,\text{kg}$ anziché $42.84 \pm 0.03\,\text{kg}$, per indicare che l'unità kg si applica sia al valore 42.84 sia all'errore 0.03. Se non c'è rischio di ambiguità, tuttavia, entrambe le scritture sono ammissibili.

Definizione (errore assoluto)
La scrittura

$$x = x_0 \pm \delta x$$

significa

$$\text{“probabilmente } x_0 - \delta x \leqslant x \leqslant x_0 + \delta x\text{”}$$

La quantità δx si chiama errore assoluto di x e l'intervallo $[x_0 - \delta x,\, x_0 + \delta x]$ si chiama intervallo di incertezza di x.

Nota
Abbiamo usato la parola "probabilmente". Non è impossibile specificarne in maniera esatta il significato, ma, per farlo, servono conoscenze che si studieranno in maggior dettaglio nella parte del corso dedicata alla statistica.

Esempio
Nella scrittura raggio $= (41.4 \pm 0.2)\,\text{cm}$

- l'errore assoluto è $0.2\,\text{cm}$;
- l'intervallo di incertezza è: $\underbrace{41.2}_{41.4-0.2}\ \text{cm} \leqslant \text{raggio} \leqslant \underbrace{41.6}_{41.4+0.2}\ \text{cm}.$

La formula della definizione

$$x = x_0 \pm \delta x \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 - \delta x \leqslant x \leqslant x_0 + \delta x$$

permette di passare dall'errore assoluto all'intervallo di incertezza. Viceversa, se conosciamo un intervallo di incertezza $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, possiamo ricavare la scrittura $x = x_0 \pm \delta x$ dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} \alpha = x_0 - \delta x \\ \beta = x_0 + \delta x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2x_0 \\ \beta - \alpha = 2\delta x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ \delta x = \dfrac{\beta-\alpha}{2} \end{cases}$$

Abbiamo quindi stabilito la formula per il passaggio inverso

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{\alpha+\beta}{2} \pm \frac{\beta-\alpha}{2}$$

Come vedremo, questa formula si usa per calcolare δx; tuttavia spesso è conveniente calcolare x_0 in altro modo.

Nota
La parola "assoluto" nella locuzione "errore assoluto" non è lì per rendere il linguaggio più pomposo, e così incutere soggezione nella plebe ignorante. Semplicemente, introdurremo in futuro il concetto di "errore relativo", e la parola serve quindi a non far confusione.

§9.1 La propagazione degli errori

Va da sé che un risultato basato su dati incerti è, a sua volta, affetto da incertezza. In altri termini gli errori sui dati si propagano attraverso i calcoli e generano un errore sul risultato. Ci sono varie regole per tener conto di questa propagazione, ma tutte discendono dalla seguente.

Regola (delle regole, della propagazione degli errori)
L'intervallo di incertezza sul risultato ha come estremi il minimo e il massimo valore ottenibile al variare dei dati nei loro rispettivi intervalli di incertezza.

Esercizio
Sapendo che $x = 4.0 \pm 0.4$, calcola $y = x + \sqrt{x}$.

Soluzione. Innanzitutto, se non ci fossero di mezzo le incertezze, avremmo semplicemente $x_0 = 4.0$ quindi $y_0 = x_0 + \sqrt{x_0} = 4 + \sqrt{4} = 6$. La risposta all'esercizio sarà quindi del tipo $y = 6 \pm \delta y$, e noi dobbiamo determinare l'errore assoluto δy.

L'intervallo di incertezza di x è $\underbrace{3.6}_{4.0-0.4} \leqslant x \leqslant \underbrace{4.4}_{4.0+0.4}$: studiamo $x + \sqrt{x}$ al variare di x in questo intervallo.

x	3.6	4.0	4.4
$x + \sqrt{x}$	5.497	6.000	6.498

Seguiamo la regola generale di tenere, nei passaggi intermedi, qualche cifra in più.

Come si vede, y varia nell'intervallo di incertezza $\underbrace{5.497}_{\alpha} \leqslant y \leqslant \underbrace{6.498}_{\beta}$. Otteniamo quindi

$$\delta y = \frac{\beta - \alpha}{2} = 0.5005 \qquad y = 6.000 \pm 0.5005$$

Si pone ora questo problema: a che cifra è opportuno arrotondare il risultato?

Regola (di arrotondamento)
Le incertezze si arrotondano a una cifra significativa. Con una eccezione: se questa cifra è un 1, allora conviene arrotondare a due cifre significative.

I valori affetti da incertezza si arrotondano alla medesima posizione decimale dell'errore assoluto corrispondente (es. se l'errore assoluto è arrotondato alla cifra dei centesimi, anche il valore deve essere arrotondato alla cifra dei centesimi).

Nota
Le una o due cifre significative dell'incertezza sono una regola *di massima*, ossia, secondo le circostanze, può essere ammesso, corretto, ragionevole o anche necessario deviare da questa regola. In assenza di ragioni precise, però, conviene seguirla.

D'altro canto, il fatto che errore assoluto e valore si arrotondano alla medesima posizione decimale non ammette eccezioni.

Alla luce di questa regola, δy va arrotondato a 0.5, ossia ai decimi, di conseguenza anche y va arrotondato ai decimi, dando 6.0. La risposta è quindi

$$y = 6.0 \pm 0.5$$

□

Nota
Se, anziché calcolare il valore 6.0 di y in maniera diretta, avessimo usato la formula $y_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$, avremmo ottenuto

$$y_0 = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{5.497+6.498}{2} = 5.998$$

e questo valore, arrotondato alla cifra dei decimi, fa proprio 6.0. È consigliabile però seguire il metodo diretto, se non altro perché funge da controllo sul calcolo dell'errore: se il valore calcolato direttamente non viene al centro dell'intervallo di incertezza, allora qualcosa non va.

§9.2 Giustificazione della regola di arrotondamento

Ai fini del corso non è necessario sapere questa giustificazione: è soltanto necessario APPLICARE CORRETTAMENTE LA REGOLA. Però questo discorso può aiutare a capire le cose.

Se qualcuno ci dicesse che la massa di un campione è

$$M = (25.000 \pm 0.314)\,\mathrm{g}$$

dovremmo credergli? Questa persona ci starebbe dicendo che i valori di M compresi fra 24.686 g e 25.314 g — una escursione di oltre mezzo grammo — sono plausibili, ma aggiungi un milligrammo e 25.315 no, questo valore è implausibile. Non è realistico che la massa M sia incerta nell'arco di oltre 600 milligrammi, ma questo stesso errore sia noto al milligrammo.

Per quanto, forse, l'idea di sapere molto esattamente di non sapere qualcosa sarebbe potuta piacere a Socrate, viene da chiedersi come faccia il nostro sperimentatore a essere tanto certo a proposito di una cosa su cui è tanto incerto. Conviene diffidare, ma, se anche fosse, conoscere l'incertezza con tanta precisione non servirebbe a molto.

All'atto pratico, sarà possibile e desiderabile sapere l'incertezza con una precisione commisurata all'incertezza stessa — se sono incerto di qualche grammo, potrò stimare di quanto sono incerto al grammo — e questa è appunto la definizione di avere una cifra significativa. Non dilunghiamoci sull'eccezione per l'uno: serve per evitare alcuni casi in cui l'errore di arrotondamento sarebbe eccessivo.

L'errore sulla nostra massa va quindi espresso come ± 0.3 g, ma perché il valore della massa va poi indicato come 25.0 g? I valori plausibili per questa massa sono quelli compresi fra 24.7 g e 25.3 g. Per esempio

M potrebbe essere 24.73 g o 24.89 g o 25.17 g. Cosa si può dire a proposito delle cifre di questi valori?

- la cifra delle decine di grammi: è 2;
- la cifra dei grammi: è 4 o 5;
- la cifra dei decigrammi: può essere $7, 8, 9, 0, 1, 2, 3$;

- la cifra dei centigrammi: boh? può essere qualunque cifra.

Fino alla cifra a cui è stato arrotondato l'errore può, concepibilmente, essere ancora contenuta informazione utile, le successive, però, sono essenzialmente prese a caso. Per questo la regola dice di arrotondare alla medesima cifra dell'incertezza.

§9.3 Propagazione: primi esercizi

Esercizio
Calcola $x - y$ sapendo che $x = 7.6 \pm 0.4$ e $y = 1.4 \pm 0.2$.

Soluzione. Gli intervalli di incertezza sono

$$\text{per } x, \quad \underbrace{7.2}_{7.6-0.4} \leqslant x \leqslant \underbrace{8.0}_{7.6+0.4} \quad (\text{ossia } x \in [7.2, 8.0])$$
$$\text{per } y, \quad \underbrace{1.2}_{1.4-0.2} \leqslant y \leqslant \underbrace{1.6}_{1.4+0.2} \quad (\text{ossia } y \in [1.2, 1.6])$$

Qual è il minimo valore possibile per $x - y$? Per far sì che $x - y$ sia più piccolo possibile, dobbiamo partire dalla x più piccola e sottrarre la y più grande: $7.2 - 1.6 = 5.6$.

Analogamente, otterremo il massimo di $x - y$ sottraendo la y più piccola dalla x più grande: $8.0 - 1.2 = 6.8$. Abbiamo così ottenuto l'intervallo di incertezza

$$5.6 \leqslant x - y \leqslant 6.8$$

Procedendo come nell'esercizio precedente

$$x - y = 6.2 \pm \frac{6.8 - 5.6}{2} = 6.2 \pm 0.6$$

□

Nota
Può capitare che non sia facile ragionare su quale combinazione dei dati dia il minimo e quale il massimo risultato. Nei casi di difficoltà conviene calcolare i risultati corrispondenti a tutte le combinazioni degli estremi degli intervalli di incertezza dei dati, per poi vedere quali dei valori ottenuti siano il massimo e il minimo.

La regola delle regole permette sempre di propagare le incertezze correttamente, però, nei casi più frequenti, c'è modo di eseguire i calcoli in maniera più spedita.

§9.4 Somme algebriche

Regola (somme algebriche)
Se $x = x_0 \pm \delta x$ e $y = y_0 \pm \delta y$, allora

$$x + y = x_0 + y_0 \pm (\delta x + \delta y)$$
$$x - y = x_0 - y_0 \pm (\delta x + \delta y)$$

Questa regola, per esempio, permette di risolvere senza fatica l'esercizio precedente.

Esempio
Calcoliamo $x - y$ sapendo che $x = 7.6 \pm 0.4$ e $y = 1.4 \pm 0.2$.

$$x - y = x_0 - y_0 \pm (\delta x + \delta y) = 7.6 - 1.4 \pm (0.4 + 0.2) = 6.2 \pm 0.6$$

Nota importante
Quando si calcola l'errore su una differenza gli errori si sommano, non si sottraggono!

§9.5 L'errore relativo

Per parlare di prodotti e quozienti conviene introdurre l'errore relativo.

Definizione (errore relativo)
L'errore relativo su una grandezza $x = x_0 \pm \delta x$ è il numero $\dfrac{\delta x}{x_0}$. Usualmente, si indica l'errore relativo in forma percentuale

$$x = x_0 \pm \left(\frac{\delta x}{x_0} \cdot 100 \right) \%$$

La medesima incertezza si può indicare come errore assoluto e come errore relativo.

ERRORE ASSOLUTO		ERRORE RELATIVO
$x = x_0 \pm \delta x$	$\longrightarrow$	$x = x_0 \pm \left(\dfrac{\delta x}{x_0} \cdot 100 \right) \%$
$x = x_0 \pm \dfrac{\alpha \cdot x_0}{100}$	$\longleftarrow$	$x = x_0 \pm \alpha\%$

Esempi.

$$(120 \pm 6)\,\mathrm{m} \longrightarrow (120 \pm \underbrace{5}_{6\cdot 100/120}\,\%)\,\mathrm{m}$$

$$(30.0 \pm 2\%)\,\mathrm{V} \longrightarrow (30.0 \pm \underbrace{0.6}_{2\cdot 30/100})\,\mathrm{V}$$

$\cancel{(37 \pm 5\%)\,°\mathrm{C}}$ NON HA SENSO!

Nota importante
Gli errori relativi non hanno senso applicati a misure basate su uno zero convenzionale (es. °C, ora del giorno).

Regola (prodotti e quozienti)
Se $x = x_0 \pm \alpha\%$ e $y = y_0 \pm \beta\%$, allora

$$x \cdot y = x_0 \cdot y_0 \pm (\alpha + \beta)\%$$
$$x/y = x_0/y_0 \pm (\alpha + \beta)\%$$

Esempio
Se $x = 7.0 \pm 2\%$ e $y = 5.0 \pm 1\%$, quanto valgono $x \cdot y$ e x/y?

$$x \cdot y = \underbrace{35.0}_{7.0\cdot 5.0} \pm \underbrace{3}_{2+1}\,\% \qquad \frac{x}{y} = \underbrace{1.40}_{7.0/5.0} \pm \underbrace{3}_{2+1}\,\%$$

Esempio
Se $x = 2.32 \pm 0.04$ e $y = 10.2 \pm 0.3$, quanto vale x/y con l'errore relativo?

Per poter applicare la regola, convertiamo gli errori assoluti in relativi:

$$x = 2.32 \pm 1.7241\% \qquad y = 10.2 \pm 2.9412\%$$

Chiaramente $x/y = 0.227451 \pm (1.7241\% + 2.9412\%) = 0.227451 \pm 4.6653\%$, ma come si arrotonda?

Applicando la regola di pagina 51, l'errore relativo si arrotonda a una cifra significativa, quindi $\pm 5\%$. Per il valore centrale, sempre secondo la regola, dobbiamo calcolare l'errore assoluto e decidere in base a quello; abbiamo quindi:

$$x/y = 0.227451 \pm 4.6653\% = 0.227451 \pm \underbrace{0.010611}_{\frac{4.6653\cdot 0.227451}{100}} = 0.227 \pm 0.011 = 0.227 \pm 5\%$$

§9.6 Riassunto delle regole

Abbiamo enunciato regole per la propagazione degli errori in somme e prodotti. Da quest'ultima si può desumere una regola per le potenze — poiché le potenze sono prodotti ripetuti — e dalla regola per le potenze una per le radici ($\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$). In definitiva si giunge allo specchietto seguente.

$$\begin{aligned}(x_0 \pm \delta x) + (y_0 \pm \delta y) &= (x_0 + y_0) \pm (\delta x + \delta y)\\ (x_0 \pm \delta x) - (y_0 \pm \delta y) &= (x_0 - y_0) \pm (\delta x + \delta y)\end{aligned} \qquad + \text{ e } -\text{: si sommano gli errori assoluti}$$

$$\begin{aligned}(x_0 \pm \alpha\%) \cdot (y_0 \pm \beta\%) &= (x_0 \cdot y_0) \pm (\alpha + \beta)\%\\ (x_0 \pm \alpha\%) \,/\, (y_0 \pm \beta\%) &= (x_0 \,/\, y_0) \pm (\alpha + \beta)\%\end{aligned} \qquad \cdot \text{ e } /\text{: si sommano gli errori relativi}$$

$$(x_0 \pm \alpha\%)^n = x_0^n \pm (n \cdot \alpha)\%$$

$$\sqrt[n]{x_0 \pm \alpha\%} = \sqrt[n]{x_0} \pm \frac{\alpha}{n}\%$$

$$(x_0 \pm \delta x) \cdot k = x_0 \cdot k \pm \delta x \cdot |k|$$

Nota importante
Queste regole hanno una limitazione importante: i due termini delle operazioni aritmetiche devono essere indipendenti. In pratica, se i due termini di un'operazione dipendono da una stessa grandezza affetta da incertezza, allora non è garantito che le formule dello specchietto si applichino a quell'operazione.

Il ruolo dell'indipendenza si capisce bene dall'esercizio seguente.

Esercizio
Sapendo che $x = 4.0 \pm 0.4$, calcola $y = x - \sqrt{x}$.

Soluzione. Risolviamo, intanto, l'esercizio con il metodo dell'intervallo di incertezza, che funziona sempre. Questo procedimento è molto simile ad uno già visto. Per la x abbiamo $3.6 \leqslant x \leqslant 4.4$.

x	3.6	4.0	4.4
$x - \sqrt{x}$	1.703	2.000	2.302

Quindi

$$y = 2.000 \pm \frac{2.302 - 1.703}{2} = 2.0 \pm 0.3$$

□

In questo caso, usare le formule dello specchietto sarebbe un procedimento subottimale — non è corretto, ma produce una stima dell'errore che è più grande di quella giusta (e chiaramente soprastimare l'errore è meglio che sottostimarlo).

PROCEDIMENTO SUBOTTIMALE (sbagliato ma non troppo)

$$x - \sqrt{x} = (4.0 \pm 0.4) - \sqrt{4.0 \pm \underbrace{0.4}_{\pm 10\%}} = (4.0 \pm 0.4) - (2.0 \pm \underbrace{5\%}_{\pm 0.1}) = 2.0 \pm 0.5 \qquad !?!$$

L'errore che ci è venuto non è insensato, ma è un po' più grande del valore giusto 0.3. Perché? Il fatto è, appunto, che le formule per somme e prodotti sono valide sotto l'ipotesi di indipendenza. Nel nostro caso, la stessa x compare nei due addendi di $x - \sqrt{x}$, e questo dà luogo ad un fenomeno di compensazione: se, per esempio, la x è soprastimata, anche $\sqrt{x}$ verrà soprastimata, e nella differenza $x - \sqrt{x}$ un errore compensa l'altro.

Per fortuna, le nostre formule errano, al più, dal lato della prudenza, ossia, usate impropriamente, possono solo produrre una stima dell'incertezza maggiore di quella corretta.

§9.7 Problema inverso

Finora abbiamo propagato le incertezze dei dati fino al risultato. Quando uno pianifica come intenda eseguire una misura, occorre invece seguire il percorso opposto: nota la massima incertezza che possiamo permetterci sul risultato, vogliamo determinare quanto debbano essere accurate le nostre misure. Per questo scopo, la regola delle regole — il metodo dell'intervallo di incertezza — è solitamente meno utile, mentre le regole di propagazione sono facili da usare a marcia indietro: si lasciano indicati gli errori sui dati — che non abbiamo ancora misurato! — e, essendo fissato l'errore sul risultato, si ottiene un'equazione.

Esercizio
Un foglio rettangolare è grossolanamente alto 30 cm e largo 20 cm. Con quale errore assoluto δ devi misurare queste lunghezze se intendi determinare l'area del foglio con un errore di $\pm 1\,\mathrm{cm}^2$?

Soluzione. Calcoliamo, in maniera algebrica, in che modo l'errore sull'area (quello che vogliamo sia $1\,\mathrm{cm}^2$) dipende dall'errore δ sulle lunghezze a, b dei due lati.

$$\begin{aligned} A = \underbrace{(a \pm \delta)}_{\pm \frac{\delta}{a}\cdot 100\%} \cdot \underbrace{(b \pm \delta)}_{\pm \frac{\delta}{b}\cdot 100\%} &= a \cdot b \pm \left(\frac{\delta}{a} \cdot 100 + \frac{\delta}{b} \cdot 100 \right) \% \\ &= a \cdot b \pm \left(\frac{\delta}{a} + \frac{\delta}{b} \right) \cdot ab \\ &= a \cdot b \pm (\delta b + \delta a) = a \cdot b \pm \delta \cdot (a + b) \end{aligned}$$

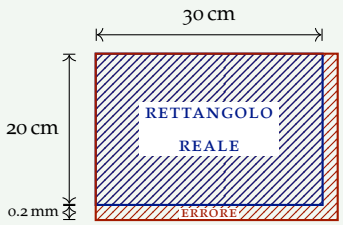
Abbiamo quindi che l'errore ($1\,\mathrm{cm}^2$) deve essere $\delta \cdot (a + b)$.

$$\delta \cdot (a + b) = 1\,\mathrm{cm}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \delta = \frac{1\,\mathrm{cm}^2}{\underbrace{a + b}_{20\,\mathrm{cm} + 30\,\mathrm{cm}}} \approx \frac{1\,\mathrm{cm}^2}{50\,\mathrm{cm}} = 0.2\,\mathrm{mm}$$

Ora, i lati del rettangolo sono noti con una cifra di precisione, abbiamo quindi determinato l'errore richiesto con una cifra di precisione, che è proprio la precisione desiderata secondo la regola generale per le incertezze. □

Osservazione

Se ci immaginiamo l'effetto di un errore di 0.2 mm sull'area, vediamo che può aggiungere una strisciolina larga 0.2 mm e lunga $(20 + 30)$ cm. L'area di questa strisciolina è appunto $50\,\text{cm} \cdot 0.2\,\text{mm}$ ossia $1\,\text{cm}^2$.



§9.8 Determinazione delle incertezze in un esperimento

Ci sono tre tipi di errori in cui si può incorrere nel contesto di una misura strumentale.

- Sbagli — strumento guasto, adoperato male, &c. Come già detto questi non interessano la teoria degli errori.
- Errori sistematici — termometro che legge 2 gradi sotto la temperatura corretta, bilancia starata, e, in generale, tutti i casi in cui la grandezza misurata differisce da quella reale per un certo scarto costante.

  Nella teoria, assumiamo che gli errori sistematici siano già stati identificati ed eliminati, per esempio aggiungendo due gradi alle letture di quel termometro, sottraendo la tara, &c. Conviene, tuttavia, tenere a mente che gli errori sistematici si manifestano frequentemente.
- Errori casuali inevitabili — causati dagli attriti nei meccanismi, rumore nei circuiti elettronici, difficoltà di stimare la posizione esatta del menisco in un cilindro graduato, &c. Questi sono l'oggetto della teoria.

Alle volte conosciamo immediatamente l'incertezza di una misura. Per esempio, se misuriamo una distanza con un righello, o con un metro, possiamo assumere che l'errore assoluto di questa misura coincida con la distanza fra due tacche successive della scala (un'altra scelta ragionevole, in questa situazione, sarebbe la *semi*distanza). Un altro esempio è quando usiamo uno strumento calibrato o certificato per fornire una determinata accuratezza — occhio: il fatto che, per esempio, un termometro digitale ci mostri la cifra dei decimi di grado NON GARANTISCE che la misura fatta sia accurata entro ± 0.1 K o meno!

Avviene, tuttavia, che non ci sia modo di conoscere l'incertezza di una misura sperimentale se non ricorrendo, a sua volta, all'esperimento: ripetendo la misura e osservando la dispersione dei risultati. In questo caso servono alcune nozioni di statistica: ce ne occuperemo nel capitolo 19.

§9.9 Esercizi

Test 42 (soluzione a p. 263)
Converti in errore relativo 24 ± 1.

Test 43 (soluzione a p. 263)
Converti $60.0 \pm 2\%$ in errore assoluto.

Test 44 (soluzione a p. 264)
Calcola $(10.0 \pm 0.3) - (5.0 \pm 0.1)$ con l'errore assoluto.

Test 45 (soluzione a p. 264)
Calcola $(20.0 \pm 0.4) \cdot (7.5 \pm 0.3)$ indicando l'errore assoluto.

Test 46 (soluzione a p. 264)
Calcola $(10.0 \pm 0.2)/(5.0 \pm 0.1)$ con l'errore assoluto.

Test 47 (soluzione a p. 264)
Calcola $(2.00 \pm 0.02)^2$ indicando l'errore assoluto.

Esercizio 48 (soluzione a p. 265)
La formula che lega il periodo di oscillazione T di un pendolo alla lunghezza L del medesimo è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

dove $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ rappresenta l'accelerazione di gravità. Calcola il periodo di oscillazione di un pendolo lungo $(100.0 \pm 1.0)\,\mathrm{cm}$. Scrivi il risultato in millisecondi, indicando l'errore assoluto.

Esercizio 49 (soluzione a p. 266)
L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga $50\,\mathrm{cm} \pm 2\%$ e un cateto $30\,\mathrm{cm} \pm 5\%$. Calcola il secondo cateto indicando l'errore percentuale.

Esercizio 50 (soluzione a p. 266)
Un tecnico dispone di un cilindro graduato con l'accuratezza di $\pm 0.5\,\mathrm{mL}$ e di una bilancia che ha un'accuratezza di $\pm 100\,\mathrm{mg}$. Egli determina la densità di un liquido misurandone $10\,\mathrm{mL}$, che risultano pesare $9.2\,\mathrm{g}$.

1. Determina la densità del liquido in $\mathrm{kg/L}$, indicando l'errore percentuale.
2. Che volume di liquido dovrebbe misurare il tecnico per avere un errore di $\pm 2\%$ sulla densità?

Esercizio 51 (soluzione a p. 267)
Il coefficiente di dilatazione termica del rame è di 16.5 parti per milione per kelvin (ossia, scaldando un campione di rame lungo un metro di un grado, questo si allunga di 16.5 µm). Una barra di rame è lunga (2000.00 ± 0.05) mm alla temperatura di (25.0 ± 0.5) °C. Portata ad una certa temperatura T, misura (2001.45 ± 0.05) mm. Determina T, indicando l'errore assoluto.

Esercizio 52 (soluzione a p. 268)
Uno sperimentatore dispone di un cilindro graduato avente l'accuratezza di ±0.5 mL. Con questo strumento, misura 40.0 mL di una soluzione (0.450 ± 0.005) molare di NaOH. Egli aggiunge, poi, acqua distillata fino a portare il livello della soluzione nel cilindro a 60.0 mL. Determina la molarità della soluzione risultante, indicando l'errore assoluto su questo risultato.

Esercizio 53 (soluzione a p. 269)
Partendo da (33.0 ± 0.5) mL di una soluzione (0.050 ± 0.001) molare di NaCl, aggiungiamo acqua distillata fino a ottenere (100.0 ± 0.5) mL di soluzione. Calcolane la molarità indicando l'errore assoluto. Il risultato cambierebbe se partissimo da (67.0 ± 0.5) mL di acqua distillata e aggiungessimo la soluzione (0.050 ± 0.001) molare di NaCl fino a raggiungere (100.0 ± 0.5) mL?

Esercizio 54 (soluzione a p. 271)
Una capsula ha la forma di un corpo centrale cilindrico terminato, su ciascuna delle basi, da una semisfera. Il diametro del cilindretto, e, di conseguenza, delle due semisfere, è (7.0 ± 0.2) mm, mentre la sua lunghezza è (17.0 ± 0.5) mm. Determina il volume della capsula in mL indicando l'errore relativo.

Esercizio 55 (soluzione a p. 272)
Si vuole preparare una soluzione di NaOH con la concentrazione di 0.2000 moli per litro di soluzione. Per farlo, si riempie un matraccio tarato da (100.00 ± 0.08) mL con l'opportuna quantità di NaOH, pesata usando una bilancia che ha l'accuratezza di ±0.01 g, e acqua distillata. Una mole di NaOH pesa 39.9971 g.

1. Quanti grammi di soluto è necessario pesare?
2. Che errore assoluto abbiamo sulla concentrazione della soluzione?
3. Usando una bilancia più precisa, sarebbe possibile ottenere un errore di ±0.0001 moli al litro?

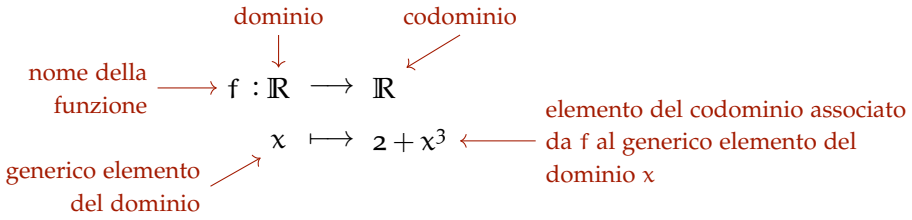
Esercizio 56 (soluzione a p. 273)
Si desidera preparare una soluzione di NaCl alla concentrazione di 9 g/L, con un errore non superiore a ± 0.2 g/L. Allo scopo, si scioglie l'opportuna quantità di sale per formare 100 mL di soluzione, misurati con un cilindro graduato avente l'accuratezza di ± 0.5 mL. Determina il massimo errore assoluto tollerabile sul peso del soluto.

Esercizio 57 (soluzione a p. 274)
Si possiede una soluzione (0.1000 ± 0.0005) molare di NaCl. Si vorrebbero preparare $3.50 \cdot 10^{-2}$ moli di NaCl con una tolleranza massima di 0.5 millimoli. Che volume di soluzione è necessario misurare, e qual è la massima tolleranza ammessa su questa misura?

§10 Funzioni & grafici

Una funzione è una legge che associa, ad ogni elemento di un insieme detto dominio della funzione, un ben preciso elemento di un altro insieme detto codominio.

Esempio
La funzione



è la legge che associa ad ogni numero reale x — il dominio è l'insieme $\mathbb{R}$ — il numero reale $2 + x^3$ — anche il codominio è $\mathbb{R}$.

La disposizione tipografica degli elementi

$$\begin{aligned}[\text{nome della funzione}] : [\text{dominio}] &\longrightarrow [\text{codominio}] \\ [\text{variabile}] &\longmapsto [\text{espressione associata}]\end{aligned}$$

è un modo formale, preciso, di descrivere una funzione, non è un'accozzaglia di simboli in ordine sparso. Se si intende specificare una funzione con questa simbologia, quindi, va fatto esattamente come indicato qua sopra.

Spesso parleremo di funzioni che hanno come dominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, o un suo sottoinsieme, e come codominio ancora l'insieme $\mathbb{R}$. Quando è chiaro dal contesto quali siano dominio e codominio, possiamo descrivere una funzione semplicemente con un'espressione come

$$f(x) = 2 + x^3 \qquad \text{"f di x è } 2 + x^3\text{"}$$

Similmente, nota questa funzione f, possiamo voler esprimere il fatto che f associa all'elemento del dominio 3 l'elemento del codominio 29 (ossia $2 + 3^3 = 29$). Questo si fa con l'espressione

$$f(3) = 29 \qquad \text{"f di 3 è 29"}$$

Nuovamente: le espressioni matematiche sono *formali*. Dire che f di 3 è 29 o che f di 29 è 3 non è uguale!

Nota
Tuttavia alcuni specifici abusi della notazione sono comuni, e si possono commettere quando non c'è rischio di confondersi. Per esempio a volte si scrive

"la funzione $f(x)$"	e sarebbe corretto	"la funzione f"
$\sin 30°$	"	$\sin(30°)$
$\cos^2 7$	"	$(\cos(7))^2$

Nel dubbio, conviene utilizzare la forma pedante.

Una funzione non deve necessariamente possedere una espressione di natura algebrica. Per esempio, i valori assunti da una funzione (quindi la funzione stessa) potrebbero essere determinati sperimentalmente, o stabiliti per convenzione, e dati in forma grafica o tabulare.

Esempio
- la funzione che associa un punto della Terra alla sua quota sul livello del mare — definita sperimentalmente;
- la funzione che associa ad ogni data il giorno della settimana corrispondente — definita per convenzione;
- sarebbe SBAGLIATO parlare della funzione che associa ad x il numero y tale che $y^2 = x$ — infatti questo numero non è determinato univocamente: a 4 si potrebbe associare sia 2 sia -2.

§10.1 Rappresentazioni di funzioni

Il modo più immediato di rappresentare una funzione f è forse una tabella che elenca, per ogni valore di x ritenuto interessante, il corrispondente valore di $f(x)$.

Esempio
La funzione $f(x) = 1 + x^2$ può dar luogo alla tabella

x	-1	-0.5	0	0.5	1	2	100
$f(x)$	2	1.25	1	1.25	2	5	$10\,001$

Per quanto semplice, questa rappresentazione non determina f univocamente: come fare se il valore di x che ci interessa non è fra quelli tabulati? Vedremo come ovviare, in parte, a questo inconveniente quando parleremo di interpolazione lineare. Ad ogni modo, avendo qualche informazione sulla forma di $f(x)$, può darsi che si riesca a ricostruire la funzione da una tabella.

Esercizio
Data la tabella

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	1.5	4	7.5	12

e sapendo che la funzione f è della forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, determina l'espressione di f.

Soluzione. Dobbiamo determinare le tre costanti a, b, c: ci aspettiamo, quindi, di dover sfruttare tre condizioni. Possiamo provare con:

$$\left.\begin{aligned} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c &= f(0) = 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c &= f(2) = 4 \\ a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c &= f(4) = 12 \end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} c = 0 \\ a \cdot 4 + b \cdot 2 + c = 4 \\ a \cdot 16 + b \cdot 4 + c = 12 \end{cases}$$

A sinistra: le uguaglianze sono vere per via della forma di f, e i valori $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$ sono letti dalla tabella.

Risolvendo il sistema otteniamo

$$a = \tfrac{1}{2} \qquad b = 1 \qquad c = 0 \qquad \implies \qquad f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + x$$

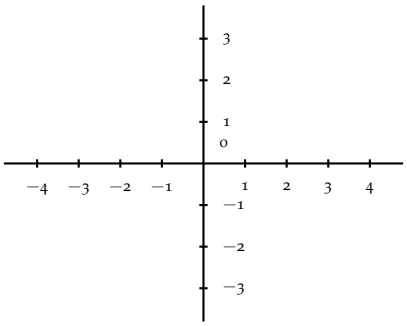
□

Nota importante
È ora importante verificare questo risultato ricostruendo la tabella dei valori di f a partire dalla formula che abbiamo trovato. Una discrepanza indicherebbe un errore.

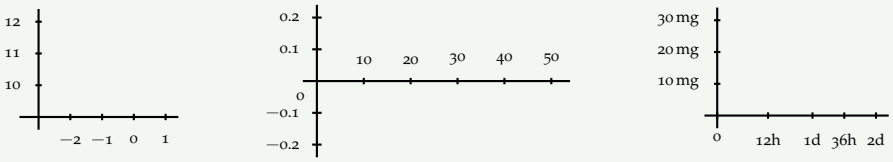
Nota
Abbiamo scelto di scrivere le tre condizioni necessarie per trovare i coefficienti usando i valori tabulati per f in 0, 2, 4. Matematicamente, astrattamente, qualunque terna di valori sarebbe stata adatta allo scopo (per esempio 0, 1, 2). Tuttavia, in pratica, è buona norma usare valori più distanti possibile fra loro, per minimizzare l'impatto degli errori di arrotondamento e delle eventuali incertezze di misura nei dati tabulati.

§10.2 Grafici

Considerando due assi ortogonali e graduati secondo la distanza da un certo punto fissato, si ottiene, come è ben noto, un diagramma cartesiano.



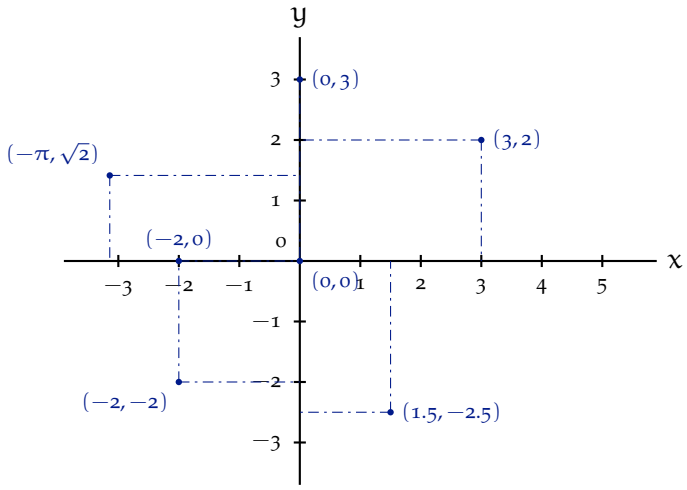
Nota
Nulla obbliga lo zero a trovarsi nel punto di incontro degli assi, né gli assi ad essere graduati nella medesima unità.



Alcuni diagrammi cartesiani.

Un asse è tipicamente rappresentato orizzontalmente e detto asse delle ascisse; l'altro, disposto verticalmente, si chiama asse delle ordinate.

Un diagramma cartesiano ci permette di assegnare ad ogni punto del piano un nome, che è la coppia di valori che si leggono in corrispondenza delle proiezioni del punto rispettivamente — in quest'ordine! — sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate.



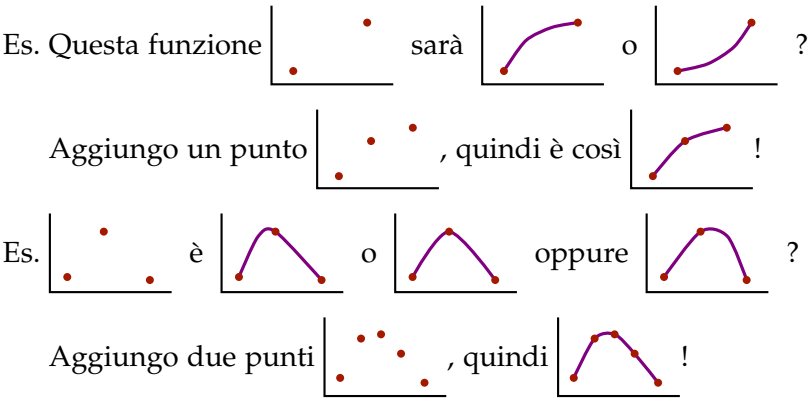
Viceversa, ogni coppia di valori è rappresentata da un punto del diagramma.

Definizione (grafico di una funzione)
Il grafico di una funzione f è costituito da tutti i punti del tipo $\big(x, f(x)\big)$.

Se fosse possibile disegnare tutti gli infiniti punti $\big(x, f(x)\big)$ il loro insieme formerebbe, solitamente, una linea, che è il grafico di f. In pratica, ci si deve limitare al calcolo di una quantità finita di punti, che poi si congiungono tracciando una linea che, ragionevolmente, dovrebbe seguire il vero grafico (teorico).

§10.3 Come si disegna un grafico in pratica?

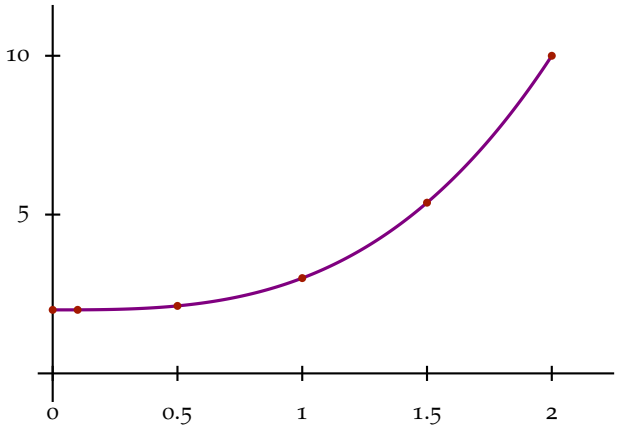
1. Calcolo il valore della funzione in alcuni (pochi) punti per capire come impostare gli assi.
2. Traccio gli assi e riporto i punti calcolati.
3. Aggiungo punti in quelle zone dove l'andamento del grafico non mi è chiaro.



Esercizio
Traccia il grafico di $x \mapsto 2 + x^3$ per x compreso fra 0 e 2.

Soluzione.

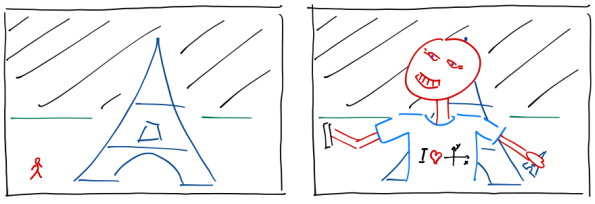
x	f(x)
0	2
0.1	2.001
0.5	2.13
1	3
1.5	5.38
2	10



□

Nota importante

Nel tracciare il diagramma di una funzione è importante prestare attenzione alla scelta della scala e alla centratura. Se un turista ti chiede una foto, la vuole come quella di destra.

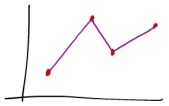


Anche le funzioni preferiscono essere in primo piano — e hanno, bene o male,

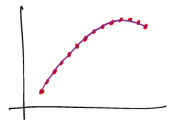
tanto buon gusto quanto il grosso dei turisti. In maniera più seria, un grafico è un mezzo per comunicare informazione. È fondamentale far uso di tutto lo spazio disponibile in maniera informativa.

Siccome lo spazio vuoto non comunica informazione, è bene che i grafici occupino tutto lo spazio disponibile.

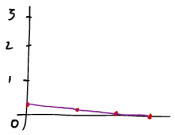
§10.4 Come NON tracciare un grafico



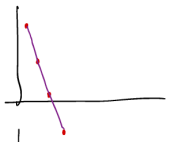
Spezzata (salvo se la funzione è davvero una spezzata).



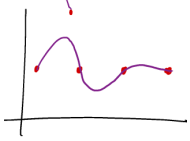
Calcolare 2000 **punti** non è sbagliato, ma spreca tempo.



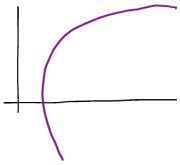
Scala sbagliata: può convenire usare unità diverse sui due assi.



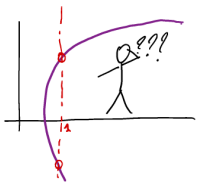
Centratura sbagliata: non tutti i numeri sono positivi.



Comportamento non evidenziato dai punti calcolati.



Uncino: quanto vale $f(1)$?



§10.5 Un esercizio

Nota importante
In questo corso, le funzioni trigonometriche si intendono in radianti.

Esercizio
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x - \sin(x) \qquad -0.1 \leqslant x \leqslant 0.1$$

Soluzione.

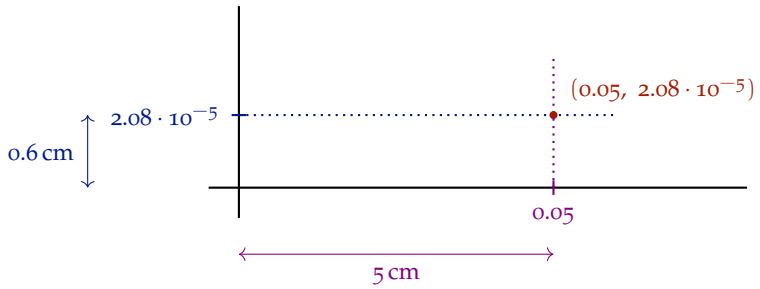
1. Comincio con

$$f(-0.1) = -1.67 \cdot 10^{-4} \qquad f(0) = 0 \qquad f(0.1) = 1.67 \cdot 10^{-4}$$

(Attenzione: $\sin(0.1) = 0.0998334$, per cui $0.1 - 0.0998334 = 0.0001666$ è la differenza fra due numeri quasi uguali, che si mangia le prime cifre. Per avere tre cifre significative del risultato, il seno va preso con almeno sette cifre decimali.)

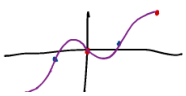
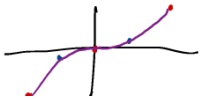
2. Imposto il grafico. Attenzione: mi sono venuti numeri molto piccoli. Converrà usare una scala opportuna per le ordinate, tipo 3 cm corrispondono a 10^{-4}.
Nota. I valori si riportano mediante la proporzione con determinate unità di misura. Per esempio, se decido che, in ascissa 10 cm corrispondono a 0.1, mentre in ordinata 3 cm corrispondono a 10^{-4}, come riporto il punto $(0.05,\ f(0.05))$, cioè $(0.05,\ 2.08 \cdot 10^{-5})$?

$$10\,\text{cm} : 0.1 = x : 0.05 \longrightarrow x = 5\,\text{cm}$$
$$3\,\text{cm} : 10^{-4} = y : 2.08 \cdot 10^{-5} \longrightarrow y = 0.624\,\text{cm} \approx 0.6\,\text{cm}$$



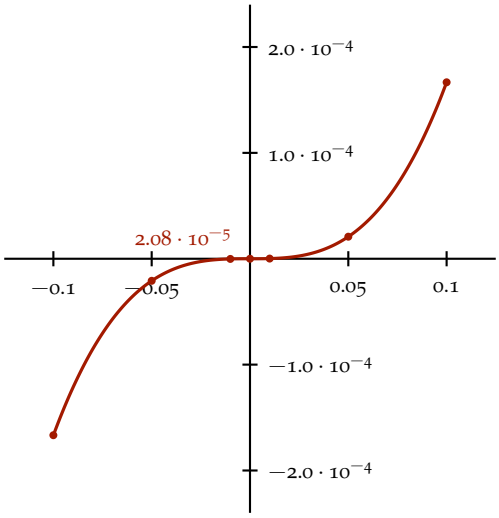
3. Per ora ho un grafico così  ma dubito che sia rettilineo.
Per controllare calcolo $f(0.05) \approx 2.08 \cdot 10^{-5}$, $f(-0.05) \approx -2.08 \cdot 10^{-5}$.

4. Ora ho questa situazione 

Sarà così  o così  ?

Calcolo $f(0.01) \approx 1.67 \cdot 10^{-7}$, $f(-0.01) \approx -1.67 \cdot 10^{-7}$.

5. I punti confermano la seconda ipotesi: probabilmente bastano per tracciare un grafico approssimativo (la figura seguente).



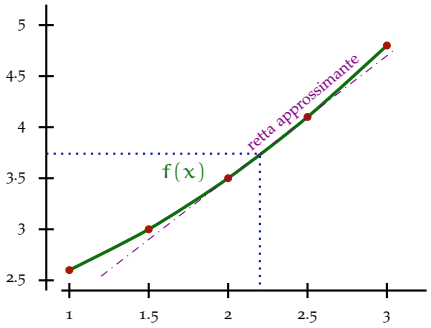
□

§10.6 Tabelle & interpolazione lineare

Può capitare che una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita, liscia, regolare, &c. ci sia data solo sotto forma di tabella. Per esempio

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	2.6	3.0	3.5	4.1	4.8

In questo caso come possiamo ottenere una stima dei valori non tabulati, ad esempio $f(2.2)$? Facciamo finta che fra i due valori tabulati più vicini a quello che ci interessa, 2.2, la funzione sia lineare. Non lo è, ma non può discostarsi troppo, se la tabella è costruita bene.



In questo caso i due valori sono 2.0 e 2.5. Se la funzione fosse lineare avremmo $f(2.0) = 3.5$, $f(2.5) = 4.1$, e, usando la formula della retta per due punti, $f(x) = 1.1 + x \cdot 1.2$. Sostituendo, $f(2.2) = 3.74 \approx 3.7$.

Nota
Se questo è il risultato del nostro calcolo scriveremo 3.7 con due cifre significative, perché la tabella è data con due cifre significative. Se però si tratta di un passaggio intermedio conviene mantenere 3.74, e approssimare alla fine.

In definitiva, se vogliamo interpolare $f(x)$ con x fra x_0 e x_1, e abbiamo i valori tabulati $f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$, allora:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + y_0$$

Facendo riferimento alla tabella precedente, sapendo $f(x) = 3.1$, quanto vale x? Dovremo interpolare fra

$$f(\overbrace{1.5}^{x_0}) = \overbrace{3.0}^{y_0} \qquad \text{e} \qquad f(\overbrace{2.0}^{x_1}) = \overbrace{3.5}^{y_1}$$

Primo metodo: risolviamo

$$\underbrace{3.1}_{f(x)} = (x - \underbrace{1.5}_{x_0}) \cdot \frac{\overbrace{3.5}^{y_1} - \overbrace{3.0}^{y_0}}{\underbrace{2.0}_{x_1} - \underbrace{1.5}_{x_0}} + \underbrace{3.0}_{y_0}$$

$$3.1 = x + 1.5 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1.6$$

Secondo metodo: usiamo la formula scambiando x e y.

$$x = (f(x) - y_0)\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} + x_0$$

$$x = (\underbrace{3.1}_{f(x)} - \underbrace{3.0}_{y_0}) \frac{\overbrace{2.0}^{x_1} - \overbrace{1.5}^{x_0}}{\underbrace{3.5}_{y_1} - \underbrace{3.0}_{y_0}} + \underbrace{1.5}_{x_0} = 1.6$$

Approfondimento (fuori programma) (Giustificazione della formula)
Risolviamo il sistema di equazioni per calcolare l'equazione della retta $y = ax + b$ passante per (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

$$\begin{cases} ax_0 + b = y_0 \implies b = y_0 - ax_0 \\ ax_1 + b = y_1 \implies ax_1 + y_0 - ax_0 = y_1 \implies a = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \end{cases}$$

$$b = y_0 - ax_0 = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0$$

e quindi

$$f(x) = ax + b = \underbrace{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}_{a} x + \underbrace{y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0}_{b} = (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + y_0$$

§10.7 Esercizi

Esercizio 58 (soluzione a p. 275)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x - 0.01 \cdot x^3$$

per $0 \leqslant x \leqslant 15$.

Esercizio 59 (soluzione a p. 276)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x - 2\cos(x)$$

per $0 \leqslant x \leqslant 5$. Attenzione: il coseno è in radianti!

Esercizio 60 (soluzione a p. 277)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x^3 - 50 \cdot x$$

per $9.8 \leqslant x \leqslant 10.2$.

Esercizio 61 (soluzione a p. 278)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{4x^2 + 1}$$

per $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

Esercizio 62 (soluzione a p. 279)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \cos(x)$$

per $-0.1 \leqslant x \leqslant 0.1$.

Esercizio 63 (soluzione a p. 279)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

per $-0.1 \leqslant x \leqslant 0.1$.

Esercizio 64 (soluzione a p. 280)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$$

per $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Esercizio 65 (soluzione a p. 282)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$$

per $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

§11 Funzioni esponenziali

Sappiamo che

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ volte}} \qquad \text{e ugualmente} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x}}_{n \text{ volte}}$$

e questo è l'ordinario elevamento a potenza. È possibile estendere l'elevamento a potenza in modo tale da ammettere esponenti reali arbitrari (anche frazionari, o persino irrazionali). Il risultato è l'esponenziale b^a, definito per ogni esponente a e per basi b positive. Valgono le seguenti proprietà.

$$b^0 = 1 \qquad b^x \cdot b^y = b^{x+y} \qquad x^a \cdot y^a = (xy)^a \qquad \left(b^x\right)^y = b^{xy}$$

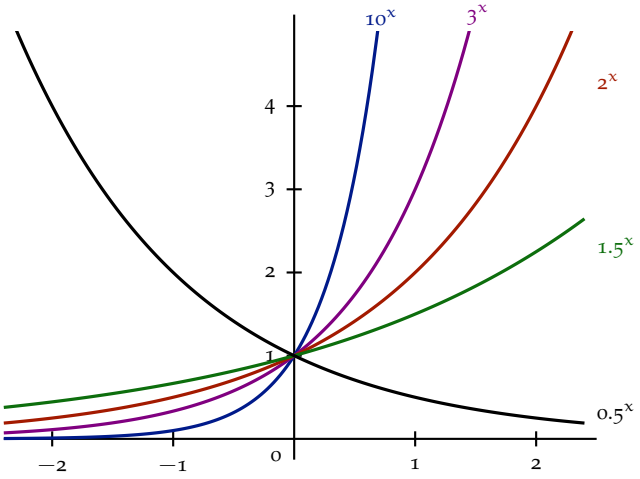
$$b^1 = b \qquad \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y} \qquad \frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a \qquad b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$

$$1^a = 1$$

Nota
La costruzione formale della funzione esponenziale richiede nozioni di analisi ed è al di fuori della portata di questo corso. È possibile, tuttavia, giustificare le proprietà dell'esponenziale pensando al caso più semplice dell'elevamento a potenza. Per esempio:

$$b^x \cdot b^y = \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots}_{x \text{ volte}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots}_{y \text{ volte}} = \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots}_{x+y \text{ volte}} = b^{x+y}$$

§11.1 Grafico dell'esponenziale



Osservando questi grafici possiamo notare alcune proprietà delle funzioni esponenziali.

- Se $b > 1$ la funzione b^x è crescente, ossia assume valori via via più grandi al crescere di x.

- Se $0 < b < 1$ la funzione b^x è decrescente, ossia assume valori via via più piccoli al crescere di x.

Algebricamente questo significa che

- per $b > 1$: $b^x > b^y$ equivale a $x > y$;
- per $0 < b < 1$: $b^x > b^y$ equivale a $x < y$.

Possiamo vedere, inoltre, che b^x cresce tanto più velocemente, al crescere di x, quanto maggiore è la base b. Infine, va da sé che tutti i grafici di b^x devono passare per il punto $(0, 1)$, perché $b^0 = 1$ indipendentemente da b.

§11.2 Alcuni valori della funzione 10^x

Tutti sanno calcolare 10^x quando x è un numero intero:

$$10^2 = 100 \qquad 10^7 = 10\,000\,000 \qquad 10^{-3} = 0.001 \qquad \&c.$$

è una semplice questione di contare gli zeri. Diverso è quando x non è intero: per esempio quanto vale $10^{3.7}$? Un primo passo è scrivere $10^{3.7} = 10^3 \cdot 10^{0.7} = 1000 \cdot 10^{0.7}$, però adesso occorre sapere quanto valga $10^{0.7}$.

Per esercizio, calcoliamo valori approssimati per $10^{0.1}$, $10^{0.2}$, &c. fino a $10^{0.9}$. Sfrutteremo il fatto seguente, che conviene ricordare:

$$10^{0.3} \approx 2 \qquad \text{(valore esatto } 1.99526\ldots\text{)}$$

Iniziamo quindi con questa tabella.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
10^x	1			2							10

Usando la relazione $10^{x+0.3} = 10^x \cdot 10^{0.3} \approx 10^x \cdot 2$ calcoliamo

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
10^x	1			2			4			8	10

$0.3 \xrightarrow{+0.3} 0.6 \xrightarrow{+0.3} 0.9$, e corrispondentemente $2 \xrightarrow{\cdot 2} 4 \xrightarrow{\cdot 2} 8$.

Viceversa, usando $10^{x-0.3} = 10^x \cdot 10^{-0.3} = 10^x/10^{0.3} \approx 10^x/2$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
10^x	1	1.25		2	2.5		4	5		8	10

$1 \xrightarrow{-0.3} 0.7 \xrightarrow{-0.3} 0.4 \xrightarrow{-0.3} 0.1$, e corrispondentemente

$10 \xrightarrow{/2} 5 \xrightarrow{/2} 2.5 \xrightarrow{/2} 1.25$.

Ora ci mancano gli esponenti 0.2, 0.5, 0.8, che sono a passi di 0.3 l'uno dall'altro. Ci basta quindi determinarne uno per poter completare la tabella. Per esempio possiamo considerare

$$10^{0.2} = 10^{0.3-0.1} = \frac{10^{0.3}}{10^{0.1}} \approx \frac{2}{1.25} = 1.6$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
10^x	1	1.25	1.6	2	2.5	3.2	4	5	6.4	8	10

$0.2 \xrightarrow{+0.3} 0.5 \xrightarrow{+0.3} 0.8$, e corrispondentemente $1.6 \xrightarrow{\cdot 2} 3.2 \xrightarrow{\cdot 2} 6.4$.

Per curiosità, possiamo confrontare la nostra tabella con i valori esatti.

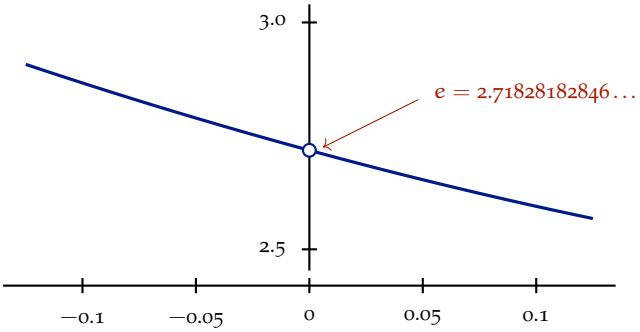
x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$10^x \approx$	1	1.25	1.6	2	2.5	3.2	4	5	6.4	8	10
$=$	1.00	1.26	1.58	2.00	2.51	3.16	3.98	5.01	6.31	7.94	10.00
err. %	0%	−0.7%	+1.0%	+0.2%	−0.5%	+1.2%	+0.5%	−0.2%	+1.4%	+0.7%	0%

Abbiamo commesso il massimo errore per $10^{0.8}$, e questo è dell'1.4% rispetto al valore esatto.

§11.3 Intermezzo: il numero e

Introduciamo il numero $e = 2.71828182846\ldots$, che spesso viene usato come base dei logaritmi (che vedremo nel prossimo capitolo) e degli esponenziali (cioè e^x).

Il numero e — "numero di Eulero", anche "numero di Nepero", che sono due persone diverse, ma poco importa perché comunque lo ha scoperto Jacob Bernoulli — emerge dallo studio della funzione $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.



Chiaramente $f(0)$ non è definito, perché occorrerebbe calcolare l'esponente $\frac{1}{0}$; tuttavia, tracciando un grafico accurato di $f(x)$ in prossimità di $x = 0$, si vede che questo ha l'aspetto di una curva regolare cui manca il punto di ascissa 0. Il numero e è definito esattamente come l'ordinata di questo punto mancante. In questo corso non studieremo la nozione di limite, ma questo fatto si esprime dicendo che "e è il limite di $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ per x tendente a 0", e si scrive

$$e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Il numero e è quindi una costante matematica nello stesso senso in cui lo è π: un numero fissato non per convenzione — come le 24 ore in un giorno — né dall'osservazione di un fenomeno naturale — come i 365.24 giorni in un anno — ma da una proprietà matematica — la lunghezza della circonferenza per π, e il limite di $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ per e.

In pratica, tutte le calcolatrici scientifiche hanno un tasto per la funzione e^x, i linguaggi di programmazione hanno una funzione di libreria che calcola e^x, &c. Quindi non c'è

alcun bisogno di calcolare e. Se volessimo, però, potremmo calcolare $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ per x decrescenti in valore assoluto:

	x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
POSITIVI	0.1	2.594
	0.01	2.705
	0.001	2.717
	0.0001	2.718

	x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
NEGATIVI	-0.1	2.868
	-0.01	2.732
	-0.001	2.720
	-0.0001	2.718

Quello che otteniamo sono approssimazioni per difetto e per eccesso — secondo che x sia rispettivamente positivo o negativo — del numero e.

Approfondimento (fuori programma)
Una delle ragioni per definire il numero e è che l'esponenziale e^x può essere ricondotto alle operazioni algebriche mediante una formula

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^4}{4\cdot 3\cdot 2} + \frac{x^5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} + \dots$$

Questa è una somma infinita, però, via via che si procede, gli addendi diventano sempre più piccoli, è quindi possibile calcolare e^x con precisione arbitraria semplicemente sommando una quantità sufficiente di addendi. È precisamente mediante formule come questa che calcolatrici e computer calcolano l'esponenziale.

§11.4 Esercizi

Test 66 (soluzione a p. 282)
Risolvi la disequazione $2^x < 5^x$.

Test 67 (soluzione a p. 283)
Sapendo che $10^{3x} = 64$, quanto vale 100^x?

Test 68 (soluzione a p. 283)
Sapendo che $8^x = 2.7 \cdot 10^4$, quanto vale 2^x?

Test 69 (soluzione a p. 283)
Metti in ordine crescente $4^{1.5}$, $10^{0.5}$, 5.

Test 70 (soluzione a p. 284)
Risolvi $1000 \cdot 10^x = 100^{x-7}$.

Test 71 (soluzione a p. 284)
Risolvi $10^{2x} + 10^{x} - 2 = 0$.

§12 Logaritmi

Definizione

$$\log_b(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad b^y = x$$

Il logaritmo in base b di x è quel numero a cui si deve elevare b per ottenere x.

In altri termini, i logaritmi non sono che esponenziali scritti in maniera buffa. La proprietà che definisce il logaritmo è appunto che queste due formule dicono la stessa cosa

$$\log_b(\square) = \triangle \qquad \longleftrightarrow \qquad b^{\triangle} = \square$$

qualunque espressione ci sia al posto di $\triangle$ e $\square$.

Lo stesso può essere espresso mediante queste identità, che è importante conoscere

$$b^{\log_b(x)} = x \qquad \log_b\left(b^y\right) = y$$

Perché valgono queste identità? Se, al posto di $\square$, scriviamo x, e al posto di $\triangle$ scriviamo $\log_b(x)$, abbiamo

$$\log_b(\square) = \triangle \qquad \longleftrightarrow \qquad b^{\triangle} = \square$$

$$\log_b(x) = \log_b(x) \qquad \longleftrightarrow \qquad b^{\log_b(x)} = x$$

Dal momento che la formula di sinistra è ovviamente vera — dice che una cosa è uguale a se stessa — anche la formula di destra deve essere vera. Questa è la prima identità; la seconda si ottiene analogamente ponendo $\square = b^y$ e $\triangle = y$.

§12.1 Proprietà dei logaritmi

Le proprietà dei logaritmi sono proprietà dell'esponenziale scritte in maniera buffa.

P. degli esponenziali	P. corrispondente dei logaritmi
$b^0 = 1$	$\log_b(1) = 0$
$b^1 = b$	$\log_b(b) = 1$
$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$	$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$
$b^x / b^y = b^{x-y}$	$\log_b(x/y) = \log_b(x) - \log_b(y)$
$\left(b^x\right)^y = b^{x \cdot y}$	$\log_b\left(x^y\right) = y \cdot \log_b(x)$
$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$	$\log_b\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_b(x)$

Approfondimento (fuori programma)
Giustifichiamo, per esempio, la formula per $\log_b(x \cdot y)$. Poniamo $\square = x \cdot y$ e $\triangle = \log_b(x) + \log_b(y)$; la formula da dimostrare e la sua gemella sono

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y) \qquad \longleftrightarrow \qquad b^{\log_b(x)+\log_b(y)} = x \cdot y$$

Basta quindi verificare quella di destra. Per la proprietà dell'esponenziale, però,

$$b^{\log_b(x)+\log_b(y)} = \underbrace{b^{\log_b(x)}}_{=x} \cdot \underbrace{b^{\log_b(y)}}_{=y} = x \cdot y \qquad \text{Ok!}$$

§12.2 Formula del cambiamento di base dei logaritmi

Di solito calcolatrici e linguaggi informatici forniscono la funzione logaritmo solo in alcune basi: tipicamente in base e (detto logaritmo naturale; in alcuni sistemi viene rappresentato semplicemente come log, in altri col simbolo ln) e in base 10 (anch'esso denotato, alle volte, semplicemente dal simbolo log).

Nota importante
Quando si incontra una funzione chiamata "log" in un contesto che non si conosce, è cosa saggia accertarsi di quale sia la base di questo logaritmo.

È facile ricondurre i logaritmi in una base x qualunque a quelli in un'altra base b — tipicamente e o 10 — grazie a questa formula.

$$\log_x(y) = \frac{\log_b(y)}{\log_b(x)}$$

Per esempio, se desideriamo calcolare $\log_7(15)$ e disponiamo solo di una funzione per i logaritmi in base 10, possiamo calcolare

$$\log_7(15) = \frac{\log_{10}(15)}{\log_{10}(7)} = \frac{1.17609}{0.845098} \approx 1.39$$

Approfondimento (fuori programma)
Per verificare la formula dobbiamo vedere che $x^{\frac{\log_b(y)}{\log_b(x)}} = y$. Infatti

$$x^{\frac{\log_b(y)}{\log_b(x)}} = \left(b^{\log_b(x)}\right)^{\frac{\log_b(y)}{\log_b(x)}} = b^{\cancel{\log_b(x)} \cdot \frac{\log_b(y)}{\cancel{\log_b(x)}}} = b^{\log_b(y)} = y$$

dove nel primo e nell'ultimo passaggio si è usata l'identità $b^{\log_b(\square)} = \square$.

§12.3 Crescite & decadimenti esponenziali

Molti fenomeni sono descritti da una formula del tipo

$$\text{Variabile}(t) = \text{Variabile}(t_0) \cdot \text{base}^{\pm \frac{t-t_0}{\tau}}$$

questi fenomeni sono detti crescite o decadimenti esponenziali, rispettivamente se l'esponenziale è crescente o decrescente — l'esponenziale è crescente se base > 1 e il segno all'esponente è $+$, o $0 <$ base < 1 e il segno è $-$; altrimenti è decrescente.

I parametri della formula non sono determinati in modo univoco dal fenomeno rappresentato, vale a dire che c'è una certa misura di libertà nella loro scelta. Per esempio

$$100 \cdot 4^{\frac{t-3\,s}{6\,s}} = 100 \cdot 2^{2 \cdot \frac{t-3\,s}{6\,s}} = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3\,s}-1} = 50 \cdot 2^{\frac{t}{3\,s}}$$

vediamo quindi che le scelte di parametri

$t_0 = 3\,s$	$t_0 = 0\,s$
$\tau = 6\,s$	$\tau = 3\,s$
$\text{base} = 4$	$\text{base} = 2$
$\text{Variabile}(t_0) = 100$	$\text{Variabile}(t_0) = 50$

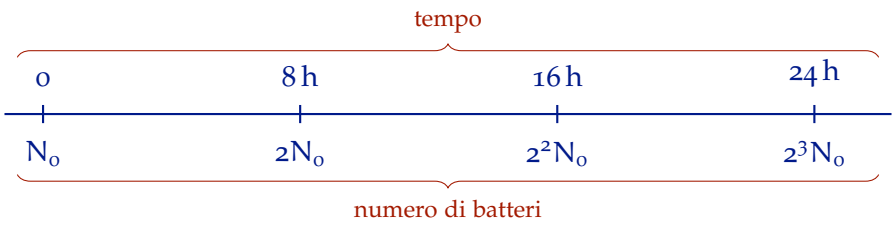
sono equivalenti: descrivono il medesimo fenomeno.

In generale, possiamo fissare t_0 e la base ad arbitrio, e la formula rimane generale. Frequentemente si prende $t_0 = 0$, e la base più comoda a seconda dell'applicazione.

> **Nota**
> Quando studieremo le equazioni differenziali, vedremo che gli esponenziali risolvono una classe naturale di equazioni lineari, e questo ne spiega l'utilità.

Esercizio
I batteri in una coltura raddoppiano ogni otto ore: dopo quanto tempo sono triplicati?

Soluzione. I batteri raddoppiano ogni 8 ore, quindi, in 8 ore, il loro numero si moltiplica per 2, in 16 per 2 due volte, ossia per 2^2, in 24 per 2 tre volte, ossia per 2^3, &c.



In generale, detto N_t il numero di batteri, abbiamo

$$N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{8\,h}} \quad \} \text{ esponente = numero di periodi di 8 ore fra 0 e t}$$

questa formula è vera non solo quando l'esponente del 2 è intero, ma in generale, per ogni t. La crescita di una colonia di batteri — quando non è limitata dalla disponibilità di nutrienti o di spazio — è, anzi, l'esempio tipico di crescita esponenziale.

L'esercizio chiede di trovare a che tempo t_1 sia

$$N_{t_1} = N_0 \cdot 3$$

Siccome, dalla formula generale, $N_{t_1} = N_0 \cdot 2^{\frac{t_1}{8\,h}}$, abbiamo l'equazione

$$\cancel{N_0} \cdot 2^{\frac{t_1}{8\,h}} = \cancel{N_0} \cdot 3 \qquad \Longrightarrow \qquad 2^{\frac{t_1}{8\,h}} = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{t_1}{8\,h} = \log_2(3)$$

$$t_1 = 8 \cdot \log_2(3)\,h$$

Per ottenere un risultato in forma numerica, possiamo adoperare la formula del cambiamento di base

$$t_1 = 8\log_2(3)\,h = 8\,\frac{\log_{10}(3)}{\log_{10}(2)}\,h \approx 12.7\,h$$

□

Esercizio
Il carbonio-14 (^{14}C) è un isotopo radioattivo del C che ha un tempo di dimezzamento di 5700 anni. La concentrazione di ^{14}C in una mummia è il 40.0% di quella in un vivente. A quanto tempo fa risale la mummia?

Soluzione. Questo è, invece, l'esempio tipico di decadimento esponenziale: il decadimento radioattivo. Il tempo di dimezzamento è, per definizione, il tempo che impiega metà del ^{14}C in un campione a decadere — in sostanza trasformandosi in azoto. Quindi dopo 5700 anni la concentrazione di ^{14}C nel campione è la metà di quella iniziale, dopo $2 \cdot 5700$ anni è $\frac{1}{4}$, dopo $3 \cdot 5700$ anni è $\frac{1}{8}$, &c.

In generale

$$^{14}C \text{ al tempo } t = {}^{14}C \text{ iniziale} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700\,\text{anni}}}$$

L'esercizio ci chiede a che tempo t valga

$$^{14}C \text{ al tempo } t = {}^{14}C \text{ iniziale} \cdot \frac{40}{100}$$

Come nell'esercizio precedente otteniamo, quindi,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700\,\text{anni}}} = \frac{40}{100}$$

$$t = 5700 \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{40}{100}\right)\,\text{anni} = 5700 \cdot \frac{\log_{10}(0.4)}{\log_{10}(0.5)}\,\text{anni} \approx 7500\,\text{anni}$$

□

Nota
In realtà, la datazione al ^{14}C, anche senza considerare la difficoltà di misurare accuratamente la concentrazione di ^{14}C in un campione archeologico, è una questione più complicata di quanto potrebbe sembrare da questo esercizio. Principalmente, il guaio è che bisogna assumere una concentrazione iniziale pari a quella presente nell'atmosfera quando il campione era in vita, però questa concentrazione non si è mantenuta costante durante i millenni. Occorre, dunque, in qualche modo, ricostruire quanto ^{14}C ci fosse nell'atmosfera millenni fa, per poi calibrare la procedura in modo da tenere conto di questa informazione.

§12.4 Esercizi

Test 72 (soluzione a p. 284)
Sapendo che $\log_e(x) = 10$, quanto vale $\log_e\left(x \cdot \sqrt{x}\right)$?

Test 73 (soluzione a p. 284)
Sapendo che $\log_{10}(x) = 12.4$, quanto vale $\log_{100}(x)$?

Test 74 (soluzione a p. 285)

Calcola $\log_2\left(\frac{8^{3.7}}{4}\right)$.

Esercizio 75 (soluzione a p. 285)
Il numero dei batteri in una coltura cresce del 50% ogni sei ore.

- Di quanto cresce, in percentuale, in dodici ore? E in tre?
- Quanto tempo, in ore e minuti, impiegano i batteri per crescere del 10%? E per raddoppiare?

Esercizio 76 (soluzione a p. 286)
Il numero di batteri nella coltura X raddoppia ogni 18 ore. Quello della coltura Y ogni 24 ore. Inizialmente, il numero di individui nella coltura X è un decimo di quello di Y.

1. Dopo quanto tempo le due colture contengono il medesimo numero di batteri?
2. Quanto vale il rapporto fra questo numero e il numero di individui inizialmente in X?
3. Si è misurato che al tempo $t = 0$ una terza coltura Z contiene $(1.5 \pm 0.1) \cdot 10^7$ individui. Al tempo $t = 10\,h \pm 20\,min$, la stessa coltura ne contiene $(2.5 \pm 0.2) \cdot 10^7$. Calcola quanto tempo impiega Z per raddoppiare indicando l'errore relativo.

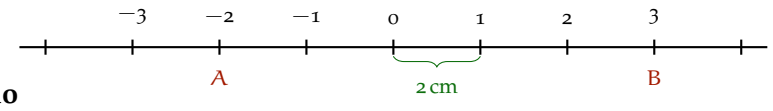
Esercizio 77 (soluzione a p. 288)
In una soluzione acquosa un principio attivo si decompone, e la sua concentrazione decresce esponenzialmente nel tempo. A un certo istante la concentrazione è $(7.9 \pm 0.1) \cdot 10^{-2}$ mol/L. Esattamente sei ore dopo è scesa a $(9.6 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}$ mol/L. Qual è il tempo di dimezzamento del principio attivo? Che errore relativo hai su questo risultato?

§13 Scale logaritmiche

L'usuale corrispondenza fra i numeri reali e i punti sugli assi di un diagramma cartesiano si chiama scala lineare. Questa maniera di numerare i punti di una retta è definita dalla seguente proprietà.

Definizione (Scala lineare)
La distanza fra due numeri è proporzionale alla loro differenza.

Esempio

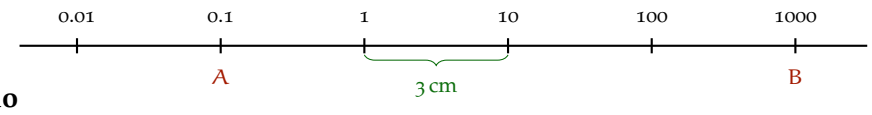


$$\text{dist}(A,B) : 3-(-2) = 2\,\text{cm} : 1-0$$
$$\text{dist}(A,B) = \frac{5\cdot 2\,\text{cm}}{1} = 10\,\text{cm}$$

Un'altra maniera di numerare gli assi che ha interesse pratico è la scala logaritmica, definita dalla proprietà seguente.

Definizione (Scala logaritmica)
Rappresenta solo numeri positivi, e la distanza fra due numeri è proporzionale alla differenza dei loro logaritmi (in una qualsiasi base fissata).

Esempio

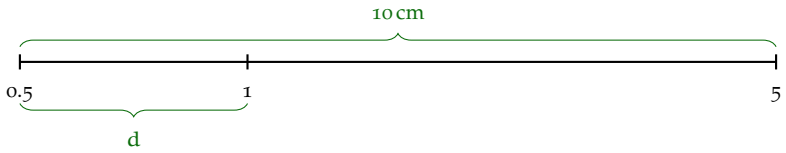


$$\text{dist}(A,B) : \log_{10}(1000) - \log_{10}(0.1) = 3\,\text{cm} : \log_{10}(10) - \log_{10}(1)$$
$$\text{dist}(A,B) = \frac{4\cdot 3\,\text{cm}}{1} = 12\,\text{cm}$$

Nota importante
Quella qui sopra è la forma tipica di una scala logaritmica: le potenze di 10 sono equispaziate.

Esercizio
Traccia una scala logaritmica lunga 10 cm che, all'estremo sinistro, ha 0.5 e, a quello destro, ha 5.

Soluzione. Come esempio, calcoliamo dove mettere il numero 1 (il calcolo è lo stesso qualunque numero vogliamo riportare sulla scala). Conviene determinare la distanza d del nostro numero dall'estremo sinistro.



$$d : \log_{10}(1) - \log_{10}(0.5) = 10\,\text{cm} : \log_{10}(5) - \log_{10}(0.5)$$

$$d = \frac{(\log_{10}(1) - \log_{10}(0.5)) \cdot 10\,\text{cm}}{\log_{10}(5) - \log_{10}(0.5)} = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{0.5}\right) \cdot 10\,\text{cm}}{\log_{10}\left(\frac{5}{0.5}\right)} = \frac{\log_{10}(2) \cdot 10\,\text{cm}}{\log_{10}(10)} \approx 3\,\text{cm}$$

□

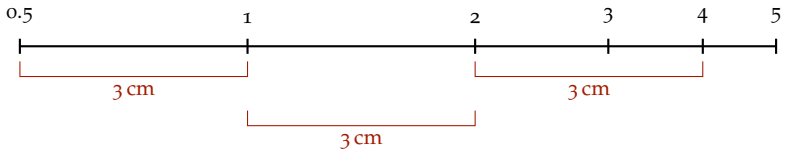
§13.1 Osservazioni sull'esercizio

Se ripetiamo il calcolo in un'altra base otteniamo il medesimo risultato:

$$d : \underbrace{\log_e(1)}_{0} - \underbrace{\log_e(0.5)}_{\approx -0.693} = 10\,\text{cm} : \underbrace{\log_e(5)}_{\approx 1.609} - \underbrace{\log_e(0.5)}_{\approx -0.693}$$

$$d : 0.693 = 10\,\text{cm} : 2.302 \qquad \Longrightarrow \qquad d \approx \frac{0.693 \cdot 10\,\text{cm}}{2.302} \approx 3\,\text{cm}$$

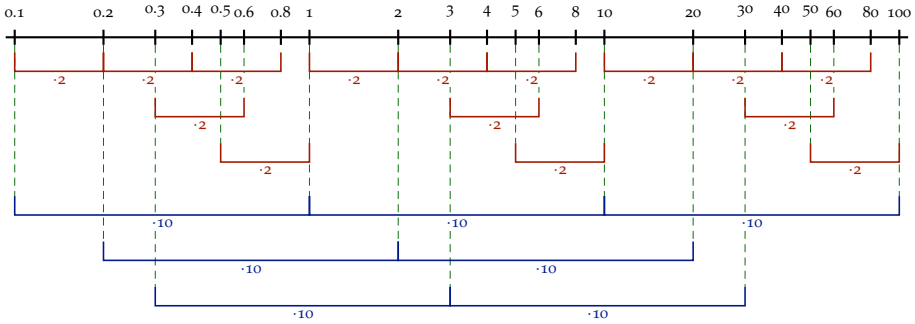
Riportando altri numeri otteniamo



Notiamo che le distanze fra 0.5 e 1, fra 1 e 2, e fra 2 e 4 sono uguali. Questo accade perché

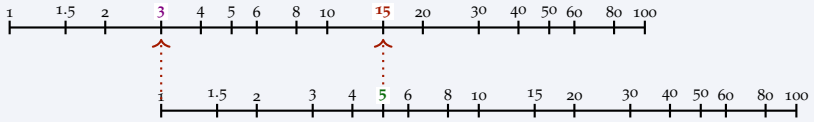
$$\frac{1}{0.5} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$$

In generale spostarsi lungo una scala logaritmica di una certa distanza significa moltiplicare per un certo numero (che dipende dalla scala e dalla distanza). Nell'esercizio, se ci spostiamo verso destra di 3 cm, moltiplichiamo per 2. Proseguendo questa scala a destra e a sinistra otteniamo

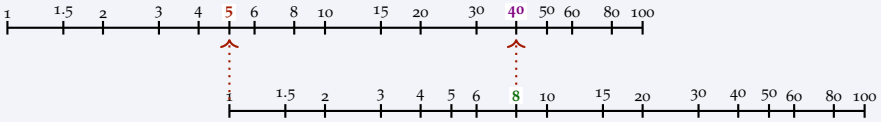


È interessante notare come il gioco *spostamento* = *moltiplicazione* fa sì che gli ordini di grandezza 0.1–1, 1–10, 10–100, &c. siano lunghi uguali, e suddivisi in maniera simile.

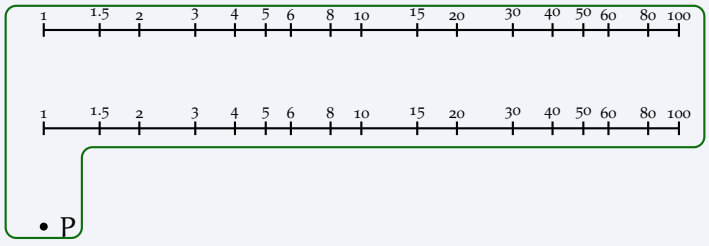
Approfondimento (fuori programma) (Curiosità sulle scale logaritmiche)
Costruiamo due scale logaritmiche uguali e mobili l'una rispetto all'altra. Supponiamo di voler calcolare un prodotto, per esempio $3 \cdot 5$. Poniamo l'1 della seconda scala in corrispondenza del 3 della prima: il numero della prima scala corrispondente al 5 sulla seconda sarà il prodotto.



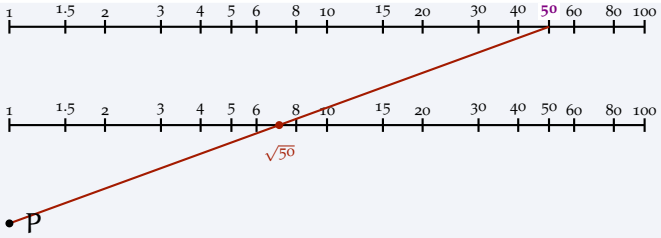
Per calcolare una divisione, per esempio $40/8$, mettiamo il divisore sulla seconda in corrispondenza del dividendo sulla prima. L'1 della seconda indicherà il risultato.



Questo diagramma, invece, permette di calcolare le radici quadrate: le due scale sono fisse, e con esse il punto P.



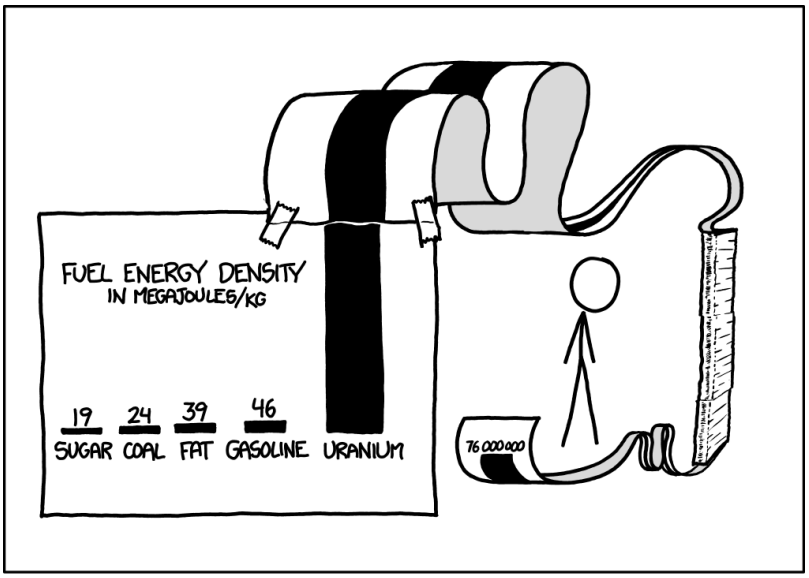
Per trovare, per esempio, $\sqrt{50}$, riportiamo 50 sulla scala superiore, poi connettiamo questo punto con P. Il segmento così identificato interseca la scala inferiore in $\sqrt{50}$.



La costruzione funziona perché la scala inferiore taglia a metà il fascio di rette uscenti da P: la distanza dall'1 si dimezza, e dimezzare un logaritmo significa estrarre una radice quadrata.

§13.2 A cosa servono le scale logaritmiche?

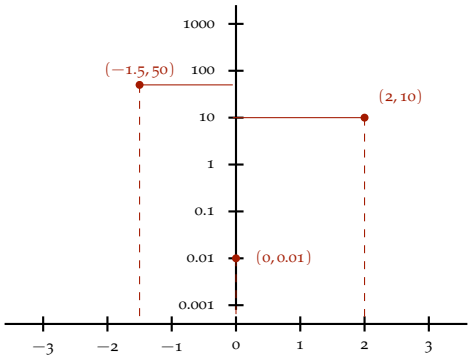
Una scala logaritmica permette solo di rappresentare quantità positive. In generale, è conveniente usare una scala logaritmica per quantità che variano su più ordini di grandezza. I grafici logaritmici sono particolarmente utili in quanto evidenziano certe leggi (o funzioni) che si incontrano di frequente (esponenziali, potenze).



Randall Munroe, *Log Scale*, xkcd n. 1162, CC BY-NC 2.5.

§13.3 Grafici semi-logaritmici (o lin-log)

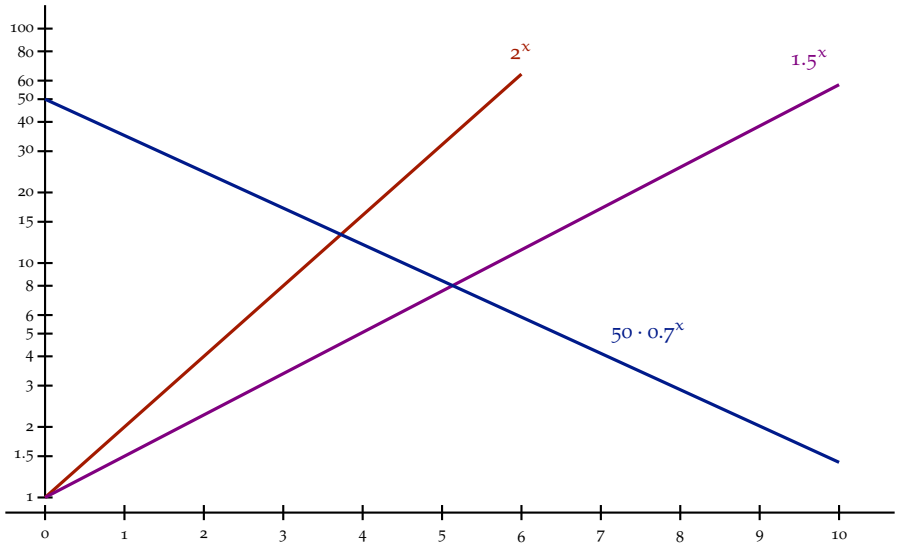
Un grafico semi-logaritmico (o lin-log) si distingue dagli usuali grafici cartesiani poiché l'asse delle ordinate è graduato in scala logaritmica. I punti si identificano su un grafico logaritmico mediante l'intersezione di due linee coordinate, esattamente nello stesso modo dei grafici cartesiani.



Alcuni punti rappresentati su un grafico semi-logaritmico.

Da notare che l'asse delle ordinate riporta solo valori positivi. L'asse delle ascisse, invece, può anche rappresentare numeri negativi.

I grafici semi-logaritmici sono importanti per riconoscere le funzioni esponenziali. Infatti un grafico appare rettilineo se e solo se rappresenta un esponenziale.



§13.4 Da grafico semi-logaritmico a espressione

La forma generale di una funzione esponenziale è $f(x) = a \cdot b^x$. Alternativamente, si può fissare una base convenzionale, per esempio 10 oppure e, e scrivere $f(x) = a \cdot 10^{k \cdot x}$ oppure $f(x) = a \cdot e^{h \cdot x}$. Ogni funzione esponenziale può essere espressa in ciascuna di queste forme, per esempio

$$\underbrace{0.7}_{a} \cdot \underbrace{3^x}_{b^x} = \underbrace{0.7}_{a} \cdot 10^{x \overbrace{\log_{10}(3)}^{k}} = \underbrace{0.7}_{a} \cdot e^{x \overbrace{\log_e(3)}^{h}}$$

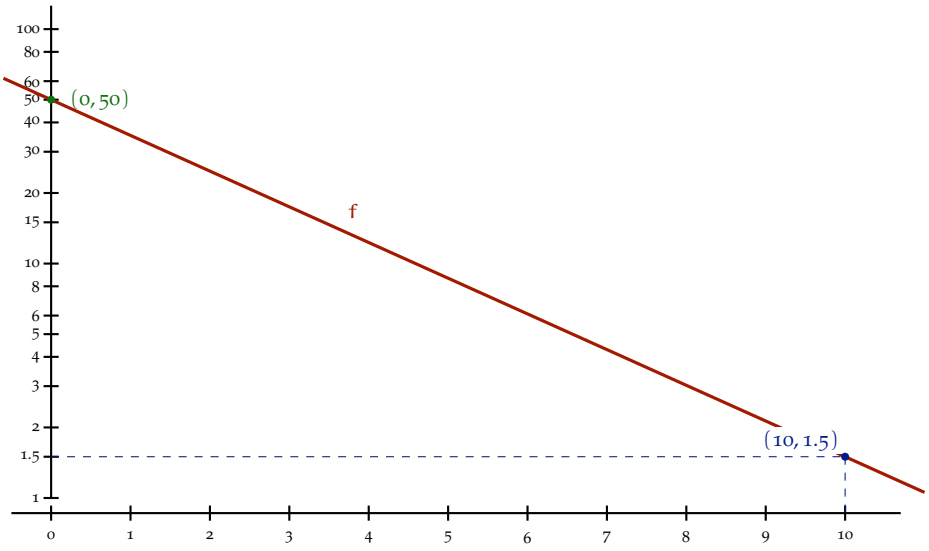
Però, conviene fissare una base convenzionale quando la variabile non è adimensionale. Per esempio, la funzione $f(t) = 4.0 \cdot 10^{t/4\,s}$, della variabile t che ha le dimensioni di un tempo, non si può scrivere nella forma $f(t) = 4.0 \cdot b^t$, perché non ha senso elevare a un tempo (quanto fa $2^{2\,h}$? e $2^{120\,min}$?). Questa funzione si può però scrivere nelle forme equivalenti

$$f(t) = 4.0 \cdot 10^{t \cdot 0.25\,s^{-1}} = 4.0 \cdot e^{t \cdot 0.25 \cdot \log_e(10)\,s^{-1}} = 10^{\log_{10}(4.0) + \frac{15\,t}{1\,min}}$$

Verifica questi calcoli!

Ora, supponiamo di constatare che il grafico di una certa funzione f, in un diagramma semi-logaritmico, è una retta. Sappiamo quindi che f è una funzione esponenziale. Come troviamo l'espressione di $f(x)$?

Iniziamo coll'identificare le coordinate di due punti, ragionevolmente distanti fra loro, sul grafico di f. In questo esempio $(0, 50)$ e $(10, 1.5)$. Sappiamo quindi che $f(0) = 50$ e $f(10) = 1.5$.



Volendo scrivere f nella forma $f(x) = a \cdot b^x$ vediamo che $f(0) = a \cdot b^0 = 50$ e $f(10) = a \cdot b^{10} = 1.5$. Quindi i parametri a e b soddisfano il sistema

$$\begin{cases} a \cdot b^0 = 50 \\ a \cdot b^{10} = 1.5 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} a \cdot \underbrace{b^0}_{=1} = 50 \quad \Longrightarrow \quad a = 50 \\ a \cdot b^{10} = 1.5 \quad \Longrightarrow \quad 50 \cdot b^{10} = 1.5 \quad \Longrightarrow \quad b = \left(\frac{1.5}{50}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 0.70 \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = 50 \cdot 0.70^x$$

Esercizio
Cerca una funzione esponenziale $g(x)$ tale che $g(2.5) = 7.6$ e $g(4.0) = 12.0$.

Soluzione. Questa volta usiamo la forma $g(x) = a \cdot 10^{k \cdot x}$. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a \cdot 10^{k \cdot 2.5} = 7.6 \quad \Longrightarrow \quad a = \dfrac{7.6}{10^{k \cdot 2.5}} \\ a \cdot 10^{k \cdot 4.0} = 12.0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{7.6}{10^{k \cdot 2.5}} \cdot 10^{k \cdot 4.0} = 12.0 \end{cases}$$

$$10^{k \cdot 4.0 - k \cdot 2.5} = 10^{k \cdot 1.5}$$

e quindi

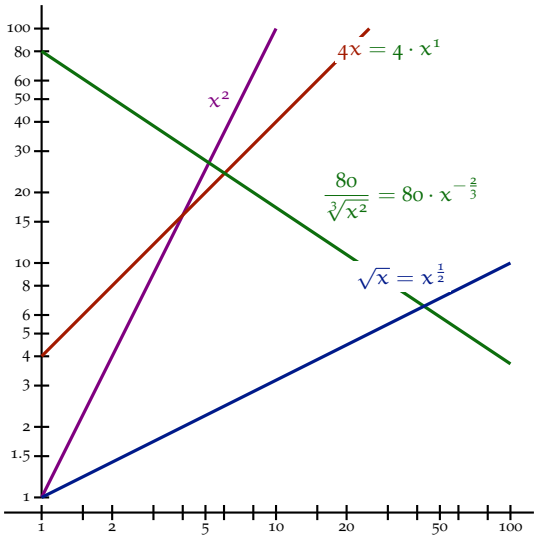
$$7.6 \cdot 10^{k \cdot 1.5} = 12.0 \implies 10^{k \cdot 1.5} = \frac{12.0}{7.6} \implies k \cdot 1.5 = \log_{10}\left(\frac{12.0}{7.6}\right) \implies k \approx 0.132$$

$$a = \frac{7.6}{10^{k \cdot 2.5}} \approx 3.5 \qquad \text{quindi} \qquad g(x) = 3.5 \cdot 10^{0.132 \cdot x}$$

□

§13.5 Grafici logaritmici (o log-log)

In un grafico logaritmico entrambi gli assi sono in scala logaritmica (va da sé, quindi, che entrambi rappresentano solo numeri positivi). Questi grafici permettono di riconoscere visivamente le funzioni potenza, ossia quelle della forma $f(x) = a \cdot x^k$ (con k che potrebbe anche non essere un numero intero). Per esempio



§13.6 Dal grafico logaritmico all'espressione

Il procedimento per ottenere l'espressione di una legge potenza $f(x)$ dal suo grafico è analogo a quello descritto per l'esponenziale.

Esercizio
Supponi di osservare che una funzione $f(x)$ è rappresentata in un grafico logaritmico da una retta. Sai quindi che $f(x) = a \cdot x^k$ per opportuni a e k. Vedi anche dal grafico che $f(2.1) = 10$ e $f(30) = 3.7$. Qual è l'espressione di f?

Soluzione.

$$\begin{cases} a \cdot 2.1^k = 10 \implies a = \dfrac{10}{2.1^k} \\ a \cdot 30^k = 3.7 \implies \dfrac{10}{2.1^k} \cdot 30^k = 3.7 \implies \left(\dfrac{30}{2.1}\right)^k = \dfrac{3.7}{10} \end{cases}$$

$$k = \log_{\frac{30}{2.1}} \left(\frac{3.7}{10}\right) = \frac{\log_{10}\left(\frac{3.7}{10}\right)}{\log_{10}\left(\frac{30}{2.1}\right)} \approx -0.37$$

$$a = \frac{10}{2.1^k} = \frac{10}{2.1^{-0.37}} \approx 13 \qquad \text{quindi} \qquad f(x) = 13 \cdot x^{-0.37}$$

□

Nota importante
Al termine di calcoli come questo conviene sempre fare la prova calcolando f nei punti dati:

$f(2.1) = 13 \cdot 2.1^{-0.37} \approx 9.88 \approx 10$ ✓ $\qquad$ $f(30) = 13 \cdot 30^{-0.37} \approx 3.69 \approx 3.7$ ✓

§13.7 Esercizi

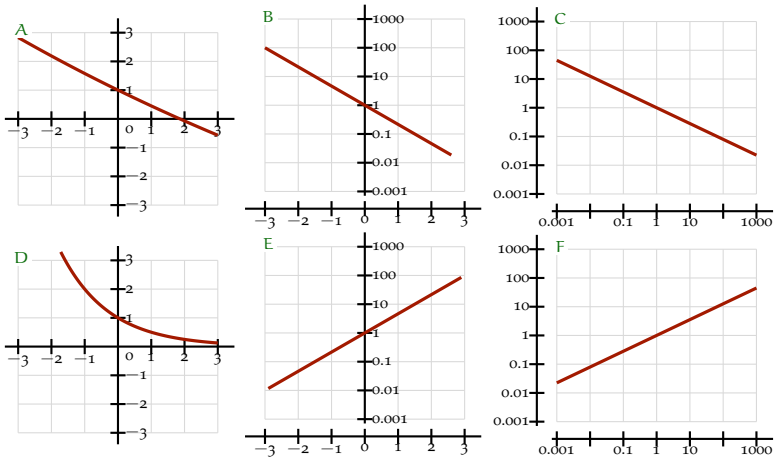
Esercizio 78 (soluzione a p. 289)
Vogliamo costruire una scala logaritmica lunga 30 cm. Abbiamo stabilito che il numero 20 si trovi esattamente nel mezzo della scala, mentre il numero 1000 deve trovarsi all'estremo destro. Che numero è indicato sull'estremo sinistro della scala? A che distanza, in millimetri, dall'estremo sinistro si trova il numero 7?

Esercizio 79 (soluzione a p. 290)

1. Su una scala logaritmica, è segnato il numero 100 000. Alla distanza di 10 cm dal 100 000 è segnato 10 000 000. A che distanza dal 100 000 si trovano, su questa scala, i punti 1 000 000, 5 000 000 e 200 000?
2. Costruisci un grafico semi-logaritmico che rappresenti la crescita esponenziale di una popolazione costituita, al tempo 0, da 200 000 individui, e dopo 24 ore da 5 000 000 di individui. Quanti individui ci sono dopo 12 ore?
3. Se il numero iniziale di individui alla domanda 2 è stato misurato con un errore assoluto stimato in $\pm 10\,000$, e il numero finale con un errore di $\pm 250\,000$, come puoi stimare l'errore sulla risposta?

Esercizio 80 (soluzione a p. 292)
La concentrazione di un farmaco nel plasma di un paziente è di 50 µmol/mL al tempo t_0, e decresce esponenzialmente con un tempo di dimezzamento di 16 ore. Rappresenta l'andamento di questa concentrazione nelle 72 ore successive a t_0, sia per mezzo di un diagramma cartesiano, sia per mezzo di un diagramma semilogaritmico.

Esercizio 81 (soluzione a p. 293)
Determina quali dei grafici seguenti rappresentano un decadimento esponenziale, e, per ciascuno di questi, trova il tempo di dimezzamento. In tutti i grafici le ascisse sono indicate in secondi.



Esercizio 82 (soluzione a p. 294)
La concentrazione di un farmaco nel plasma di un paziente, dopo la somministrazione per via endovenosa, decresce esponenzialmente con un tempo di dimezzamento di 8.0 ore.

1. Quanto tempo occorre perché una concentrazione iniziale di 5.0 mg/L scenda a 0.10 mg/L?
2. A ogni somministrazione di una dose, la concentrazione plasmatica aumenta, molto rapidamente, di 5.0 mg/L, poi riprende a decrescere esponenzialmente. Il paziente riceve la prima dose al tempo $t = 0$, e poi una dose ogni 12.0 ore. Rappresenta con un diagramma cartesiano l'andamento della concentrazione plasmatica nelle 48 ore successive alla prima somministrazione.
3. A lungo andare, fra quali valori oscilla la concentrazione plasmatica del paziente?

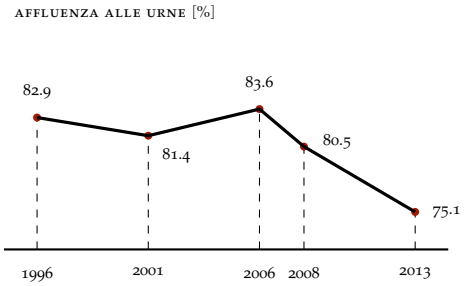
Esercizio 83 (soluzione a p. 296)
La crescita di una popolazione di microorganismi segue la curva logistica

$$P(t) = \frac{P_0 K e^{t/\tau}}{K - P_0 + P_0 e^{t/\tau}}$$

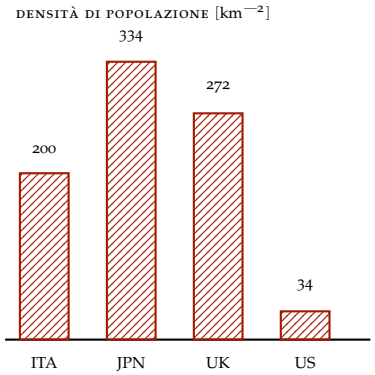
con $P_0 = 1.50 \cdot 10^6$, $K = 3.70 \cdot 10^9$ e $\tau = 2.00\,\mathrm{h}$.

1. Rappresenta l'andamento della popolazione, per tempi compresi fra 0 e 24 ore, in un diagramma cartesiano.
2. Rappresenta la medesima funzione mettendo la popolazione in scala logaritmica.
3. Nelle prime ore, la crescita è approssimativamente esponenziale: rappresenta questa funzione per mezzo di un'espressione analitica, e aggiungi il grafico dell'esponenziale ai due diagrammi precedenti.

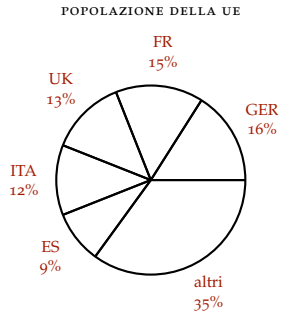
§14 Altri grafici usati in pratica



Grafici a spezzata, per rappresentare serie temporali di dati, soprattutto quando la variazione nel tempo non è continua. Per esempio l'affluenza alle urne è ben definita solo quando si svolgono delle elezioni (per contro, ad esempio, l'altezza della marea nel porto di Genova è una variabile continua).



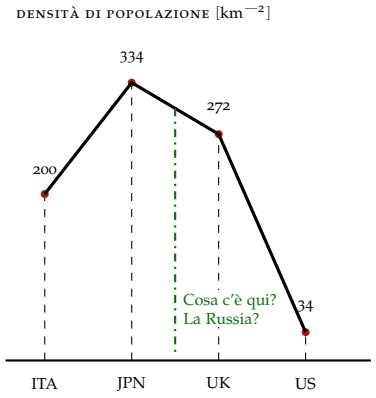
Grafici a barre, per rappresentare collezioni di dati che non formano una sequenza, per cui sono ordinati in un ordine arbitrario o convenzionale.

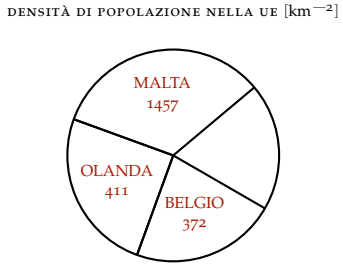


Areogrammi (grafici a torta), per rappresentare la suddivisione di un totale nelle sue parti:

$$\text{angolo} : 360^\circ = \text{percentuale} : 100$$

Infamità — da non fare mai





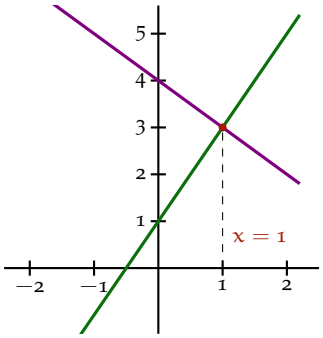
La densità totale della UE è 118 km^{-2}: Malta, con 1457 km^{-2}, sarebbe dunque il 1235% del totale… Le densità non si sommano, quindi non sono le parti di nessun totale.

§15 Soluzione grafica & numerica di equazioni

Risolvere l'equazione $f(x) = g(x)$ significa trovare le ascisse dei punti di intersezione dei grafici di f e g.

Esempio ($2x + 1 = 4 - x$)

$$\underbrace{2x+1}_{f(x)} = \underbrace{4-x}_{g(x)}$$



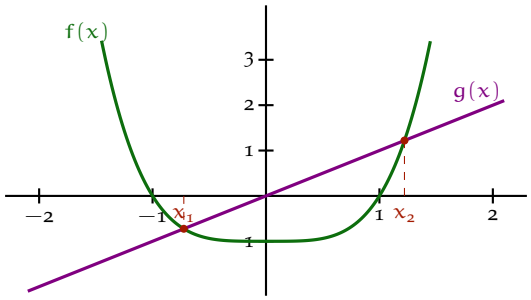
Algebricamente:

$$\begin{aligned} 2x+1 &= 4-x \\ 2x+x &= 4-1 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Esempio (quante soluzioni ha $x^4 - 1 = x$?)
Chiamiamo f e g i due membri dell'equazione,

$$\underbrace{x^4-1}_{f(x)} = \underbrace{x}_{g(x)}$$

e disegniamo i due grafici: si vede che ci sono due intersezioni, quindi l'equazione ha due soluzioni.

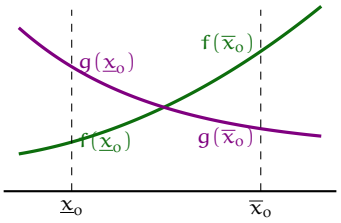


§15.1 Calcolo numerico delle soluzioni

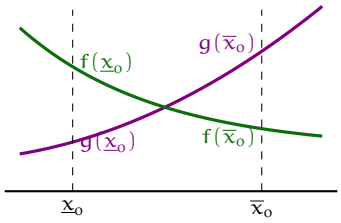
Molte equazioni non possono essere risolte in maniera algebrica — vale a dire per mezzo di formule esatte, come invece capita, per esempio, per le equazioni di primo e secondo grado. In questi casi è possibile stabilire in maniera approssimativa dove si trovino le soluzioni avvalendosi di un grafico, oppure di qualche ragionamento *ad hoc*. Poi le soluzioni possono essere calcolate in maniera numerica, cioè approssimata.

Il metodo più semplice e più sicuro per risolvere numericamente un'equazione è per bisezione. Si parte da due valori $\underline{x}_0$ e $\overline{x}_0$, con $\underline{x}_0 < \overline{x}_0$, tali che i grafici di f e g abbiano,

fra questi due valori, precisamente una intersezione. Ci troviamo quindi in uno dei due casi seguenti.



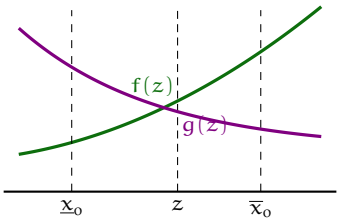
Primo caso



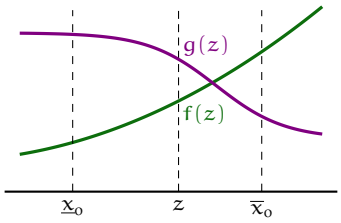
Secondo caso

$$\underbrace{f(\underline{x}_0) < g(\underline{x}_0) \;\text{ e }\; f(\overline{x}_0) > g(\overline{x}_0)}_{\text{primo caso}} \qquad \underbrace{f(\underline{x}_0) > g(\underline{x}_0) \;\text{ e }\; f(\overline{x}_0) < g(\overline{x}_0)}_{\text{secondo caso}}$$

Poniamo di trovarci nel primo caso, altrimenti si procede simmetricamente. Scegliamo un numero z fra $\underline{x}_0$ e $\overline{x}_0$: può capitare che $f(z) > g(z)$ oppure che $f(z) < g(z)$.



Prima situazione



Seconda situazione

$$\underbrace{f(z) > g(z)}_{\text{prima situazione}} \qquad \underbrace{f(z) < g(z)}_{\text{seconda situazione}}$$

Ora, la soluzione x è compresa fra $\underline{x}_0$ e $\overline{x}_0$, ma noi desideriamo intrappolarla in un intervallo più piccolo. Nella prima situazione x è compresa fra $\underline{x}_0$ e z, quindi scriviamo

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 \qquad \overline{x}_1 = z$$

Nella seconda situazione x è fra z e $\overline{x}_0$, quindi scriviamo

$$\underline{x}_1 = z \qquad \overline{x}_1 = \overline{x}_0$$

In ambo i casi abbiamo due nuovi valori $\underline{x}_1$ e $\overline{x}_1$ che racchiudono la soluzione incognita x (poiché le diseguaglianze $f(\underline{x}_1) < g(\underline{x}_1)$ e $f(\overline{x}_1) > g(\overline{x}_1)$ sono invertite l'una rispetto all'altra). Ripetiamo fino ad ottenere $\underline{x}_n$ e $\overline{x}_n$ così vicini che determinano x entro l'approssimazione desiderata.

Nota
Nella scelta di z è importante che si prenda un valore compreso fra $\underline{x}$ e $\overline{x}$, ed è conveniente sceglierlo grosso modo a metà fra $\underline{x}$ e $\overline{x}$. Non c'è nessun obbligo, però, di prendere esattamente il valor medio $\frac{\underline{x}+\overline{x}}{2}$: spesso conviene scegliere un numero con poche cifre, che sia comodo da calcolare.

Esercizio
Calcola la soluzione positiva di $x^4 - 1 = x$, con tre cifre significative di precisione.

Soluzione. Avvalendoci del grafico dell'esempio precedente possiamo iniziare da $\underline{x}_0 = 1$ e $\overline{x}_0 = 1.4$. Vale

$$f(\underline{x}_0) = 0 \quad g(\underline{x}_0) = 1 \qquad f(\overline{x}_0) \approx 2.8 \quad g(\overline{x}_0) = 1.4$$

quindi $f(\underline{x}_0) < g(\underline{x}_0)$ e $f(\overline{x}_0) > g(\overline{x}_0)$: siamo nel primo caso. Scegliamo $z = 1.2$: si ha $f(z) \approx 1.07 < 1.2 = g(z)$, siamo nella seconda situazione e quindi $\underline{x}_1 = 1.2$, $\overline{x}_1 = 1.4$. Proseguendo così:

			passo					
$f(x)$	$g(x)$	x	0	1	2	3	4	5
$0 < 1$		1	$\underline{x}_0$					
$1.07 < 1.2$		1.2	z	$\underline{x}_1$	$\underline{x}_2$	$\underline{x}_3$		
$1.215 < 1.22$		1.22				z	$\underline{x}_4$	$\underline{x}_5$
$1.29 > 1.23$		1.23					z	$\overline{x}_5$
$1.44 > 1.25$		1.25			z	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_4$	
$1.86 > 1.3$		1.3		z	$\overline{x}_2$			
$2.8 > 1.4$		1.4	$\overline{x}_0$	$\overline{x}_1$				

La soluzione x è dunque compresa fra $\underline{x}_5 = 1.22$ e $\overline{x}_5 = 1.23$. Per capire se dobbiamo arrotondare a 1.22 o a 1.23 calcoliamo un ultimo passo ponendo $z = 1.225$:

$$f(z) \approx 1.25 > 1.225 = g(z) \qquad f(\underline{x}_5) = 1.215 < 1.22 = g(\underline{x}_5)$$

Le due diseguaglianze sono invertite, quindi la soluzione è fra 1.22 e 1.225: si approssima

$$x = 1.22$$

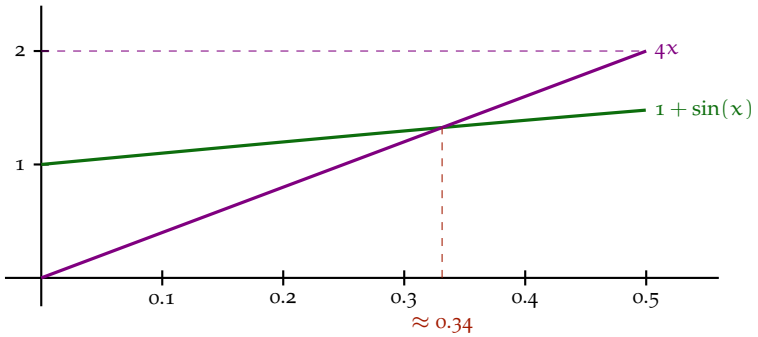
□

Esercizio
Risolvi l'equazione $1 + \sin(x) = 4x$, con tre cifre significative di precisione.

Soluzione. Cominciamo col restringere il campo. Siccome $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, e possiamo riscrivere l'equazione nella forma $\sin(x) = 4x - 1$, abbiamo

$$-1 \leqslant 4x - 1 \leqslant 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$$

Le soluzioni sono quindi obbligate a stare in questo intervallo, e sono questi i valori di x che dobbiamo studiare.



Il grafico ci dice che c'è una sola soluzione, che questa vale forse circa 0.34 e comunque è certamente compresa fra 0.3 e 0.4. Procediamo quindi come nell'esercizio precedente a partire da $\underline{x}_0 = 0.3$ e $\overline{x}_0 = 0.4$. (Attenzione: qui $f(\underline{x}_0) > g(\underline{x}_0)$, siamo cioè nel *secondo* caso.)

			passo						
$f(x)$	$g(x)$	x	0	1	2	3	4	5	6
$1.30 > 1.2$		0.3	$\underline{x}_0$	$\underline{x}_1$					
$1.324 > 1.320$		0.33		z	$\underline{x}_2$	$\underline{x}_3$	$\underline{x}_4$		
$1.325 > 1.324$		0.331					z	$\underline{x}_5$	$\underline{x}_6$
$1.325 < 1.326$		0.3315						z	$\overline{x}_6$
$1.326 < 1.328$		0.332				z	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$	
$1.329 < 1.340$		0.335			z	$\overline{x}_3$			
$1.34 < 1.40$		0.35	z	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$				
$1.39 < 1.6$		0.4	$\overline{x}_0$						

Siamo giunti alla conclusione che la soluzione è compresa fra 0.331 e 0.3315. Espressa con tre cifre significative correttamente arrotondate è quindi

$$x = 0.331$$

Se, per esempio, fosse risultata compresa fra 0.3315 e 0.332, allora avremmo dovuto arrotondare a $x = 0.332$. □

§15.2 Esercizi

Esercizio 84 (soluzione a p. 298)
Determina, con tre cifre significative, la soluzione dell'equazione

$$e^{-x} = x$$

Esercizio 85 (soluzione a p. 298)
La funzione $f(x)$ assume i valori seguenti.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1.00	2.68	4.76	7.16	9.83

Determina, usando il metodo dell'interpolazione lineare, un'approssimazione del valore di $f(3.7)$ ed una della soluzione dell'equazione $f(x) = 15 - x^2$. Esprimi i risultati arrotondati al centesimo.

Esercizio 86 (soluzione a p. 299)
Trova tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sin(x) = 1 - 0.2\,x$$

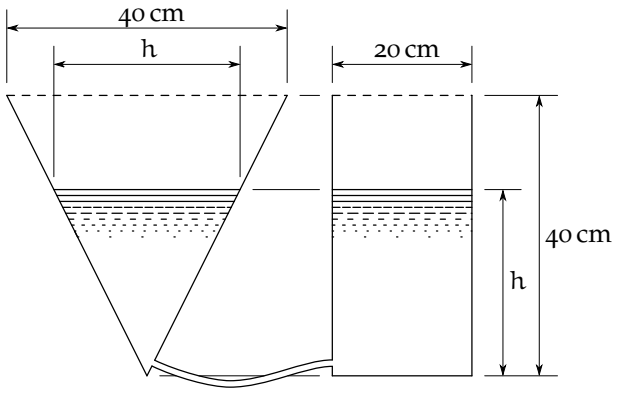
arrotondate alla seconda cifra decimale.

Esercizio 87 (soluzione a p. 301)
Trova la soluzione positiva dell'equazione

$$2x = 3\sin\big(\arctan(x)\big)$$

con almeno tre cifre significative: in modo esatto se puoi, altrimenti in maniera approssimata.

Esercizio 88 (soluzione a p. 302)
L'apparato rappresentato in figura è costituito da due contenitori, uno conico ed uno cilindrico, disposti con il loro asse in posizione verticale. In essi si introduce un certo volume V di acqua. Un tubicino di volume trascurabile connette i due contenitori, così che, per la legge dei vasi comunicanti, il livello h raggiunto dal liquido nei due contenitori coincide.



1. Determina l'espressione analitica della funzione che associa al livello h il corrispondente volume $V(h)$; traccia quindi un grafico cartesiano di questa funzione.
2. Calcola, con la precisione di tre cifre significative, a che livello bisogna

riempire l'apparecchio affinché esso contenga 15.0 litri d'acqua.

3. Supponendo che il volume della domanda precedente sia noto con un errore di $\pm 2\%$, che errore assoluto abbiamo sulla risposta?

Parte II
Elementi di statistica

§16 Introduzione alla statistica

Nota (bibliografia)
Questa parte del corso si basa principalmente su tre testi:

- D. Freedman, R. Pisani, R. Purves, *Statistics*;
- M. Bland, *An Introduction to Medical Statistics*;
- B. Kirkwood, J. Sterne, *Essential Medical Statistics*.

Non è necessario procurarseli: sono tutti al di sopra del livello del corso. Se se ne vuole consultare uno, il primo è quello che spiega i concetti nel modo più intuitivo, con il minimo di apparato tecnico.

§16.1 Probabilità

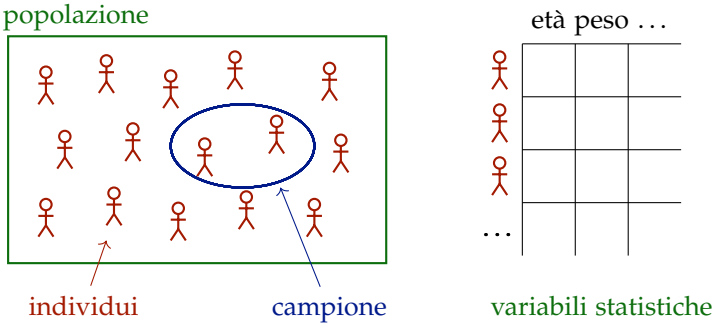
Parlando di statistica faremo spesso riferimento al concetto di probabilità. Per i nostri scopi, non è necessario aver studiato la teoria della probabilità, ma bisogna avere almeno una comprensione intuitiva del concetto.

Quando parliamo di probabilità facciamo sempre riferimento a una situazione in cui un certo evento, controllato dal caso, potrebbe verificarsi oppure no. Adottando il punto di vista detto frequentista, immaginiamo anche di poter replicare la medesima situazione quante volte vogliamo. I lanci di un dado o di una moneta sono esempi classici: gli eventi potrebbero essere per esempio *esce quattro*, o *esce testa*. Anche il decorso di una malattia è un esempio: sebbene non possiamo *ricreare* la situazione, possiamo osservare altri pazienti con la medesima diagnosi. Diciamo allora che la probabilità dell'evento è la proporzione, o la percentuale, di repliche in cui si verificherebbe l'evento, se ricreassimo la situazione un gran numero di volte. Per esempio, se lanciassimo un dado molte volte, a lungo andare, uscirebbe quattro una volta su sei: la probabilità di questo evento è dunque $1/6$, ossia il 16.7% circa. Una situazione tipica in statistica è se prendiamo a caso un individuo di una popolazione: la probabilità che abbia una certa caratteristica è la percentuale degli individui della popolazione che la hanno.

La probabilità di un evento che accade immancabilmente, un evento certo, è 1 o il 100%. La probabilità di un evento impossibile — uno che certamente non accade — è 0. Se la probabilità di un certo evento è p, la probabilità che quell'evento non si verifichi, ossia la probabilità dell'evento complementare, è $1 - p$, ossia $100\% - p$ se p è espressa in percentuale.

§16.2 Popolazione, individui, campione

Si usa la statistica in una situazione di questo genere. C'è una popolazione, cioè un insieme di individui, ciascuno dei quali ha delle caratteristiche dette variabili statistiche. Si osserva un campione, che è un sottoinsieme della popolazione, preso a caso, e da questa osservazione si vuole dedurre qualcosa a proposito dell'intera popolazione. Le parole preso a caso sono il cuore del discorso: la statistica è la disciplina che permette di controllare, e addirittura sfruttare, il caso.



Gli individui non sono necessariamente esseri umani, e neppure necessariamente oggetti concreti. Se studiamo le conseguenze degli incidenti stradali, la popolazione potrebbe essere l'insieme degli incidenti stradali avvenuti in un certo anno in un certo paese; se studiamo le conseguenze di una malattia, la popolazione potrebbe essere l'insieme di tutti i casi di quella malattia: sia quelli presenti, che quelli passati e futuri. La popolazione è l'insieme di tutti gli oggetti omologhi che stiamo considerando.

A ciascun individuo della popolazione sono associate delle caratteristiche: se sono esseri umani, per esempio, l'età, il peso, il sesso, lo stato malato o non malato di influenza, il colore degli occhi, il nome, il cognome. Queste caratteristiche sono le variabili statistiche. Ogni individuo ha un valore per ciascuna variabile.

Infine, un campione è un sottoinsieme casuale degli individui. Questo è il concetto più difficile da definire, perché qui occorrerebbe dire cosa sia il caso. Trascurando questa questione filosofica, resta il problema concreto di come prendere un campione casuale: problema che può essere ostico, su cui torneremo.

Lo scopo della statistica è questo: vogliamo capire qualcosa a proposito di una popolazione, ma non possiamo esaminare l'intera popolazione, perché è troppo vasta o addirittura è un ente puramente concettuale (tutti i casi concepibili di una malattia non si possono concretamente esaminare). Abbiamo accesso soltanto a un campione, e vogliamo estendere quello che vediamo sul campione all'intera popolazione, in maniera ragionevole.

Prendere un campione, però, non vuol dire sceglierlo: se gli individui sono scelti con un criterio, da quelli non si può dedurre nulla sull'intera popolazione. Se scegliessimo come campione degli studenti di un corso tutti quelli seduti al primo banco, ne concluderemmo che sono tutti diligentissimi. Il modo sensato di prendere un campione rappresentativo della popolazione è a caso. Se vogliamo sapere la proporzione di uomini e donne fra gli studenti, possiamo prenderne dieci a caso: è ragionevole che

la proporzione nel campione sia simile a quella dell'intera popolazione; se invece scegliessimo soltanto gente con la barba, chiaramente non lo sarebbe.

La statistica è, in questo senso, teoria della probabilità applicata: parte da un campione casuale e, sfruttando il fatto che è casuale, estende le conclusioni delle osservazioni fatte sul campione all'intera popolazione, misurando quanto questa estensione sia ragionevole. Se, su un campione, un vaccino sembra efficace, la statistica permette di decidere, tenendo conto di quanto sembra efficace e di quanto è numeroso il campione, se la conclusione è estendibile all'intera popolazione, oppure se potrebbe essere un effetto del caso. Tutta la ricerca medica è fatta così.

Nota (piano del corso)
La statistica si divide in due rami:

- la statistica descrittiva, cioè i metodi per descrivere una situazione: tabelle, diagrammi, misure riassuntive;
- la statistica inferenziale, che si occupa di trarre delle conclusioni: dal campione, dedurre se una cosa è plausibile oppure no, basandosi su un criterio scientifico.

Cominceremo dalla statistica descrittiva, per poi passare alla statistica inferenziale.

§16.3 Tipi di variabili statistiche

categoriche	
nominali	es. provincia di nascita, stato di occupazione
ordinali	es. titolo di studio
binarie	due valori, es. sano/malato
numeriche	
discrete	numeri interi, es. numero di fratelli
continue	valori in $\mathbb{R}$, es. peso, statura

Le variabili numeriche sono quelle espresse da un numero: età, peso. Le variabili categoriche sono quelle che non sono espresse da un numero: sesso, colore degli occhi, stato di occupazione.

Le variabili numeriche si distinguono in discrete, che assumono valori interi (non si possono avere due fratelli e mezzo), e continue, che assumono valori reali, su una scala infinitamente divisibile (in teoria il peso si può misurare al milligrammo). Alle volte si può scegliere: l'età in anni compiuti è discreta, l'età misurata esattamente dalla nascita è continua.

Le variabili categoriche si possono suddividere ulteriormente. Le binarie possono assumere due valori (maschio/femmina, sano/malato). Le nominali possono assumere più di due valori, ma senza un ordine (stato di occupazione: disoccupato, in cerca di lavoro, occupato, in pensione; provincia di nascita). Le ordinali sono quelle in cui le categorie hanno un ordine naturale — per esempio il titolo di studio: licenza elementare, licenza media, &c.

Vedremo metodi diversi per trattare le variabili categoriche e quelle numeriche: per esempio con le variabili numeriche si possono calcolare medie e mediane, cosa che con le variabili categoriche non si può fare (qual è lo stato di occupazione medio?).

Importante: variabile numerica significa variabile *quantitativa*, non semplicemente espressa per mezzo di numeri. Il comune di nascita, per esempio, si potrebbe esprimere indicando il CAP, ma questo non lo renderebbe una variabile numerica, perché non ha senso, per esempio, sommare fra loro dei CAP. Alle volte, la distinzione fra una variabile meramente ordinale e una numerica discreta può essere opinabile: per esempio, i valori di soddisfazione "per niente soddisfatto", "poco soddisfatto", "così così", "soddisfatto", "entusiasta" non sono numerici, ma potrebbero anche essere tradotti nei numeri 1–5, e non sarebbe del tutto fuori questione farne la media. Personalmente, non tratterei allo stesso modo i valori "guarigione", "miglioramento", "condizione stazionaria", "peggioramento", "decesso".

§16.4 Frequenze e tabelle

Esempio (indice di massa corporea)
L'indice di massa corporea (IMC, in inglese BMI) è

$$\text{IMC} = \frac{\text{peso}}{\text{statura}^2}$$

misurato in kg/m^2; è pensato come misura dello stato di nutrizione. I dati che seguono sono un estratto, creato a scopo didattico, dal *Framingham Heart Study*, uno dei primi grandi studi sulle malattie cardiovascolari.

IMC	frequenza	freq. relativa
$< 20\,\text{kg}/\text{m}^2$	210	4.9%
20–$25\,\text{kg}/\text{m}^2$	1744	40.3%
25–$30\,\text{kg}/\text{m}^2$	1809	41.8%
30–$35\,\text{kg}/\text{m}^2$	437	10.1%
$\geqslant 35\,\text{kg}/\text{m}^2$	129	3.0%
totale	4329	100.1%

L'IMC è una variabile numerica, ma in questa tabella è stato trasformato in una variabile categorica (ordinale), suddividendo i valori in cinque classi. È un procedimento standard, che si usa per esempio per applicare a variabili numeriche metodi pensati per le variabili categoriche. La convenzione generalmente usata è che le classi includano l'estremo sinistro ed escludano il destro: 20–25 vuol dire da 20 incluso a meno di 25.

Il numero di individui in ciascuna categoria si chiama frequenza (o frequenza assoluta) di quella categoria nel campione. La somma di tutte le frequenze, qui 4329, è la numerosità del campione (o della popolazione, se la tabella riguarda l'intera popolazione). La frazione di individui che ricade in ciascuna categoria, di solito espressa in percentuale, si chiama frequenza relativa:

$$\text{frequenza relativa} = \frac{\text{frequenza}}{\text{numerosità}} \qquad \text{per esempio} \qquad \frac{210}{4329} = 4.9\%$$

Nota importante
Quando si calcolano le frequenze relative conviene fare la somma per controllare che faccia 100%. Può venire 99.8% o 100.1%, come nella tabella qui sopra, per gli arrotondamenti, e va benissimo; se viene molto diverso, c'è un errore.

§16.5 Tabelle di contingenza

Le variabili statistiche non si considerano quasi mai da sole: quello che si cerca, di solito, sono le correlazioni fra variabili diverse. Aggiungiamo alla tabella dell'IMC il numero di individui che, nei 24 anni di osservazione successivi, sono stati ricoverati per un infarto.

	esito		
IMC	infarto	non infarto	totale
$< 20\,\mathrm{kg/m^2}$	8	202	210
$20–25\,\mathrm{kg/m^2}$	118	1626	1744
$25–30\,\mathrm{kg/m^2}$	195	1614	1809
$30–35\,\mathrm{kg/m^2}$	46	391	437
$\geqslant 35\,\mathrm{kg/m^2}$	18	111	129
totale	385	3944	4329

Questa è una tabella di contingenza (o tabella a doppia entrata) e presenta due variabili statistiche: l'IMC e l'esito, una variabile categorica binaria (infarto/non infarto). Ci permette di studiare (vedremo in seguito con quali metodi) la correlazione fra le due variabili: per esempio, se un IMC alto è un fattore di rischio per l'infarto. A occhio sembra di sì: la percentuale di ricoverati per infarto va dal 3.8% (8/210) nella prima classe al 14.0% (18/129) nell'ultima.

Il corpo della tabella contiene la distribuzione congiunta delle due variabili: per ogni combinazione di valori, quanti individui la presentano. I totali di riga e di colonna, ai margini, sono le distribuzioni marginali: le distribuzioni di ciascuna variabile presa da sola. Conoscendo soltanto le distribuzioni marginali, in generale, non si può ricostruire la distribuzione congiunta.

§16.6 Studi clinici randomizzati

Uno dei primi studi condotti con un metodo statistico adeguato, e che oggi si studia nei libri di testo, è quello che nel 1948 ha stabilito l'efficacia della streptomicina nel trattamento della tubercolosi polmonare (Medical Research Council, *British Medical Journal*, 30 ottobre 1948).

valutazione radiologica a sei mesi	streptomicina		controllo	
netto miglioramento	28	51%	4	8%
miglioramento moderato o lieve	10	18%	13	25%
nessun cambiamento sostanziale	2	4%	3	6%
peggioramento moderato o lieve	5	9%	12	23%
netto peggioramento	6	11%	6	11%
decesso	4	7%	14	27%
totale	55	100%	52	100%

Questo studio è famoso per essere stato il primo randomizzato: il campione è stato diviso a caso in due gruppi; il gruppo di trattamento è stato curato con la streptomicina, il gruppo di controllo no. Modernamente si dà spesso un placebo, ma non sempre è possibile; in questo studio il gruppo di controllo è stato trattato come si trattava la tubercolosi all'epoca — vale a dire in nessun modo, perché la tubercolosi non aveva una cura: i pazienti venivano semplicemente tenuti a riposo. Gli autori discutono il problema etico di lasciare alcuni pazienti senza una vera cura: in questo caso, la questione è risolta dal fatto che stavano usando tutta la streptomicina disponibile, e il caso è un metodo di allocazione, se non altro, equo.

I pazienti sono stati trattati con streptomicina per sei mesi, e le loro radiografie sono state valutate da radiologi a cui non era stato detto in che gruppo stessero. La tabella — di contingenza — mostra gli esiti nei due gruppi. In situazioni come questa si parla di variabile indipendente (qui il gruppo) e di variabile dipendente (qui l'esito): la prima è quella che ci aspettiamo possa influenzare la seconda. Qui, l'efficacia del farmaco è evidente a occhio. Quando l'effetto è più debole, però, occorre avere un criterio preciso. I test di significatività (capitolo 21) — ce ne sono vari, che si applicano in base al tipo di esperimento — forniranno precisamente questo criterio.

Perché assegnare i pazienti ai gruppi a caso, e non, per esempio, formando coppie di pazienti il più possibile simili per età, sesso, gravità della malattia? Perché non sappiamo quali variabili influenzino l'esito. Se si divide un gruppo di persone in due a caso, qualunque variabile possa giocare un ruolo (foss'anche i gusti musicali) tende a distribuirsi in modo simile nei due gruppi: il caso uniforma i gruppi rispetto non soltanto alle variabili che conosciamo, ma anche a quelle che non conosciamo. In secondo luogo, sull'effetto del caso abbiamo tutta una serie di metodi matematici, che permettono di distinguerlo dai fenomeni veri e propri — paradossalmente, l'effetto di una scelta deliberata, ancorché ragionevole, sarebbe più difficile da controllare.

§16.7 Variabili confondenti

Come si fa a stabilire se un vaccino funziona? Questa è la storia di uno dei più celebri esperimenti di questo genere: il vaccino contro la poliomielite — una malattia che colpisce i bambini e può causare paralisi permanenti — di Jonas Salk. A posteriori, sappiamo che ha funzionato: grazie alla vaccinazione, questa malattia, un tempo endemica, è stata eliminata dai paesi occidentali, e ne rimangono pochi casi al mondo.

Seguiamo il ragionamento con cui si arriva a un buon esperimento.

1. Si potrebbero vaccinare tutti i bambini, diciamo di una regione, e poi guardare se i casi di poliomielite calano. Non funziona: le malattie infettive vanno a ondate, e i casi possono calare o aumentare da un anno all'altro per conto loro.

2. Potremmo vaccinare soltanto metà dei bambini, per poi confrontare i casi fra vaccinati e non vaccinati: le ondate epidemiche colpiscono tutti allo stesso modo. Non è fattibile: non si può obbligare nessuno a sottomettersi all'esperimento, tanto più che un vaccino si somministra a persone sane: c'è il problema del consenso.

3. Potremmo vaccinare chi acconsente e usare gli altri come controllo. Non funziona: può darsi che l'esposizione alla malattia sia correlata con la volontà di vaccinarsi. Se chi acconsente è più esposto, il vaccino sembrerà meno efficace di quanto è; se è meno esposto, più efficace.

4. Prima si chiede il consenso, poi, fra chi ha acconsentito, si decide a caso chi vaccinare e chi mettere nel gruppo di controllo. Così i due gruppi sono uniformi. Resta un problema: chi sa di essere vaccinato potrebbe comportarsi diversamente (prendere più rischi) da chi non lo è.

5. Allora la scelta si fa a caso, e al gruppo di controllo si fa un'iniezione di soluzione fisiologica, indistinguibile dal vaccino: né il paziente né il medico sanno in che gruppo è il paziente. Si parla di esperimento in doppio cieco.

Ancora non abbiamo un esperimento perfetto, principalmente perché la statistica riguarda soltanto chi acconsente, e si deve supporre che le conclusioni ricavate da questo gruppo si applichino a tutta la popolazione. Questa è un'ipotesi ragionevole, e, d'altro canto, senza ledere la libertà dei pazienti non c'è altra soluzione. Più in generale, se il trattamento non si esaurisce in una singola iniezione, qualcuno potrebbe interromperlo a metà. La scelta più sensata è classificarlo comunque secondo il gruppo a cui era stato assegnato all'inizio (analisi intention to treat), ma sfavorisce il trattamento, e non c'è una soluzione perfetta. Infine, non in tutti gli studi è possibile il doppio cieco: chi viene operato sa di essere stato operato.

Esempio (il vaccino di Salk)
Nel 1954 fu sperimentato su larga scala il vaccino contro la poliomielite sviluppato da Jonas Salk. La tabella seguente riporta i risultati di due studi condotti in parallelo (T. Francis, *American Journal of Public Health*, 1955); il tasso è il numero di casi di poliomielite ogni 100 000 bambini.

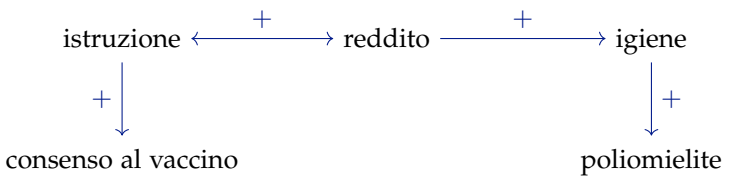
studio randomizzato in doppio cieco			studio NFIP		
	numero	tasso		numero	tasso
trattamento	200 000	28	classe seconda (vaccino)	225 000	25
controllo	200 000	71	classi prima e terza (controllo)	725 000	54
non consenso	350 000	46	classe seconda (non consenso)	125 000	44

Si sperimentarono due diversi protocolli. Nello studio di destra (della National Foundation for Infantile Paralysis), si è proceduto per classi scolastiche: si sono vaccinati i bambini di seconda, e i bambini di prima e di terza hanno fatto da controllo. Questo è un difetto, perché le malattie infettive sono correlate con il tempo e con lo spazio: se il contagio si diffonde in certe classi seconde, sembrerà che il vaccino non funzioni; se si diffonde in certe classi prime o terze, sembrerà che funzioni — e il vaccino non c'entra niente. Fattori come questi si chiamano variabili confondenti: variabili correlate sia con il trattamento sia con l'esito che si studia. C'è un secondo difetto: il gruppo di trattamento è costituito solo da bambini i cui genitori hanno dato il consenso, mentre questa selezione non è stata operata sul gruppo di controllo.

Lo studio di sinistra è quello fatto bene, secondo lo schema del punto 5: controllato (c'è un gruppo di controllo), randomizzato (l'assegnazione ai gruppi è casuale) e in doppio cieco (le fiale di vaccino e di soluzione fisiologica erano contrassegnate da un codice, e solo chi aveva progettato l'esperimento sapeva che cosa contenesse ciascuna). La tabella riporta tre gruppi: trattamento, controllo e non consenso — il consenso è stato acquisito prima della divisione in trattamento e controllo (né può essere altrimenti, stante che ambo i gruppi hanno ricevuto un'iniezione).

Il vaccino funziona: 28 casi ogni 100 000 bambini nel gruppo di trattamento, contro 71 nel gruppo di controllo. Ma si guardi il gruppo del non consenso: non è stato vaccinato, eppure ha solo 46 casi ogni 100 000, molti più dei vaccinati, ma molti meno del gruppo di controllo! Chi decide di vaccinarsi ha una probabilità di ammalarsi diversa da chi decide di non farlo. Questo mostra che era necessario assegnare i gruppi dopo avere chiesto il consenso: se si fosse confrontato chi decide di vaccinarsi con chi non si vaccina, il confronto sarebbe stato falsato.

Perché chi non voleva vaccinarsi aveva una probabilità di ammalarsi inferiore rispetto al gruppo di controllo? La ragione è una catena di correlazioni:



All'epoca, la poliomielite era endemica: quasi tutti la prendevano, ma da piccolissimi, e, presa nei primissimi anni di età, dà luogo per lo più a sintomi lievi e nessuna conseguenza. I casi paralitici si sviluppano, invece, in chi la contrae da più grande. Questo ha una conseguenza apparentemente paradossale: i casi più gravi hanno una correlazione positiva con il livello di igiene — infatti, i bambini che vivevano in condizioni igieniche migliori erano meno esposti al contagio, quindi contraevano la malattia da più grandi, ossia nel periodo pericoloso. L'igiene aveva, poi, una correlazione positiva col reddito delle famiglie, e il reddito è correlato col grado di istruzione. Infine, l'istruzione ha — o almeno aveva — una correlazione positiva con la propensione a far vaccinare i propri figli. Morale: le variabili confondenti possono fare giri strani; uno studio randomizzato in doppio cieco serve proprio a difendersi da quelle che non si conoscono.

§16.8 Studi osservazionali

Gli studi visti finora sono studi di intervento: si interviene sugli individui. A volte non è possibile. La tabella seguente viene da uno studio sulla possibile correlazione fra uso della pillola anticoncezionale e pressione arteriosa (pressione sistolica, in millimetri di mercurio; *Walnut Creek Contraceptive Drug Study*).

	età 17–24		età 25–34		età 35–44		età 45–58	
pressione	no	sì	no	sì	no	sì	no	sì
sotto 90	–	1	1	–	1	1	1	–
90–95	1	–	1	–	2	1	1	1
95–100	3	1	5	4	5	4	4	2
100–105	10	6	11	5	9	5	6	4
105–110	11	9	11	10	11	7	7	7
110–115	15	12	17	15	15	12	11	10
115–120	20	16	18	17	16	14	12	9
120–125	13	14	11	13	9	11	9	8
125–130	10	14	9	12	10	11	11	11
130–135	8	12	7	10	8	10	10	9
135–140	4	6	4	5	5	7	8	8
140–145	3	4	2	4	4	6	7	9
145–150	2	2	2	2	2	5	7	9
150–155	–	1	1	1	1	3	2	4
155–160	–	–	–	1	1	1	1	3
160 e oltre	–	–	–	–	1	2	2	5
totale (%)	100	98	100	99	100	100	99	99
numero	1206	1024	3040	1747	3494	1028	2172	437

I valori sono percentuali di ciascuna colonna; "sì" e "no" indicano l'uso della pillola; – vuol dire trascurabile. Le classi includono l'estremo sinistro e non il destro; per gli arrotondamenti le colonne possono non sommare a 100.

Uno studio randomizzato qui non si può fare: né il placebo né il doppio cieco sono proponibili. Si tratta di uno studio osservazionale: si sono semplicemente raccolti i dati di donne che usano, o non usano, la pillola, per scelta propria. In questa situazione non ci si può fidare del caso per neutralizzare le variabili confondenti. La più evidente è l'età: la proporzione di utilizzatrici fra le donne giovani è molto diversa da quella fra le donne più anziane, e la pressione è correlata con l'età. Se si confrontasse la pressione media di tutte le utilizzatrici con quella di tutte le non utilizzatrici, le seconde

risulterebbero in media più anziane, e il confronto sarebbe falsato. Per questo la tabella è suddivisa anche per età: presenta tre variabili statistiche (pressione, età, uso della pillola). La speranza è che, facendo il confronto colonna per colonna, l'effetto della distribuzione di età si annulli. In uno studio osservazionale non c'è altro da fare che pensare a tutte le possibili variabili confondenti e tenerne conto in qualche modo.

§16.9 Il paradosso di Simpson

Le statistiche vengono spesso usate per argomentare circa lo stato delle cose e le decisioni da prendere. C'è però sempre un passaggio logico nascosto: quello che porta dal dato numerico alla conclusione sostanziale. Per sapersi difendere, intellettualmente, dall'errore comune, o dalla malizia del venditore di aspirapolveri di turno, occorre rendersi conto della necessità di capire cosa i dati grezzi dicano davvero, e poi avere i dati, e anche saperlo fare.

Esempio
In una grande università, l'accesso ai corsi di laurea è regolato da una prova d'ingresso. Il tasso di successo è

$$\text{tasso di successo} = \frac{\text{numero ammessi}}{\text{numero iscritti alla prova}}$$

Due burocrati, per sostenere agende politiche diverse, fanno le seguenti affermazioni:

Burocrate A: "Il tasso di successo delle donne è minore di quello degli uomini!"

Burocrate B: "In tutti i corsi, il tasso di successo delle donne è maggiore!"

Possono avere ragione tutti e due? Ecco i dati — la vicenda è avvenuta davvero; i numeri sono semplificati; i due burocrati sono personaggi di fantasia.

	donne			uomini		
corso	iscritte	ammesse	tasso di s.	iscritti	ammessi	tasso di s.
A	100	80	80%	800	600	75%
B	200	150	75%	500	250	50%
C	400	80	20%	400	60	15%
D	500	50	10%	200	10	5%
totale	1200	360	30%	1900	920	48%

In ciascun corso le donne hanno un tasso di successo maggiore degli uomini; eppure, nel complesso, gli uomini hanno un tasso maggiore: 48% contro 30%. Hanno ragione tutti e due. Com'è possibile? Il corso A è chiaramente il più accessibile (entrano quasi tutti) e il corso D il più esclusivo (non entra quasi nessuno); la maggioranza degli uomini si è iscritta al corso A, la maggioranza delle donne al corso D. Le donne hanno un tasso di successo complessivo minore perché, in maggioranza, hanno tentato la prova di ingresso più difficile.

Questo fenomeno si chiama paradosso di Simpson. Ci dice che nessuno dei due burocrati ha capito che cosa stesse succedendo: la questione vera è che le iscrizioni non sono distribuite uniformemente fra i corsi, e che la difficoltà delle prove non è uniforme. Entrambi dicevano il vero, ed entrambi non avevano capito niente. La statistica è una cosa complicata, e conviene studiarla nei dettagli.

§17 Statistica descrittiva per variabili numeriche

Consideriamo una variabile statistica X di tipo numerico. Supponiamo che X assuma i valori

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_n$$

sugli n individui di una popolazione, o di un campione, che intendiamo studiare (usiamo le lettere maiuscole per le variabili, le minuscole per i loro valori). Definiremo ora alcune misure statistiche che permettono di quantificare determinate proprietà salienti della variabile X.

§17.1 Media, varianza e deviazione standard

Definizione (media)

$$\mu_X = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

(il pedice dice di quale variabile si tratta: quando non c'è rischio di confusione, scriviamo semplicemente μ).

La media è una misura di tendenza centrale, ossia intende dare un'idea del valore tipico o centrale di X.

Definizione (varianza)

$$\sigma_X^2 = \frac{(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2}{n}$$

La varianza è una misura di dispersione, ossia vorrebbe misurare quanto sono sparsi i valori di X.

Definizione (deviazione standard)

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

Anche la deviazione standard è una misura di dispersione. Ha il vantaggio, rispetto alla varianza, di essere commensurabile con X e μ_X.

Esempio
Se X è misurata in cm, la varianza σ_X^2 è misurata in cm^2, mentre μ_X e σ_X in cm.

Grossolanamente, σ_X è la distanza tipica dei valori di X dalla loro media μ_X. Per esempio, si può dimostrare il fatto seguente.

Fatto
Per almeno il 75% degli individui

$$\mu_X - 2\sigma_X < X < \mu_X + 2\sigma_X$$

Definizione (varianza campionaria)

$$s_X^2 = \frac{(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \ldots + (x_n - \mu_X)^2}{n-1}$$

Questa formula differisce da quella della varianza solo per una piccola correzione al denominatore, che diviene trascurabile per n grandi.

Definizione (deviazione standard campionaria)

$$s_X = \sqrt{s_X^2}$$

La varianza e la deviazione standard campionarie, come la media calcolata su un campione, servono da stimatori, ossia quantità pensate per stimare, usando un campione, le misure corrispondenti relative alla popolazione. Vedremo come si può quantificare l'incertezza in queste stime dovuta alla casualità del campione.

Notazione
Le formule con n e con $n-1$ al denominatore si possono applicare a qualunque insieme di individui, che sia una popolazione o un campione: σ indica sempre la prima, s la seconda. Quando occorre precisare l'insieme su cui una misura è calcolata, lo scriviamo fra parentesi: per esempio $\mu_X(\text{campione})$, $\sigma_X(\text{popolazione})$.

Osservazione
Valgono le seguenti identità algebriche che possono semplificare il calcolo di varianza e varianza campionaria.

$$\sigma_X^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \mu_X^2$$
$$s_X^2 = \sigma_X^2 \cdot \frac{n}{n-1}$$

§17.2 Mediana e quantili

Ora descriviamo una categoria di misure che dipendono dai valori di X disposti in ordine crescente. Riordiniamo quindi i numeri

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_n$$

ottenendo la lista, identificata dalle parentesi a pedice,

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant x_{(3)} \leqslant \dots \leqslant x_{(n)}$$

Esempio
Se $x_1 = 7$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$, $x_4 = 7$, $x_5 = 3$, allora $x_{(1)} = 1$, $x_{(2)} = 3$, $x_{(3)} = 3$, $x_{(4)} = 7$, $x_{(5)} = 7$.

Definizione (mediana)
La mediana è il valore centrale della lista ordinata. Questo è ben definito se n è dispari, altrimenti si prende la media aritmetica dei due valori centrali.

$$\tilde{X} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right) & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Come la media, anche la mediana è una misura di tendenza centrale.

Idealmente, la mediana è il valore centrale della lista ordinata. Se siamo interessati al valore che si colloca, per esempio, a $\frac{2}{3}$ della lista, allora calcoliamo il $\frac{2}{3}$-esimo quantile.

Definizione (quantili)
Dato un numero p fra 0 e 1, il p-esimo quantile di X è il valore q_p per cui la frazione di individui sul totale della popolazione che hanno $X < q_p$ è p.

In pratica, se la popolazione è una lista finita di valori, come i dati di un campione, ci troviamo spesso di fronte alla medesima difficoltà della mediana nel caso pari: che la frazione p della lista non cade esattamente su un individuo, ma nell'intervallo fra due individui consecutivi. Possiamo applicare la regola seguente.

Regola (calcolo dei quantili)
Dato un numero reale p con $0 < p < 1$, calcoliamo il p-esimo quantile q_p come segue.

1. Calcoliamo il numero
$$k = 1 + p \cdot (n - 1)$$
2. Dividiamo k nella sua parte intera $\lfloor k \rfloor$ e nella sua parte frazionaria $\mathrm{frac}(k)$.

3. Poniamo

$$\begin{aligned} q_p &= x_{(\lfloor k \rfloor)} \cdot \big(1 - \mathrm{frac}(k)\big) + x_{(\lfloor k \rfloor + 1)} \cdot \mathrm{frac}(k) \\ &= x_{(\lfloor k \rfloor)} + \mathrm{frac}(k) \cdot \big(x_{(\lfloor k \rfloor + 1)} - x_{(\lfloor k \rfloor)}\big) \end{aligned}$$

Esempio
Per esempio, se $k_1 = 4.742$, allora $\lfloor k_1 \rfloor = 4$ e $\mathrm{frac}(k_1) = 0.742$; se $k_2 = 6$, allora $\lfloor k_2 \rfloor = 6$ e $\mathrm{frac}(k_2) = 0$.

Esercizio
Calcola lo 0.75-esimo quantile di

$$x_1 = 4.1 \quad x_2 = 6.2 \quad x_3 = 1.0 \quad x_4 = 2.7 \quad x_5 = 5.6 \quad x_6 = 4.1$$

Soluzione. Abbiamo

$$x_{(1)} = 1.0 \quad x_{(2)} = 2.7 \quad x_{(3)} = 4.1 \quad x_{(4)} = 4.1 \quad x_{(5)} = 5.6 \quad x_{(6)} = 6.2$$

$$k = 1 + 0.75 \cdot (6 - 1) = 4.75 \qquad \lfloor k \rfloor = 4 \qquad \mathrm{frac}(k) = 0.75$$

$$q_{0.75} = x_{(4)} + 0.75 \cdot \big(x_{(5)} - x_{(4)}\big) = 4.1 + 0.75 \cdot 1.5 = 5.225$$

□

Osservazione
Lo 0.5-esimo quantile $q_{0.5}$ coincide esattamente con la mediana $\tilde{X}$.

Nota (altre definizioni)
Per i quantili *di un campione* esistono diverse definizioni. La nostra è quella di R e di Excel; molte calcolatrici prendono invece come 0.75-esimo quantile la mediana della metà superiore dei dati: nell'esercizio, 5.6 anziché 5.225. In questo corso vale la regola qui sopra.

§17.3 Quartili, decili, percentili

(Attenzione: quartili ≠ quantili.) Per $j = 1, 2, 3$ si chiama j-esimo quartile, denotato con Q_j, il quantile $q_{j/4}$. Per cui:

$Q_1 = q_{0.25}$	si dice primo quartile
$Q_2 = q_{0.5} = \tilde{X}$	si dice secondo quartile
$Q_3 = q_{0.75}$	si dice terzo quartile

La differenza interquartile è una misura di dispersione e vale

$$\mathrm{IQR} = Q_3 - Q_1 \qquad \textit{(inter-quartile range)}$$

Osservazione
L'intervallo di valori di X fra Q_1 e Q_3 contiene circa il 50% degli individui. Circa il 25% ha $X < Q_1$, e il restante 25% ha $Q_3 < X$.

Per $j = 1, 2, \ldots, 9$ si chiama j-esimo decile il valore

$$D_j = q_{j/10}$$

Per $j = 1, 2, \ldots, 99$ si chiama j-esimo centile, o anche j-esimo percentile, il valore

$$P_j = q_{j/100}$$

Chiaramente si ha

$$P_{25} = Q_1 = q_{0.25} \qquad P_{50} = Q_2 = q_{0.5} = \tilde{X} \quad \text{(la mediana)} \qquad P_{75} = Q_3 = q_{0.75}$$

inoltre $D_j = P_{10 \cdot j}$.

Esercizio
La variabile statistica X assume sui 10 individui di un campione i valori

$$\begin{array}{lllll} 10.4\,^\circ\mathrm{C} & 8.5\,^\circ\mathrm{C} & 9.1\,^\circ\mathrm{C} & 9.0\,^\circ\mathrm{C} & 10.0\,^\circ\mathrm{C} \\ 11.5\,^\circ\mathrm{C} & 9.2\,^\circ\mathrm{C} & 8.8\,^\circ\mathrm{C} & 10.2\,^\circ\mathrm{C} & 9.7\,^\circ\mathrm{C} \end{array}$$

Calcola μ_X, σ_X, s_X, $\tilde{X}$, IQR.

Soluzione.

$$\begin{aligned} \mu_X &= 9.64\,^\circ\mathrm{C} \\ \sigma_X^2 &= \frac{(10.4\,^\circ\mathrm{C} - 9.64\,^\circ\mathrm{C})^2 + (8.5\,^\circ\mathrm{C} - 9.64\,^\circ\mathrm{C})^2 + \ldots}{10} \\ &= \frac{(0.76\,\mathrm{K})^2 + (-1.14\,\mathrm{K})^2 + \ldots}{10} = 0.7384\,\mathrm{K}^2 \\ \sigma_X &= \sqrt{\sigma_X^2} \approx 0.86\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

Nota
La variabile X è una temperatura, misurata sulla scala Celsius. La media μ_X è misurata nella medesima scala. Perché, allora, la deviazione standard σ_X è misurata in kelvin? Per capirlo occorre risalire alle differenze $10.4\,^\circ\mathrm{C} - 9.64\,^\circ\mathrm{C}$ &c., a numeratore nel calcolo di σ_X^2.

Burocraticamente, il sistema SI permette di scrivere le differenze in entrambe le forme:

A. $27\,^\circ\mathrm{C} - 20\,^\circ\mathrm{C} = 7\,\mathrm{K}$ e

B. $27\,^\circ\mathrm{C} - 20\,^\circ\mathrm{C} = 7\,^\circ\mathrm{C}$

sono entrambe corrette. Personalemnte, tuttavia, preferisco la forma A. Questa scrittura ha il vantaggio di sottolineare che il risultato 7 K è una differenza di

temperature — *sette gradi della scala* — e non una temperatura — *il settimo grado della scala*. Temperature e differenze di temperature sono dati di tipo diverso. La situazione è evidente se abbiamo appena calcolato — appunto come nell'esempio di A e B — una differenza, ma c'è rischio di confusione quando la grandezza in questione esce da cacloli più complessi, come per esempio la σ_X appena vista.

$$\begin{aligned} s_X^2 &= \frac{(10.4\,°\mathrm{C} - 9.64\,°\mathrm{C})^2 + (8.5\,°\mathrm{C} - 9.64\,°\mathrm{C})^2 + \dots}{9} \\ &= \frac{(0.76\,\mathrm{K})^2 + (-1.14\,\mathrm{K})^2 + \dots}{9} = 0.8204\,\mathrm{K}^2 \\ s_X &= \sqrt{s_X^2} \approx 0.91\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

Mettendo in ordine i dati otteniamo

$x_{(9)}$	$x_{(1)}$	$x_{(4)}$	$x_{(3)}$	$x_{(7)}$
10.4 °C	8.5 °C	9.1 °C	9.0 °C	10.0 °C
11.5 °C	9.2 °C	8.8 °C	10.2 °C	9.7 °C
$x_{(10)}$	$x_{(5)}$	$x_{(2)}$	$x_{(8)}$	$x_{(6)}$

Quindi

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \frac{1}{2}\left(x_{(5)} + x_{(6)}\right) = 9.45\,°\mathrm{C} \\ Q_1 &= q_{0.25} = x_{(3)} + 0.25\left(x_{(4)} - x_{(3)}\right) = 9.025\,°\mathrm{C} \\ Q_3 &= q_{0.75} = x_{(7)} + 0.75\left(x_{(8)} - x_{(7)}\right) = 10.15\,°\mathrm{C} \\ \mathrm{IQR} &= Q_3 - Q_1 \approx 1.13\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

□

§17.4 Istogrammi

Gli istogrammi sono una maniera conveniente per rappresentare la distribuzione di variabili numeriche. Vediamo un esempio: vogliamo rappresentare la distribuzione della variabile statura che assume i valori seguenti, in cm, su un campione di 36 individui.

15	0468899
16	000013334455555778889
17	00115588

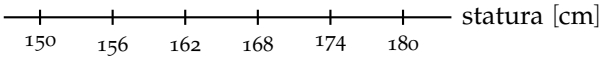
Equivale alla lista 150, 154, 156, 158, 158, 159, 159, 160, ...: a sinistra della barra ci sono centinaia e decine, a destra le unità.

Nota
Questa rappresentazione dei dati si chiama diagramma ramo-foglia (*stem-and-leaf plot*). I dati sono le stature delle studentesse del corso, raccolte a lezione.

Tutti i valori ricadono nell'intervallo 150–180. Cominciamo col dividere questo intervallo in un numero ragionevole di classi, per esempio

150–156 156–162 162–168 168–174 174–180

Per convenzione, intendiamo le classi con l'estremo sinistro incluso e il destro escluso. Non è necessario che tutte le classi della suddivisione abbiano la medesima larghezza. Rappresentiamo la suddivisione così ottenuta sull'asse delle ascisse.



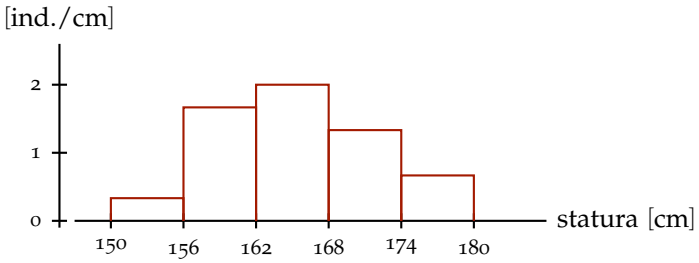
Ora, su ciascuna classe, solleviamo una colonna la cui area rappresenta il numero di individui in quella classe.

150–156	156–162	162–168	168–174	174–180
2 ind.	10 ind.	12 ind.	8 ind.	4 ind.

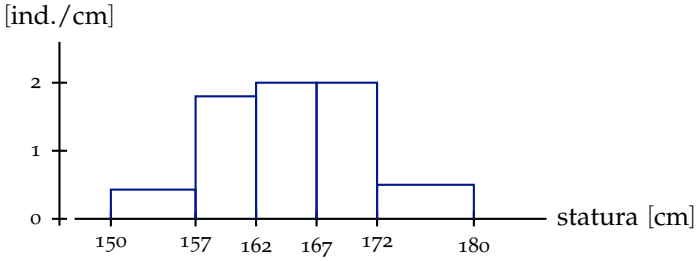
Siccome i lati orizzontali delle colonne sono misurati in cm, affinché le aree risultino misurate in individui, le altezze devono essere misurate in individui/cm. Queste quantità si chiamano densità di frequenza, e si calcolano dividendo il numero di individui in ciascuna colonna per la larghezza della colonna stessa.

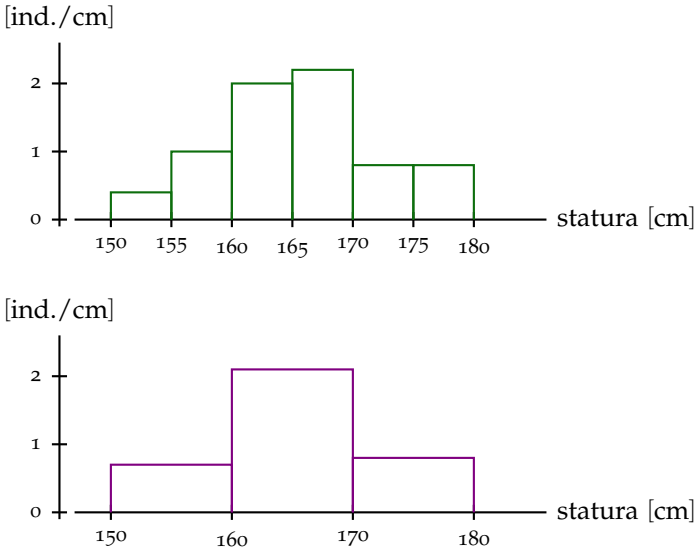
150–156	156–162	162–168	168–174	174–180
2 ind.	10 ind.	12 ind.	8 ind.	4 ind.
$0.33\ \frac{\text{ind.}}{\text{cm}}$	$1.67\ \frac{\text{ind.}}{\text{cm}}$	$2.00\ \frac{\text{ind.}}{\text{cm}}$	$1.33\ \frac{\text{ind.}}{\text{cm}}$	$0.67\ \frac{\text{ind.}}{\text{cm}}$

L'istogramma risultante è come segue.

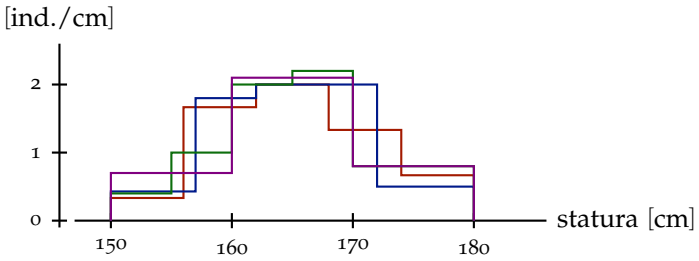


La scelta delle classi è arbitraria: ecco altri esempi.





Sovrapponendo questi grafici possiamo osservare che, grossolanamente, la forma dell'istogramma non dipende dalla scelta delle classi, purché questa sia ragionevole.



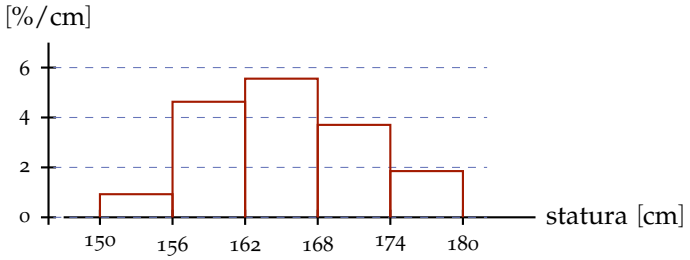
Se avessimo rappresentato il numero di individui tramite l'altezza anziché l'area delle colonne, i diversi grafici non sarebbero stati in accordo fra loro.

La densità di frequenza è stata definita in maniera tale che l'area di ciascuna colonna sia il numero di individui nella classe corrispondente. Di conseguenza, l'area dell'intero istogramma è il numero totale degli individui.

C'è una seconda maniera di graduare l'asse delle ordinate, detta densità di probabilità. La densità di probabilità è semplicemente la densità di frequenza divisa per il totale degli individui (la numerosità del campione — o della popolazione). In questo modo, l'area dell'istogramma è 1. L'unità di misura della densità di frequenza è individui/unità delle ascisse; quella della densità di probabilità è 1/unità delle ascisse. La densità di probabilità si può altresì esprimere in percentuale: in questo caso l'unità sarà %/unità delle ascisse e l'area dell'istogramma 100%.

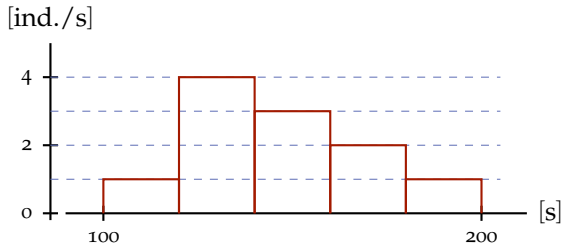
Nel nostro esempio abbiamo

150–156	156–162	162–168	168–174	174–180
2 ind.	10 ind.	12 ind.	8 ind.	4 ind.
$0.33\ \frac{\text{ind.}}{\text{cm}}$	$1.67\ \frac{\text{ind.}}{\text{cm}}$	$2.00\ \frac{\text{ind.}}{\text{cm}}$	$1.33\ \frac{\text{ind.}}{\text{cm}}$	$0.67\ \frac{\text{ind.}}{\text{cm}}$
$0.9\ \frac{\%}{\text{cm}}$	$4.6\ \frac{\%}{\text{cm}}$	$5.6\ \frac{\%}{\text{cm}}$	$3.7\ \frac{\%}{\text{cm}}$	$1.9\ \frac{\%}{\text{cm}}$

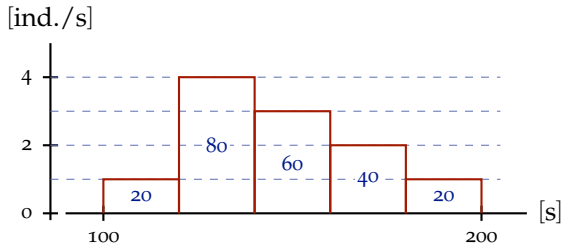


Osservazione
La forma dell'istogramma non cambia: è solo la scala delle ordinate a cambiare.

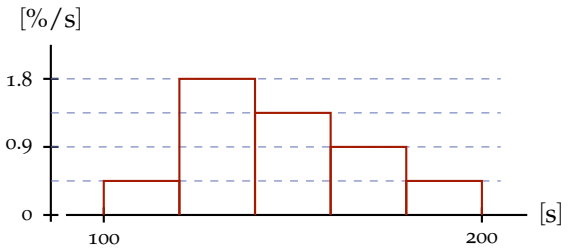
Esercizio
Converti la scala delle ordinate da densità di frequenza a densità di probabilità nel seguente istogramma.



Soluzione. Dobbiamo determinare la numerosità del campione rappresentato. Calcoliamo quindi l'area di ciascuna colonna.



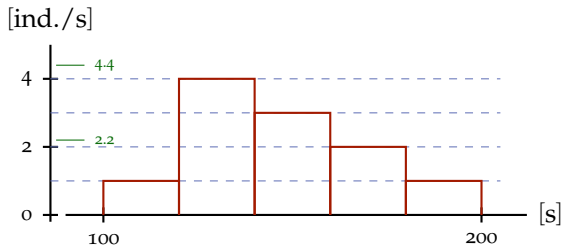
Abbiamo quindi $n = 220$. Potremmo ora calcolare che 2 ind./s equivalgono a $\frac{2}{220} \cdot 100\,\%/s = 0.9\,\%/s$ e similmente 4 ind./s sono 1.8 %/s. Otterremmo così il grafico seguente.



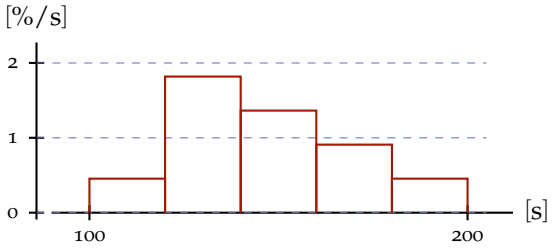
Questo risultato è però insoddisfacente, perché sarebbe meglio avere le cifre tonde 1 %/s e 2 %/s sull'asse delle ordinate. Calcoliamo dunque a quali densità di frequenza corrispondono queste densità di probabilità:

$$1\,\frac{\%}{\text{s}} \text{ corrisponde a } \frac{1\%}{100\%} \cdot 220\,\frac{\text{ind.}}{\text{s}} = 2.2\,\frac{\text{ind.}}{\text{s}}$$
$$2\,\frac{\%}{\text{s}} \text{ corrisponde a } \frac{2\%}{100\%} \cdot 220\,\frac{\text{ind.}}{\text{s}} = 4.4\,\frac{\text{ind.}}{\text{s}}$$

Usiamo ora queste equivalenze per trovare la posizione di 1 %/s e 2 %/s sull'asse delle ordinate.



Per cui questo è l'istogramma richiesto.



□

§17.5 Diagrammi a scatola

Un modo compatto di rappresentare la distribuzione di una variabile numerica, molto usato negli articoli scientifici, è il diagramma a scatola (*box plot*, o *box-and-whisker plot*: diagramma a scatola e baffi). Si costruisce a partire dai quartili.

- Si disegna una scatola che va da Q_1 a Q_3: la sua lunghezza è la differenza interquartile, e contiene circa metà degli individui.
- Dentro la scatola si segna la mediana.
- Dai due lati della scatola partono due baffi, che arrivano fino al valore più piccolo e al valore più grande dei dati che non distano dalla scatola più di $1.5 \cdot \text{IQR}$, cioè che stanno fra
$$Q_1 - 1.5 \cdot \text{IQR} \qquad \text{e} \qquad Q_3 + 1.5 \cdot \text{IQR}$$
- I dati che cadono fuori da questo intervallo si disegnano uno per uno, come punti: sono gli outlier (in italiano: valori anomali).

Esercizio
Disegna il diagramma a scatola delle stature delle studentesse ($n = 36$). La lista ordinata è quella del diagramma ramo-foglia.

Soluzione. Per Q_1, $\tilde{X}$ e Q_3 troviamo rispettivamente

$$k = 1 + 0.25 \cdot 35 = 9.75 \qquad k = 1 + 0.5 \cdot 35 = 18.5 \qquad k = 1 + 0.75 \cdot 35 = 27.25$$

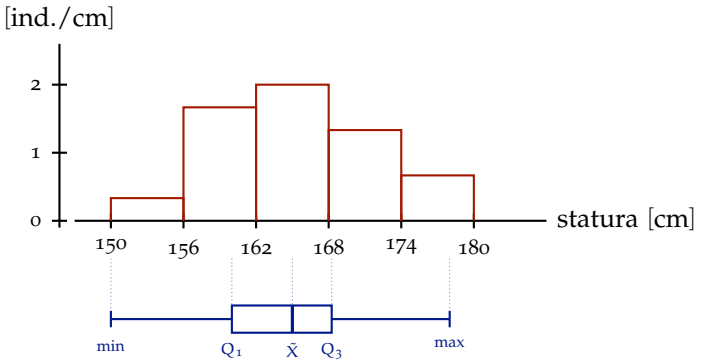
quindi

$$\begin{aligned} Q_1 &= x_{(9)} + 0.75\,(x_{(10)} - x_{(9)}) = 160\,\text{cm} + 0.75 \cdot 0\,\text{cm} = 160\,\text{cm} \\ \tilde{X} &= x_{(18)} + 0.5\,(x_{(19)} - x_{(18)}) = 165\,\text{cm} + 0.5 \cdot 0\,\text{cm} = 165\,\text{cm} \\ Q_3 &= x_{(27)} + 0.25\,(x_{(28)} - x_{(27)}) = 168\,\text{cm} + 0.25 \cdot 1\,\text{cm} = 168.25\,\text{cm} \end{aligned}$$

Dunque $\text{IQR} = 8.25\,\text{cm}$, e i baffi possono arrivare fino a

$$Q_1 - 1.5 \cdot \text{IQR} = 147.625\,\text{cm} \qquad \text{e} \qquad Q_3 + 1.5 \cdot \text{IQR} = 180.625\,\text{cm}$$

Tutti i dati cadono in questo intervallo: i baffi arrivano quindi al minimo, 150 cm, e al massimo, 178 cm, e non ci sono outlier. Ecco il diagramma, sotto l'istogramma degli stessi dati.

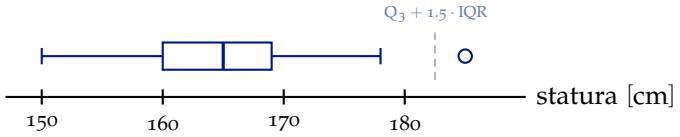


□

Esempio
Aggiungiamo, fittiziamente, ai dati una studentessa alta 185 cm. Abbiamo allora $n = 37$ e

$$Q_1 = x_{(10)} = 160\,\text{cm} \qquad \tilde{X} = x_{(19)} = 165\,\text{cm} \qquad Q_3 = x_{(28)} = 169\,\text{cm}$$

quindi $\text{IQR} = 9\,\text{cm}$, e i baffi possono arrivare fino a $160\,\text{cm} - 13.5\,\text{cm} = 146.5\,\text{cm}$ e a $169\,\text{cm} + 13.5\,\text{cm} = 182.5\,\text{cm}$. Il valore 185 cm è fuori: è un outlier, e si disegna a parte. Il baffo di destra arriva al più grande dei valori rimasti, 178 cm.



Un outlier non è necessariamente un errore: può essere un individuo davvero fuori dall'ordinario, oppure un errore di misura o di trascrizione (una statura di 1.85 m scritta come 185 m, per esempio). Il diagramma a scatola lo mette in evidenza, e conviene andare a vedere da dove viene. Non si scartano gli outlier soltanto perché sono lontani dagli altri dati.

Nota
Il diagramma a scatola dice meno dell'istogramma: per esempio, da un diagramma a scatola non si può capire se la distribuzione ha una sola gobba, due, o più — rispettivamente distribuzioni unimodali, bimodali, multimodali. In compenso è molto compatto, quindi si possono affiancare i diagrammi a scatola di diverse distribuzioni, e ciò permette di confrontare a colpo d'occhio molti gruppi.

Nota importante
La regola dell'$1.5 \cdot \mathrm{IQR}$ (dovuta a John Tukey) è la più diffusa, ma non l'unica: a volte i baffi arrivano semplicemente al minimo e al massimo dei dati. Inoltre, programmi e calcolatrici diversi calcolano i quartili in modi leggermente diversi. Un articolo fatto bene dice quale convenzione ha usato.

§17.6 Esercizi

Test 89 (soluzione a p. 304)
Calcola la deviazione standard di 0, 1, 1.5, 2, 3.

Test 90 (soluzione a p. 304)
Calcola la deviazione standard di 3, 3, 6, 6, 6, 12.

Test 91 (soluzione a p. 305)
Quanto vale la mediana dei numeri 7, −7, 1, 2, −8, 15, 0?

Test 92 (soluzione a p. 305)
A che percentile equivale il primo quartile?

Test 93 (soluzione a p. 305)
A che percentile equivale la mediana?

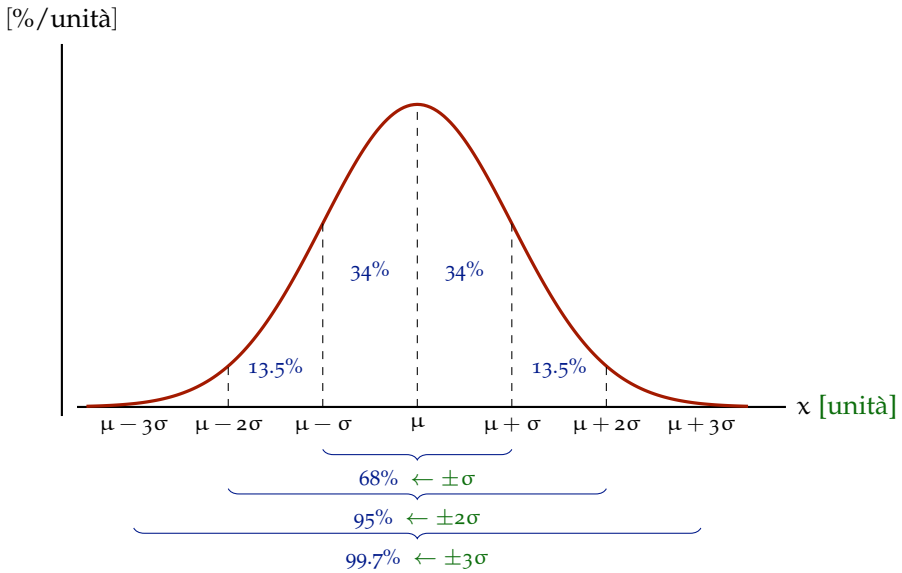
Esercizio 94 (soluzione a p. 305)
In un campione di fumatori, il numero di sigarette consumate al giorno si distribuisce come segue.

sigarette	fumatori
$0 \leqslant \ldots < 10$	225
$10 \leqslant \ldots < 20$	525
$20 \leqslant \ldots < 40$	450
$40 \leqslant \ldots < 80$	300
$80 \leqslant \ldots$	0

Traccia l'istogramma, con in ordinata la percentuale di fumatori per sigaretta. Qual è il numero mediano di sigarette fumate al giorno? Approssimativamente, che percentuale del totale dei fumatori consuma più di 30 sigarette al giorno? Dai una stima del numero medio di sigarette al giorno spiegando il tuo ragionamento.

§18 La distribuzione gaussiana

Diverse variabili statistiche numeriche — stature, concentrazioni di emoglobina nel sangue, pesi delle compresse di un lotto, errori di misura, punteggi di prove di abilità — hanno istogrammi dalla forma simile: una campana simmetrica, alta al centro e sempre più bassa allontanandosi dalla media. La curva ideale che descrive questa forma si chiama distribuzione gaussiana, o semplicemente gaussiana (si dice anche distribuzione normale).



Una gaussiana è determinata da due parametri: la media μ, che è il centro della campana, e la deviazione standard σ, che ne misura la larghezza. I punti $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ sono i punti in cui la curva cambia concavità.

Fatto
In una variabile statistica distribuita in maniera gaussiana, con media μ e deviazione standard σ,

- circa il 68% degli individui ha un valore compreso fra $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$;
- circa il 95% fra $\mu - 2\sigma$ e $\mu + 2\sigma$;
- circa il 99.7% fra $\mu - 3\sigma$ e $\mu + 3\sigma$.

Nota importante
Memorizza le percentuali: 68%, 95%, 99.7%!

Usando la regola del 68–95–99.7 è facile ricavare mnemonicamente la percentuale degli individui con variabile compresa fra numeri del tipo $\mu \pm n\sigma$, per $n = 0 \dots 3$.

Esempio
Che percentuale della popolazione sta fra $\mu + \sigma$ e $\mu + 2\sigma$?

Fra μ e $\mu + 2\sigma$, sfruttando la simmetria della distribuzione, c'è la metà del 95% degli individui che sta fra $\mu - 2\sigma$ e $\mu + 2\sigma$, cioè il 47.5%. Fra μ e $\mu + \sigma$, ragionando allo stesso modo, c'è lo $\frac{1}{2} \cdot 68\% = 34\%$ degli individui. Gli individui fra $\mu + \sigma$ e $\mu + 2\sigma$ sono tutti quelli fra μ e $\mu + 2\sigma$ meno quelli fra μ e $\mu + \sigma$, quindi il $47.5\% - 34\% =$ 13.5% circa (circa perché i numeri 68–95–99.7 non sono esatti).

Nota importante
L'ipotesi che una variabile statistica sia gaussiana non va presa alla leggera. In particolare, le code delle gaussiane, cioè le parti della distribuzione lontane dalla media, sono molto sottili. Fuori dall'intervallo fra $\mu - 3\sigma$ e $\mu + 3\sigma$ resta solo lo 0.3% degli individui. Fuori dall'intervallo fra $\mu - 5\sigma$ e $\mu + 5\sigma$ ne resta meno di uno su un milione.

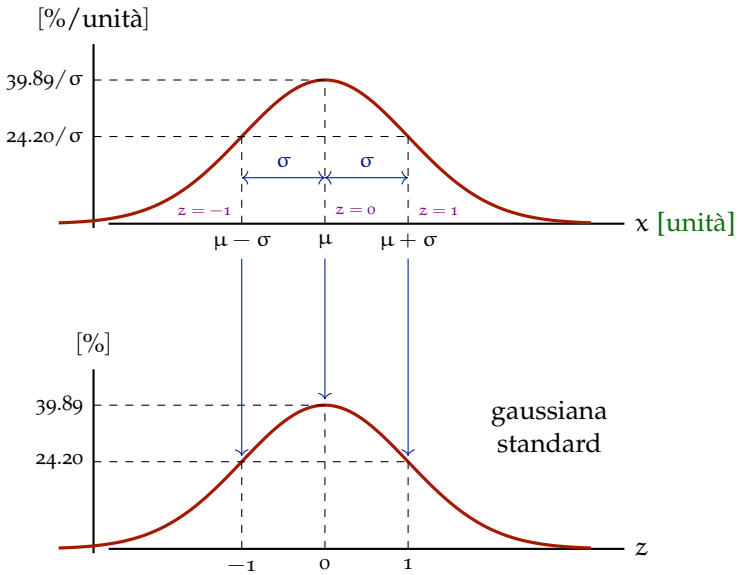
In una popolazione gaussiana è quasi impossibile trovare individui molto lontani dal centro della distribuzione (in proporzione alla larghezza del centro stesso). Un esempio classico in cui questi individui, però, ci sono è la distribuzione dei redditi. Altri sono le durate delle degenze ospedaliere, e l'ammontare delle spese mediche per paziente: quasi tutti i pazienti vengono dimessi in pochi giorni, e quasi tutte le cure non costano molto, tuttavia una quota piccola, ma non trascurabile, dei ricoveri dura mesi, e alcuni interventi sono costosissimi.

§18.1 La gaussiana standard

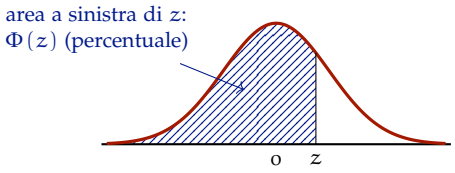
Tutte le gaussiane hanno la stessa forma: cambiano solo la posizione del centro e la scala. Per ricondurle a una sola si usa la coordinata standard, o z-score, di un valore x della variabile:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

La z misura la distanza di x dalla media in deviazioni standard: il punto $x = \mu$ corrisponde a $z = 0$, il punto $x = \mu + \sigma$ a $z = 1$, il punto $x = \mu - \sigma$ a $z = -1$, e così via. La gaussiana con media 0 e deviazione standard 1 si chiama gaussiana standard.



Le aree sotto la gaussiana standard sono tabulate.



z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
−0.85	19.77	0.65	74.22
−0.80	21.19	0.70	75.80
−0.75	22.66	0.75	77.34
−0.70	24.20	0.80	78.81
−0.65	25.78	0.85	80.23

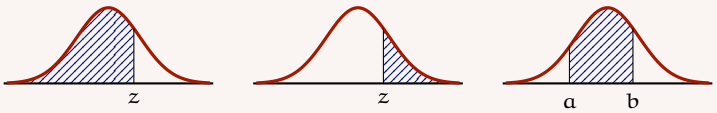
La tavola dell'appendice C riporta, per ciascun valore di z, l'area a sinistra di z, in percentuale, cioè la percentuale degli individui con coordinata standard minore di z. Questa area si indica con $\Phi(z)$ e si chiama funzione di ripartizione della gaussiana standard. Per esempio, il 77.34% degli individui ha coordinata standard minore di 0.75, e il 22.66% minore di -0.75. Notiamo che $22.66\% + 77.34\% = 100\%$: per la simmetria della curva, l'area a sinistra di $-z$ è uguale all'area a destra di z.

Per conoscere la percentuale di individui con $X < a$, per una variabile X gaussiana qualunque, basta passare alla coordinata standard: la percentuale degli individui con $X < a$ è $\Phi(z) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.

Per tracciare un disegno approssimativo della curva bastano le quote del picco e dei flessi, indicate nel diagramma qui sopra. Per una gaussiana qualunque, le quote vanno divise per σ: il risultato è naturalmente espresso in %/unità, ossia in densità di probabilità. Perché? La curva è stirata orizzontalmente di un fattore σ rispetto a

quella standard, quindi, per conservare l'area totale del 100%, deve essere schiacciata verticalmente del medesimo fattore.

Regola
Con la tavola di Φ si calcola l'area di qualunque regione:



$\Phi(z)$ $\quad 100\% - \Phi(z)$ $\quad \Phi(b) - \Phi(a)$

e per simmetria $\Phi(-z) = 100\% - \Phi(z)$.

Per esempio, fra -1 e 1 cade il $\Phi(1) - \Phi(-1) = 84.13\% - 15.87\% = 68.26\%$ degli individui: è il 68% che già conosciamo.

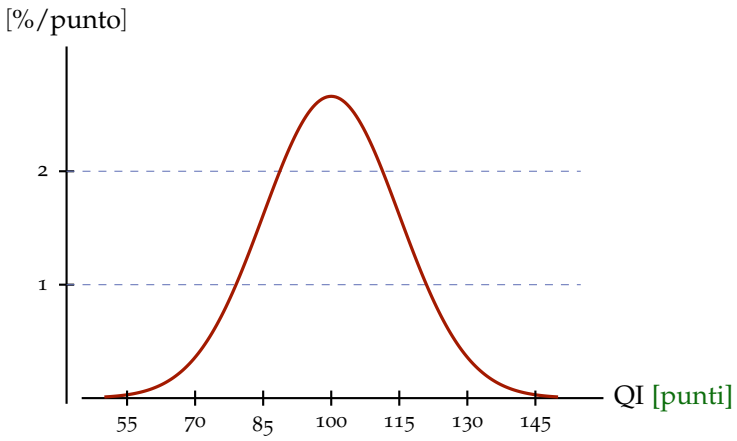
Nota importante
Fai sempre, in brutta, un disegno, tratteggiando l'area che cerchi, e scrivila come differenza di aree a sinistra, cioè di valori di Φ.

Esercizio
Il quoziente di intelligenza (QI) è costruito in modo tale che risulta distribuito in maniera gaussiana con media 100 e deviazione standard 15. Riporta su un diagramma la graduazione corretta, inclusa l'unità di misura sull'asse delle ordinate. Completa quindi le frasi seguenti.

1. Il . . . % delle persone ha un QI maggiore di 100.
2. Il . . . % delle persone ha un QI maggiore di 110.
3. Il . . . % delle persone ha un QI maggiore di 120.
4. Le persone con un QI minore di 95 sono tante quante quelle con un QI maggiore di . . .
5. Solo una persona su 100 ha un QI maggiore di . . .
6. La differenza fra il 75-esimo e il 25-esimo percentile (detta differenza interquartile) è di . . . punti, e in questo intervallo di QI cade il . . . % delle persone.

Soluzione. L'altezza massima della curva, in 100, e l'altezza nei flessi, in 100 ± 15, cioè in 85 e 115, sono

$$\frac{39.89\%}{15 \text{ punti}} \approx 2.66 \frac{\%}{\text{punto}} \qquad \frac{24.20\%}{15 \text{ punti}} \approx 1.61 \frac{\%}{\text{punto}}$$



1. Il 50%, per simmetria.
2. $z = \frac{110-100}{15} \approx 0.67$. Dalla tavola, interpolando fra $\Phi(0.65) = 74.22\%$ e $\Phi(0.70) = 75.80\%$,
$$\Phi(0.67) \approx 74.22\% + \frac{0.67-0.65}{0.70-0.65}(75.80\% - 74.22\%) = 74.85\%$$
quindi oltre 0.67 resta $100\% - 74.85\% = 25.15\% \approx 25\%$.
3. $z = \frac{120-100}{15} \approx 1.33$. Interpolando fra $\Phi(1.30) = 90.32\%$ e $\Phi(1.35) = 91.15\%$,
$$\Phi(1.33) \approx 90.32\% + \frac{1.33-1.30}{1.35-1.30}(91.15\% - 90.32\%) = 90.82\%$$
quindi oltre resta $100\% - 90.82\% = 9.18\% \approx 9\%$.
4. $95 = 100 - 5$, quindi per simmetria $105 = 100 + 5$.
5. Cerchiamo z tale che oltre z ci sia l'1%, ossia $\Phi(z) = 99\%$: dalla tavola, interpolando fra $\Phi(2.30) = 98.93\%$ e $\Phi(2.35) = 99.061\%$,
$$z \approx 2.30 + \frac{2.35-2.30}{99.061-98.93}(99.00 - 98.93) = 2.327$$
quindi $\mathrm{QI} = 100 + 2.327 \cdot 15 = 134.9 \approx 135$.
6. Fra il 25-esimo e il 75-esimo percentile cade, per definizione, il 50% delle persone. Il 75-esimo percentile ha $\Phi(z) = 75\%$: dalla tavola, interpolando fra $\Phi(0.65) = 74.22\%$ e $\Phi(0.70) = 75.80\%$,
$$z \approx 0.65 + \frac{0.70-0.65}{75.80-74.22}(75.00 - 74.22) \approx 0.675$$
e per simmetria il 25-esimo ha $z = -0.675$. I due percentili sono quindi $100 \pm 0.675 \cdot 15$, ossia 89.9 e 110.1, e la differenza interquartile è circa 20 punti.

In conclusione:

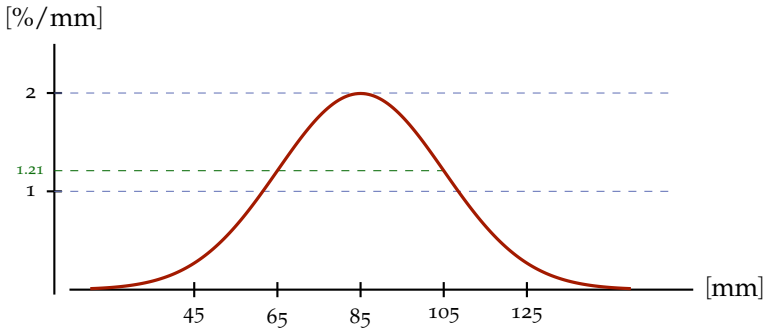
1. Il 50% delle persone ha un QI maggiore di 100.
2. Il 25% delle persone ha un QI maggiore di 110.
3. Il 9% delle persone ha un QI maggiore di 120.

4. Le persone con un QI minore di 95 sono tante quante quelle con un QI maggiore di 105.
5. Solo una persona su 100 ha un QI maggiore di 135.
6. La differenza fra il 75-esimo e il 25-esimo percentile (detta differenza interquartile) è di 20 punti, e in questo intervallo di QI cade il 50% delle persone.

□

Esercizio
Le lunghezze di un campione di mille pesci rossi sono distribuite in maniera gaussiana, con media di 85 mm e deviazione standard di 20 mm. Rappresenta graficamente questa distribuzione. Quanti pesci rossi sono più lunghi di dieci centimetri? Che percentuale di questi supera gli undici centimetri? È ragionevole che qualcuno dei pesci del campione raggiunga quindici centimetri di lunghezza?

Soluzione. Il grafico: il massimo, in 85 mm, vale $\frac{39.89\%}{20\,\text{mm}} \approx 2\,\%/\text{mm}$; in $85\,\text{mm} - 20\,\text{mm}$ e in $85\,\text{mm} + 20\,\text{mm}$ vale $\frac{24.20\%}{20\,\text{mm}} \approx 1.21\,\%/\text{mm}$.



Per 100 mm:

$$z = \frac{100\,\text{mm} - 85\,\text{mm}}{20\,\text{mm}} = 0.75$$

Dalla tavola, $\Phi(0.75) = 77.34\%$, quindi oltre 0.75

$$100\% - 77.34\% = 22.66\% \qquad \text{n. pesci oltre } 10\,\text{cm} = \frac{22.66}{100} \cdot 1000 \approx 227$$

Per 110 mm:

$$z = \frac{110\,\text{mm} - 85\,\text{mm}}{20\,\text{mm}} = 1.25 \qquad 100\% - \Phi(1.25) = 100\% - 89.44\% = 10.56\%$$

ossia circa 106 pesci. Fra i 227 pesci più lunghi di 10 cm, quelli oltre 11 cm sono quindi

$$\frac{105.6}{226.6} \cdot 100\% \approx 47\%$$

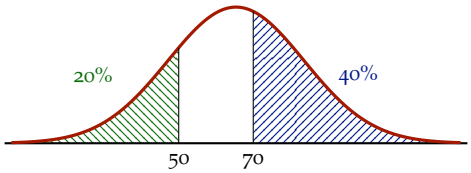
Infine, per 150 mm:

$$z = \frac{150\,\text{mm} - 85\,\text{mm}}{20\,\text{mm}} = 3.25 \qquad 100\% - \Phi(3.25) = 100\% - 99.9423\% = 0.0577\%$$

che su mille pesci fa 0.577 pesci, cioè circa mezzo pesce. Quindi può essercene uno, come può non essercene nessuno; trovarne parecchi, invece, sarebbe sorprendente. □

Esercizio
La variabile statistica X è distribuita in maniera gaussiana. Sapendo che il 40% degli individui ha $X > 70$ e il 20% degli individui ha $X < 50$, determina media e deviazione standard di X.

Soluzione. Chiamiamo z_{70} e z_{50} le coordinate standard di 70 e di 50.



Poiché il 40% sta oltre 70, sotto 70 c'è il 60%: $\Phi(z_{70}) = 60\%$. Dalla tavola, interpolando linearmente fra le righe 0.25 (59.87%) e 0.30 (61.79%),

$$z_{70} = 0.25 + \frac{0.30 - 0.25}{61.79 - 59.87}(60.00 - 59.87) = 0.2534$$

Allo stesso modo, sotto 50 c'è il 20%: $\Phi(z_{50}) = 20\%$, e interpolando fra le righe -0.85 (19.77%) e -0.80 (21.19%),

$$z_{50} = -0.85 + \frac{-0.80 - (-0.85)}{21.19 - 19.77}(20.00 - 19.77) = -0.8419$$

Ora, $z_{70} = \frac{70-\mu}{\sigma}$ e $z_{50} = \frac{50-\mu}{\sigma}$, quindi

$$\begin{cases} 70 = \mu + 0.2534\,\sigma \\ 50 = \mu - 0.8419\,\sigma \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro,

$$20 = \sigma\,(0.2534 + 0.8419) = 1.0953\,\sigma \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma = 18.26$$

e poi

$$\mu = 70 - 0.2534 \cdot 18.26 = 65.37$$

□

§18.2 Esercizi

Test 95 (soluzione a p. 306)
In una distribuzione gaussiana, che percentuale della popolazione ricade

1. entro una deviazione standard dalla media?
2. entro due deviazioni standard dalla media?
3. fra la media e la media più una deviazione standard?
4. fra la media meno due deviazioni standard e la media?

Esercizio 96 (soluzione a p. 307)
Usando la tavola della gaussiana (appendice C), trova la percentuale di una popolazione distribuita in maniera gaussiana che ha coordinata standard

1. $z < 1.5$;
2. $z > -0.5$;
3. $-0.5 < z < 1.5$.

Esercizio 97 (soluzione a p. 307)
Il peso delle compresse prodotte da una macchina è distribuito in maniera gaussiana, con media 500 mg e deviazione standard 8 mg.

1. Che percentuale delle compresse pesa meno di 490 mg?
2. Che percentuale pesa fra 490 mg e 512 mg?
3. Si vogliono scartare le compresse troppo leggere, e soltanto quelle: il 5% più leggero della produzione. Sotto quale peso si scarta una compressa?

Esercizio 98 (soluzione a p. 308)
Supponiamo che, in una certa popolazione, la pressione arteriosa sistolica sia distribuita in maniera gaussiana, con media 125 mmHg e deviazione standard 15 mmHg.

1. Che percentuale della popolazione ha una pressione sistolica di almeno 140 mmHg?
2. Una persona ha una pressione sistolica di 110 mmHg. A che percentile si colloca, approssimativamente?
3. Quanto vale il 90-esimo percentile della pressione sistolica?

Esercizio 99 (soluzione a p. 309)
Una variabile statistica X si distribuisce in maniera gaussiana con media 15 e deviazione standard 5.

1. Rappresenta graficamente questa distribuzione indicando, in ascissa, il valore di X e, in ordinata, la densità di probabilità.
2. Che percentuale della popolazione ha un valore di X compreso fra 12 e 13?
3. Determina k in modo tale che il 50% della popolazione abbia un valore di X compreso fra 12 e k.

Esercizio 100 (soluzione a p. 310)
Supponiamo che i volumi dei globuli rossi di un paziente siano distribuiti in maniera approssimativamente gaussiana. Il volume medio di un globulo rosso è di 85 femtolitri, e il 20% dei globuli rossi è più grande di 100 femtolitri. Quanto vale la deviazione standard della distribuzione dei volumi? Quanto vale il volume mediano dei globuli rossi più grandi di 100 femtolitri? Rappresenta graficamente la distribuzione dei volumi.

§19 Stima della media di una variabile statistica

Consideriamo una variabile statistica X di cui intendiamo stimare la media μ (su tutta la popolazione). Scegliamo in modo casuale un campione di n individui, cui sono associati altrettanti valori della variabile X, denotati $x_1, \dots, x_n$. È ragionevole stimare μ con la media di questi valori, detta media campionaria.

$$\hat{\mu} = \mu(\text{campione}) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \qquad \hat{\clubsuit} = \text{“stima di } \clubsuit\text{”}$$

L'obiettivo principale di questo capitolo è quantificare il probabile errore della stima $\hat{\mu}$. Lo strumento di cui ci serviremo è un concetto importante: l'intervallo di confidenza, che definiremo nella prossima sezione.

Notazione
In questo capitolo μ e σ, senza altre indicazioni, sono la media e la deviazione standard di X su tutta la popolazione, che non conosciamo. Le misure calcolate sul campione portano l'indicazione fra parentesi, come $\mu(\text{campione})$. Il cappello indica una stima: $\hat{\mu}$ è una stima di μ e $\hat{\sigma}$ una stima di σ, qualunque sia la formula con cui le calcoliamo.

§19.1 Metodo per campioni grandi

Questo metodo è valido solo per campioni grandi e popolazioni grandi rispetto al campione; ne presenteremo un altro che, al costo di una maggiore complessità, permette di ovviare al vincolo sul campione. Il metodo di questa sezione ci interessa perché è più semplice, permette di capire meglio le idee, e di fare calcoli approssimativi a memoria ricordando la regola del 68–95–99.7. A seconda dei testi e delle applicazioni, si trovano varie regole circa quali campioni siano *grandi*: una soglia ragionevole potrebbe essere sul centinaio di individui. La sostanza, però, è che il metodo della prossima sezione è sempre più affidabile, quindi, nel dubbio, conviene usare quello.

Si stima la deviazione standard σ di X con la σ del campione

$$\hat{\sigma} = \sigma(\text{campione}) = \sqrt{\frac{(x_1 - \hat{\mu})^2 + \dots + (x_n - \hat{\mu})^2}{n}}$$

Vale il fatto seguente.

Fatto (teorema centrale del limite)
Al variare di tutti i possibili campioni di n individui, le possibili medie campionarie si distribuiscono in modo circa gaussiano (indipendentemente dalla distribuzione di X, a patto che il campione sia abbastanza grande, e la distribuzione di X non abbia varianza *infinita*). La media di questa gaussiana è μ e la deviazione standard

è l'errore standard della media

$$\mathrm{SEM} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \textit{“standard error of the mean”}$$

Non sappiamo esattamente σ — va da sé: non sappiamo neanche μ! — però possiamo stimarla con

$$\widehat{\mathrm{SEM}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

Finalmente, siccome la distribuzione delle medie campionarie è gaussiana e ne abbiamo stimato la deviazione standard, possiamo calcolare con quale probabilità la nostra particolare media campionaria $\hat{\mu}$ si trovi in un dato intervallo attorno alla media vera μ. Per esempio,

$\hat{\mu}$ è in $\mu \pm \widehat{\mathrm{SEM}}$	nel 68% dei casi circa
$\hat{\mu}$ è in $\mu \pm 2\,\widehat{\mathrm{SEM}}$	nel 95% dei casi circa
$\hat{\mu}$ è in $\mu \pm 3\,\widehat{\mathrm{SEM}}$	nel 99.7% dei casi circa

Questi valori sono approssimati: cifre più precise si possono facilmente estrarre dalla tavola della gaussiana; per esempio al 95% corrisponde più precisamente l'intervallo $\pm 1.96\,\widehat{\mathrm{SEM}}$.

Per concludere, si osserva che dire

$$a \text{ è in } b \pm \delta \qquad \text{equivale a} \qquad b \text{ è in } a \pm \delta$$

infatti entrambe le frasi dicono che a e b non distano più di δ, quindi

μ è in $\hat{\mu} \pm \widehat{\mathrm{SEM}}$	nel 68% dei casi circa
μ è in $\hat{\mu} \pm 2\,\widehat{\mathrm{SEM}}$	nel 95% dei casi circa
μ è in $\hat{\mu} \pm 3\,\widehat{\mathrm{SEM}}$	nel 99.7% dei casi circa

Questi sono detti intervalli di confidenza e le percentuali sono i rispettivi livelli di confidenza. Valori tipici sono

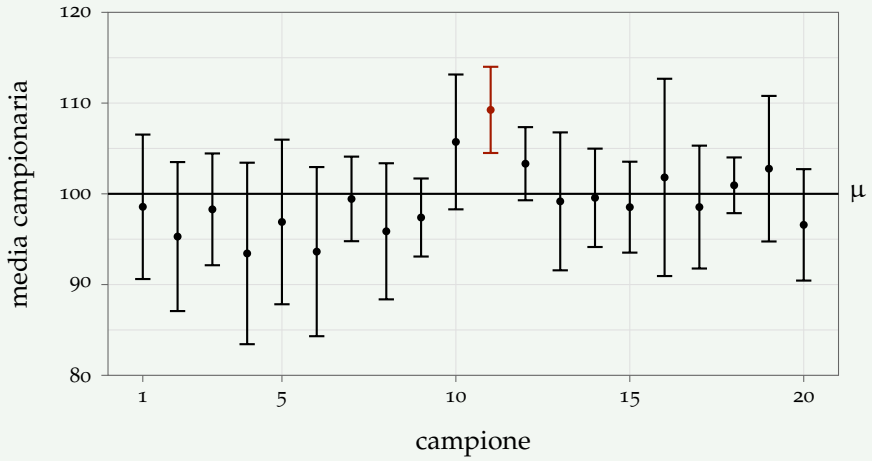
l'intervallo di confidenza al 95% è $\hat{\mu} \pm 1.96\,\widehat{\mathrm{SEM}} \approx \hat{\mu} \pm 2\,\widehat{\mathrm{SEM}}$

l'intervallo di confidenza al 99% è $\hat{\mu} \pm 2.58\,\widehat{\mathrm{SEM}}$

Nota importante
Un livello di confidenza, diciamo, del 95% ci dice che ripetendo molte volte il campionamento, circa il 95% degli intervalli costruiti dai vari campioni ottenuti conterrà il vero valore del parametro. La casualità è quindi quella della scelta del campione. Ho visto applicare questo metodo all'intera popolazione — niente di più stupido: in quel caso la media della popolazione era un valore esatto, non una stima!

Nota

Ecco che cosa succede ripetendo il campionamento. Da una popolazione molto numerosa, in cui una grandezza ha distribuzione gaussiana con media $\mu = 100$ e deviazione standard $\sigma = 10$, ho estratto (con una simulazione al computer) venti campioni di dieci individui, e per ciascuno ho calcolato l'intervallo di confidenza al 95%.



La linea orizzontale rappresenta la media della popolazione. La media campionaria (il pallino) e l'ampiezza dell'intervallo cambiano da un campione all'altro. Come dobbiamo aspettarci, il 95% degli intervalli, 19 su 20, contiene la media vera; uno la manca. In realtà ho eseguito l'esperimento più volte: ogni tanto gli intervalli che mancano sono due o tre, ogni tanto uno, e ogni tanto nessuno. Solo in media ne manca uno su venti. Questa è una simulazione: la realtà differisce perché hai in mano un solo campione. Inevitabilmente, non puoi sapere se il tuo intervallo è uno dei diciannove buoni, o è quello rosso.

§19.2 Metodo più generale

Il metodo precedente, per campioni piccoli, sottostima l'ampiezza degli intervalli di confidenza, soprattutto perché tratta $\hat{\sigma}$ come se fosse σ: con pochi dati la stima di σ è incerta, e di questa incertezza bisogna tener conto. Il metodo di questa sezione vale anche per campioni piccoli (ma sempre con popolazioni grandi rispetto al campione), a patto che la distribuzione di X non si allontani troppo da una gaussiana. Questa condizione sulla distribuzione è necessaria perché il teorema centrale del limite vale solo per n grande. Comunque, se la distribuzione di X è pazzesca, non c'è metodo che tenga.

Innanzitutto rimpiazziamo $\hat{\sigma} = \sigma(\text{campione})$ con

$$\hat{\sigma} = s(\text{campione}) = \sqrt{\underbrace{\frac{(x_1 - \hat{\mu})^2 + \ldots + (x_n - \hat{\mu})^2}{n-1}}_{s^2(\text{campione}) = \text{varianza campionaria}}}$$

Stimiamo l'errore standard della media con

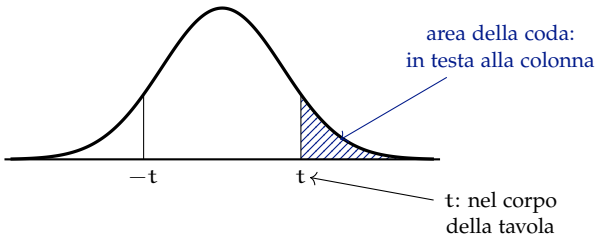
$$\widehat{\mathrm{SEM}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

Ora, la quantità

$$\frac{\hat{\mu} - \mu}{\widehat{\mathrm{SEM}}}$$

si distribuisce, al variare di tutti i possibili campioni, secondo la distribuzione detta t di Student con $n - 1$ gradi di libertà (ce n'è una per ogni numero di gradi di libertà). Se il numero di gradi di libertà è alto, la t di Student coincide, sostanzialmente, con la gaussiana standard. Altrimenti è sottilmente diversa, e queste distribuzioni sono tabulate (vedi l'appendice C).

Ecco un estratto della tavola, con il disegno che ne spiega il significato: per ciascun numero di gradi di libertà (riga) e ciascuna area in testa a una colonna (scritta come numero decimale: 0.025 è il 2.5%), la tavola dà il valore t tale che la coda a destra di t ha proprio quell'area. Siccome la curva è simmetrica, fra $-t$ e t resta il 100% meno il doppio di quell'area: la colonna 0.025 serve per la confidenza al 95%, la colonna 0.005 per la confidenza al 99%.



				conf. 95%		conf. 99%
gradi di libertà	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.00	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
2	0.82	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92
3	0.76	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
4	0.74	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60
5	0.73	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03
6	0.72	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
7	0.71	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50
8	0.71	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36
9	0.70	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
10	0.70	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17

In conclusione, scritto il livello di confidenza come $1 - \alpha$ ($\alpha = 0.05$ per il 95%, $\alpha = 0.01$ per il 99%), e detto $t_{\alpha/2, n-1}$ il valore che la tavola riporta nella colonna $\frac{\alpha}{2}$ alla riga $n - 1$ (il primo indice è l'area della coda, il secondo i gradi di libertà), vale la regola seguente.

Regola (intervallo di confidenza per la media)
L'intervallo di confidenza al livello $1-\alpha$ per la media è

$$\hat{\mu} \pm t_{\alpha/2,\,n-1} \cdot \widehat{\mathrm{SEM}}$$

Al 95%: $\hat{\mu} \pm t_{0.025,\,n-1} \cdot \widehat{\mathrm{SEM}}$. Al 99%: $\hat{\mu} \pm t_{0.005,\,n-1} \cdot \widehat{\mathrm{SEM}}$.

Esempio
Per un campione di $n = 10$ individui, la tavola della t di Student con $9 = 10-1$ gradi di libertà, alla colonna 0.025 (confidenza 95%), dà 2.26. Vediamo quindi che

$$\frac{\hat{\mu}-\mu}{\widehat{\mathrm{SEM}}} \text{ è in } 0 \pm 2.26 \quad \text{nel 95\% dei casi}$$

per cui

$$\mu \text{ è in } \hat{\mu} \pm 2.26\,\widehat{\mathrm{SEM}} \quad \text{nel 95\% dei casi}$$

e questo è il nostro intervallo di confidenza della media (anziché $1.96\,\widehat{\mathrm{SEM}}$ del metodo per campioni grandi).

Esercizio
Delle 36 studentesse che hanno partecipato alla raccolta delle stature (capitolo 17) ne sono state estratte a caso 10, con le stature seguenti, in centimetri.

167 178 168 165 170 160 159 170 165 160

Stima la statura media delle 36 studentesse con un intervallo di confidenza al 95%.

Soluzione. Con il metodo per campioni grandi:

$$\hat{\mu} = 166.2\,\mathrm{cm} \qquad \sigma(\text{campione}) \approx 5.51\,\mathrm{cm} \qquad \widehat{\mathrm{SEM}} = \frac{5.51\,\mathrm{cm}}{\sqrt{10}} \approx 1.74\,\mathrm{cm}$$

e l'intervallo di confidenza al 95% è $(166.2 \pm 1.96 \cdot 1.74)\,\mathrm{cm} = (166.2 \pm 3.4)\,\mathrm{cm}$.

Con il metodo più generale:

$$s(\text{campione}) \approx 5.81\,\mathrm{cm} \qquad \widehat{\mathrm{SEM}} = \frac{5.81\,\mathrm{cm}}{\sqrt{10}} \approx 1.84\,\mathrm{cm}$$

e, siccome $\frac{\hat{\mu}-\mu}{\widehat{\mathrm{SEM}}}$ è in ± 2.26 nel 95% dei casi,

$$\mu = \hat{\mu} \pm 2.26\,\widehat{\mathrm{SEM}} = (166.2 \pm 4.2)\,\mathrm{cm}$$

In questo caso conosciamo anche la media vera delle 36 stature: $\mu = 164.8\,\mathrm{cm}$, che in effetti cade nell'intervallo. Qui, però, il campione è quasi un terzo della popolazione, che quindi non è grande rispetto al campione: in casi come questo gli intervalli che otteniamo sono più larghi del necessario, cioè prudenti. □

§19.3 Misure ripetute

Un caso importante di stima della media è quello delle misure sperimentali (vedi la teoria degli errori, capitolo 9), quando l'unico modo di conoscere l'incertezza di una misura è ripeterla. Se ripetiamo una medesima misura n volte, possiamo vedere i risultati $x_1, \dots, x_n$ come un campione della popolazione (infinita) costituita da tutte le misure che potremmo fare. In assenza di errori sistematici, la media μ di questa popolazione è il valore vero della grandezza misurata: stimare il valore vero è quindi stimare μ. Apprezza la vacuità dell'affermazione precedente: dire che non ci sono errori sistematici equivale per definizione a dire che la media della popolazione delle misure è il valore della grandezza misurata.

Studiando la teoria degli errori abbiamo imparato a riportare i risultati nella forma $x = \hat{\mu} \pm \delta x$. Ora possiamo tentare una definizione precisa dell'errore assoluto δx:

$$\delta x = \widehat{\mathrm{SEM}} = \frac{s(\text{campione})}{\sqrt{n}}$$

cioè l'intervallo di incertezza è, all'incirca, l'intervallo di confidenza al 68% (esattamente, solo se le misure sono molte). Questa non è l'unica definizione adottata in metrologia: per esempio anche l'intervallo di confidenza al 95% sarebbe una scelta sensata. Se leggiamo $x = x_0 \pm \delta x$ $(k = 2)$, quel valore di k fra parentesi indica un multiplo dell'errore standard: in questo caso ci dice che $\delta x = 2\,\widehat{\mathrm{SEM}}$.

Esercizio
Supponi di misurare dieci volte la medesima lunghezza, ottenendo

42.5 mm	42.6 mm	42.2 mm
42.8 mm	42.4 mm	42.5 mm
42.2 mm	42.6 mm	42.3 mm
42.4 mm		

Che stima della lunghezza puoi riportare?

Soluzione. Otteniamo:

$$\hat{\mu} = 42.45\,\mathrm{mm} \qquad s(\text{campione}) \approx 0.190\,\mathrm{mm} \qquad \widehat{\mathrm{SEM}} = \frac{0.190\,\mathrm{mm}}{\sqrt{10}} \approx 0.060\,\mathrm{mm}$$

Quindi, seguendo la regola di arrotondare l'incertezza ad una cifra significativa

$$x = (42.45 \pm 0.06)\,\mathrm{mm}$$

Osserviamo che, benché le singole misure fossero arrotondate ai decimi di millimetro, il risultato che abbiamo ottenuto si arrotonda al centesimo. □

§19.4 Stima di proporzioni

La stima delle medie si può applicare anche alle variabili statistiche binarie, quelle che ci dicono se un individuo ha o no una certa caratteristica: se fuma, se guarisce, se una compressa è fuori specifica. In questi casi, vogliamo stimare la proporzione p, o la percentuale $p \cdot 100\%$, degli individui che hanno la caratteristica su tutta la popolazione. Se, in un campione di n individui, k la hanno, è ragionevole stimare

$$\hat{p} = \frac{k}{n}$$

Vorremmo associare a questa stima un intervallo di confidenza.

Questo si può vedere come un caso particolare della stima della media. Associamo a ciascun individuo la variabile X che vale 1 se ha la caratteristica e 0 se non la ha: la media μ di X è proprio il totale degli uni fratto il numero di individui nella popolazione, ossia la proporzione p. Possiamo quindi calcolare un intervallo di confidenza per p, stimata da $\hat{p} = \hat{\mu}$, col metodo per campioni grandi che conosciamo.

Per farlo dobbiamo calcolare la σ del campione. Nel campione ci sono k valori uguali a 1 e $n - k$ uguali a 0; usando l'identità $\hat{\sigma}^2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)/n - \hat{\mu}^2$ (capitolo 17),

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\overbrace{1^2 + \cdots + 1^2}^{k}}{n} - \hat{\mu}^2 = \hat{p} - \hat{p}^2 = \hat{p}\,(1 - \hat{p}) \qquad \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{p}\,(1 - \hat{p})}$$

Di conseguenza, stimando p con $\hat{p}$, il metodo per campioni grandi dà

Regola (intervallo di confidenza per una proporzione)

$$\widehat{\mathrm{SEM}} = \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1 - \hat{p})}{n}} \qquad p \text{ è in } \hat{p} \pm 1.96\,\widehat{\mathrm{SEM}} \quad \text{nel } 95\% \text{ dei casi}$$

Vale per campioni grandi (in pratica, almeno una decina di individui con la caratteristica e una decina senza) e popolazioni grandi rispetto al campione.

Esercizio
In una sperimentazione, 52 degli 80 pazienti di un campione, trattati con un farmaco, guariscono entro una settimana. Stima, con un intervallo di confidenza al 95%, la percentuale di guarigioni entro una settimana.

Soluzione.

$$\hat{p} = \frac{52}{80} = 0.650 \qquad \widehat{\mathrm{SEM}} = \sqrt{\frac{0.650 \cdot 0.350}{80}} \approx 0.0533 \qquad 1.96 \cdot 0.0533 = 0.1045$$

Arrotondando, $p = 0.65 \pm 0.10$: fra il 55% e il 75% dei pazienti guarisce entro una settimana, al 95% di confidenza. Verifica delle condizioni: 52 guariti e 28 no, entrambi ben più di una decina. □

§19.5 Esercizi

Esercizio 101 (soluzione a p. 311)
I valori assunti da una variabile statistica su un campione di sei individui sono

$$14.1 \quad 7.5 \quad 17.9 \quad 12.2 \quad 12.9 \quad 15.8$$

1. Calcola media, varianza (σ^2) e varianza campionaria (s^2) di questi valori.
2. Con che intervallo di confidenza al 95% possiamo stimare la media della popolazione?

Esercizio 102 (soluzione a p. 312)
Si estrae un campione casuale di dieci individui da una popolazione molto vasta. La variabile statistica X assume, su questi dieci individui, i seguenti valori.

$$28.6 \quad 33.1 \quad 36.5 \quad 36.9 \quad 37.6 \quad 41.7 \quad 43.0 \quad 44.7 \quad 45.9 \quad 51.6$$

1. Calcola media, mediana e differenza interquartile di X sul campione.
2. Se stimiamo la media di X su tutta la popolazione con la media del campione, che intervallo di confidenza al 95% abbiamo?
3. Usando un campione più grande, potremmo determinare la media della popolazione con un intervallo di confidenza al 95% di ± 1.0: quanto dovrebbe essere grande questo campione?

Esercizio 103 (soluzione a p. 313)
Il seguente diagramma ramo-foglia rappresenta i valori assunti da una variabile statistica X su un campione di 100 individui, estratto casualmente da una vasta popolazione.

10	5
11	26
12	268
13	0014555889
14	000122233333334567777888
15	000112234447888899
16	000113333555677788889
17	223455578899
18	112489
19	58

Questi valori sono quindi

$$x_1 = 105 \quad x_2 = 112 \quad x_3 = 116 \quad \ldots \quad x_{99} = 195 \quad x_{100} = 198$$

e, per convenienza, sono già state calcolate le somme

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = 15\,482 \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{100}^2 = 2\,428\,902$$

1. Determina media μ(campione), deviazione standard σ(campione), mediana $\tilde{X}$ e differenza interquartile IQR di X sul campione.
2. Rappresenta i dati per mezzo di un istogramma, dividendo l'asse delle ascisse in classi di ampiezza 10, e indicando sull'asse delle ordinate la densità di probabilità.
3. Rappresenta sul medesimo diagramma una distribuzione gaussiana con media μ(campione) e deviazione standard σ(campione).
4. Calcola un intervallo di confidenza al 95% per la media μ di X sulla popolazione.

Esercizio 104 (soluzione a p. 315)
Su un campione di compresse di un lotto si stima il contenuto medio di principio attivo, con l'intervallo di confidenza al 95% da 249 mg a 253 mg. Quali delle affermazioni seguenti sono corrette?

1. Il 95% delle compresse del lotto contiene fra 249 mg e 253 mg di principio attivo.
2. Intervalli costruiti nello stesso modo, a partire da campioni diversi, contengono il contenuto medio vero del lotto nel 95% dei casi.
3. Se si ripetesse il campionamento, il 95% delle nuove medie campionarie cadrebbe fra 249 mg e 253 mg.
4. Con un campione più grande l'intervallo sarebbe, di regola, più stretto.

Esercizio 105 (soluzione a p. 316)
Da un campione grande si ottiene, per la media di una variabile, l'intervallo di confidenza al 95% $\mu = 12.0 \pm 1.0$. Senza rifare i conti sui dati, trova gli intervalli di confidenza al 99% e al 68%.

Esercizio 106 (soluzione a p. 316)
Con 25 misure ripetute di una concentrazione si ottiene l'intervallo di confidenza al 95% (6.4 ± 0.8) mg/L. Circa quante misure servirebbero, con lo stesso strumento, per ottenere un intervallo di ± 0.4 mg/L?

Esercizio 107 (soluzione a p. 316)
Un articolo riporta, per 100 pazienti, "peso medio 72 ± 3 kg", senza precisare che cosa sia il ± 3 kg. Fra quali valori sta, grosso modo, il peso del 95% dei pazienti, se

1. 3 kg è la deviazione standard dei pesi;
2. 72 ± 3 kg è l'intervallo di confidenza al 95% della media?

Supponi che i pesi siano distribuiti in modo circa gaussiano.

Esercizio 108 (soluzione a p. 317)
Su 250 compresse prodotte da una macchina, scelte a caso e controllate, 12 risultano fuori specifica. Stima, con un intervallo di confidenza al 95%, la percentuale di compresse fuori specifica prodotte dalla macchina.

Esercizio 109 (soluzione a p. 317)
Un sondaggio su 1000 persone scelte a caso stima che il 40% della popolazione assuma regolarmente integratori alimentari, con un intervallo di confidenza al 95% di $\pm 3\%$.

1. Verifica che l'intervallo $\pm 3\%$ è corretto.
2. Con 4000 intervistati, e la stessa proporzione nel campione, quale sarebbe l'intervallo?

§20 Regressione lineare

Date due variabili statistiche A e B, di tipo numerico, vogliamo quantificare in che misura i valori assunti da una siano correlati a quelli assunti dall'altra.

Esempio
È stato chiesto a 59 studenti di ripetere due volte una prova di abilità, il cui risultato è un punteggio fra 0 e 15. I punteggi delle due prove, A e B, sono riassunti in questo diagramma.

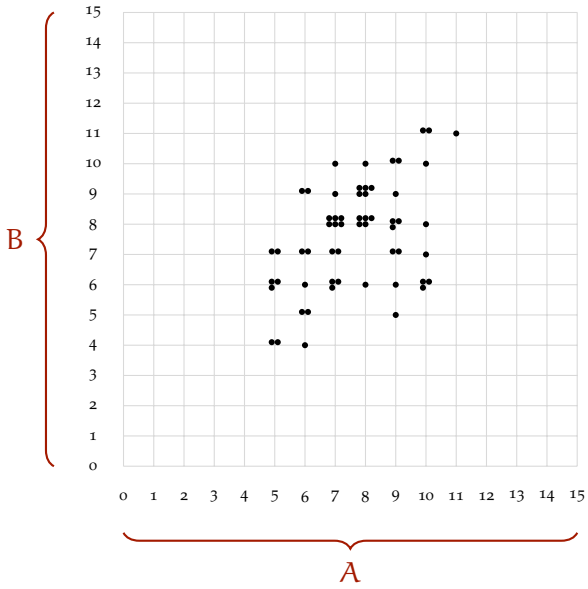
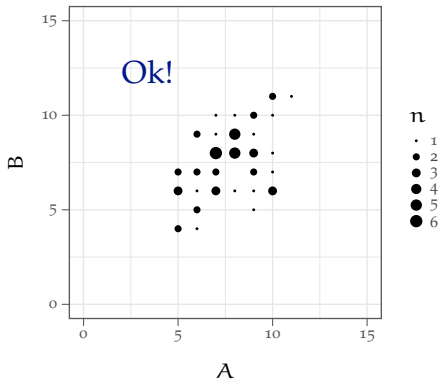


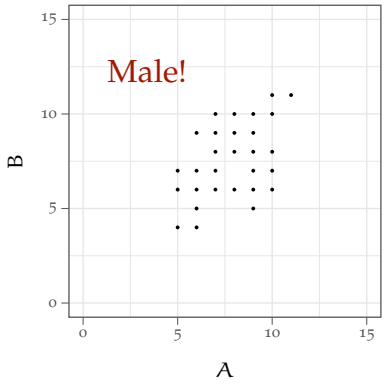
Diagramma di dispersione (in inglese *scatter plot*).

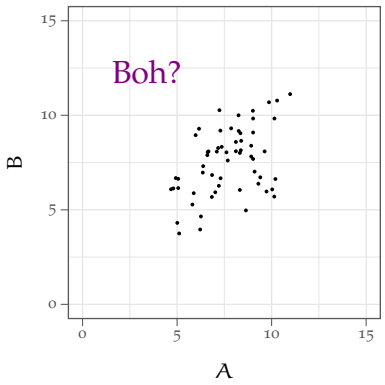
Ciascun punto rappresenta un individuo, con la sua coppia di valori (a, b).



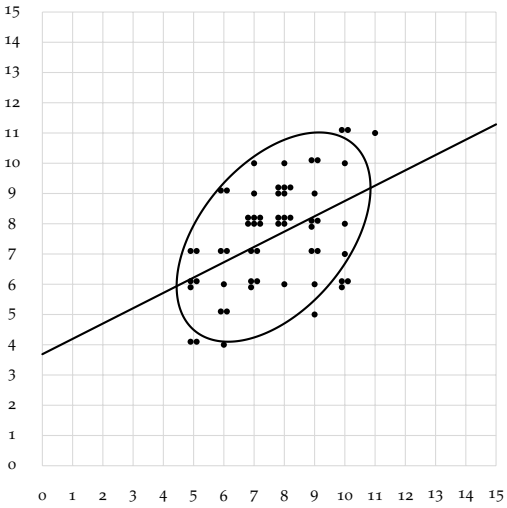
Un'altra forma di diagramma di dispersione: qui il numero di individui è rappresentato dalla dimensione dei cerchi.

Rappresentando ogni coppia (a, b) con un punto si avrebbero delle sovrapposizioni che oscurano l'accumulo dei dati al centro della nuvola.





In questa versione i punti sono stati mossi di poco, in modo casuale, per rimuovere le sovrapposizioni.

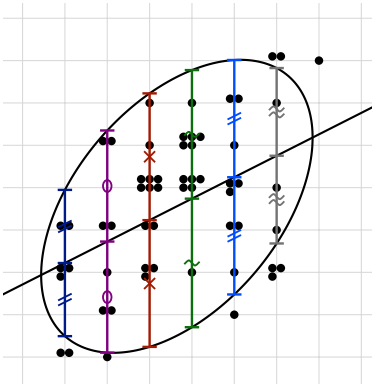


I punti — le coppie (a, b) — formano una nuvola grossolanamente ellittica. Questo avviene perché la distribuzione delle variabili A e B è approssimativamente congiuntamente gaussiana. L'ellisse è inclinata: questo indica una correlazione fra A e B e, in particolare, una correlazione positiva, perché, al crescere di A, anche B tende a crescere; la situazione opposta si chiamerebbe correlazione negativa.

Il diagramma mostra altresì la retta di regressione di B rispetto ad A. Questa retta divide a metà ogni sezione verticale della nuvola, vale a dire, per ogni fissato valore $A = a_0$, il corrispondente

$$b_0 = \text{pendenza} \cdot a_0 + \text{intercetta}$$

è una stima della media delle coordinate B dei punti che hanno $A = a_0$.

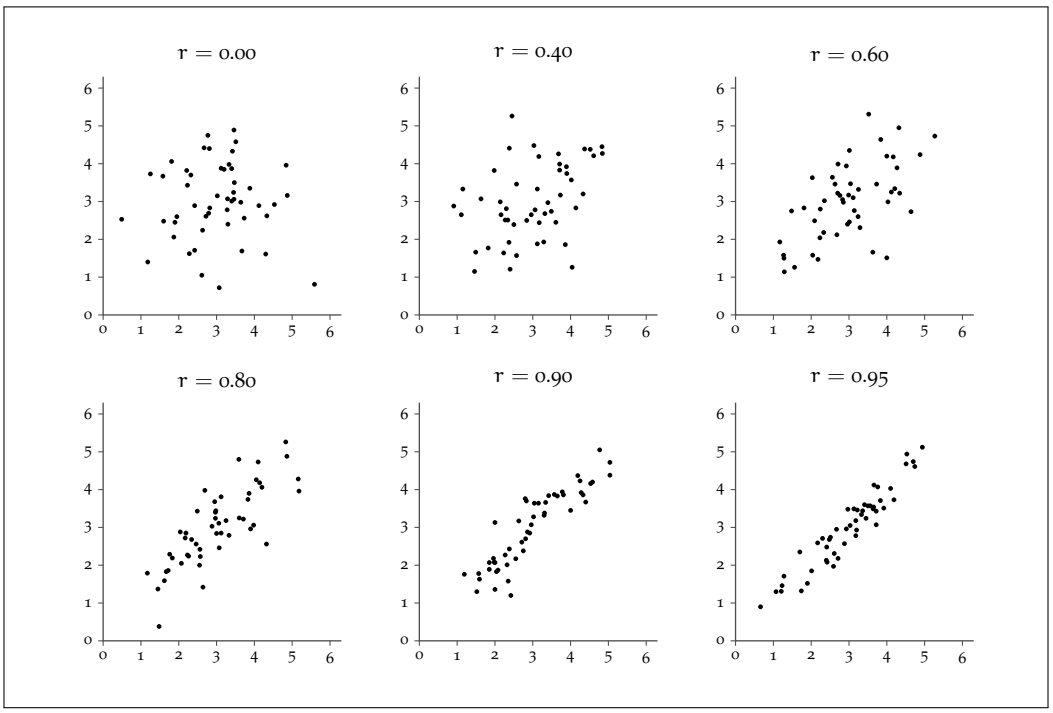


Vedremo come calcolare le seguenti quantità:

- i coefficienti della retta di regressione;
- il coefficiente di correlazione di Pearson r, che misura la forza della correlazione;
- un p-value, che dice se i dati bastano per asserire che le variabili sono realmente correlate.

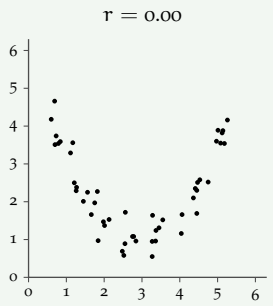
Abbiamo già descritto il significato della retta di regressione. Per quanto riguarda r, si tratta di un numero nell'intervallo $-1 \leqslant r \leqslant 1$, il cui segno indica il segno della correlazione. Il valore assoluto $|r|$ dice quanto la correlazione è forte, ossia in che misura è possibile prevedere B conoscendo A per mezzo della retta di regressione. A $|r| = 0$ corrisponde l'assenza completa di correlazione lineare (in questo caso la retta di regressione è orizzontale: una costante pari alla media di B). A $|r| = 1$ corrisponde il caso in cui B è esattamente determinata da $B = mA + q$ per opportuni coefficienti m (la pendenza) e q (l'intercetta).

Grossolanamente, r descrive la forma della nuvola di punti. Se $r = 0$ gli assi dell'ellisse sono paralleli agli assi coordinati, per cui, a scegliere le giuste unità di misura, la nuvola appare circolare. Se $r > 0$ (risp. $r < 0$) l'asse maggiore è disposto diagonalmente così: ／ (risp. così: ＼). Più $|r|$ si avvicina a 1, più l'ellisse è schiacciata, e, per $|r| = 1$, questa ha la forma di un segmento di retta.



Osservazione

La regressione lineare cerca una dipendenza del tipo $B = mA + q$. Questo metodo è insensibile — anzi confuso — da leggi di dipendenza più complicate. Per esempio le variabili del diagramma qui a fianco risultano linearmente scorrelate ($r = 0$), anche se c'è una correlazione evidente.



Discuteremo in dettaglio il p-value più avanti. Molto sinteticamente, l'idea è che, in un campione casuale, potremmo osservare una correlazione che, in realtà, nella popolazione non c'è, per via di uno scherzo della fortuna. Il p-value misura quanto è verosimile che la correlazione apparentemente presente nei dati sia un mero frutto del caso. Quindi minore è il p-value, più è verosimile che la correlazione sia reale, ossia maggiore è la significatività statistica della correlazione. Un p-value grande, ossia una scarsa significatività statistica, indica che i dati non bastano per concludere che A e B sono linearmente correlate (perché il campione — il numero di punti (a, b) rilevati — è troppo piccolo, o perché la correlazione non c'è). Soglie tipiche con cui si confrontano i p-value (si chiamano livelli di significatività) nelle scienze della vita sono < 0.05 per ritenere un risultato significativo e < 0.01 perché sia fortemente significativo. Una triste macumba circonda queste soglie, per cui è bene non farne un feticcio: si tratta di semplici numeri scelti per convenzione.

§20.1 Formule e calcoli

Chiamiamo $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ i punti del nostro campione. Si comincia col calcolare media e deviazione standard di A e di B (sul campione, con n al denominatore): μ_A, σ_A, μ_B, σ_B. Poi si convertono i punti del campione in coordinate standard (le stesse del capitolo 18, dove le abbiamo chiamate z; qui le variabili sono due, e le distinguiamo con un asterisco)

$$\boxed{A^* = \frac{A - \mu_A}{\sigma_A} \qquad B^* = \frac{B - \mu_B}{\sigma_B}}$$

ottenendo $(a_1^*, b_1^*), (a_2^*, b_2^*), \ldots, (a_n^*, b_n^*)$.

Ora, il coefficiente di correlazione di Pearson r è la media dei prodotti $a_i^* b_i^*$:

$$\boxed{r = \frac{a_1^* b_1^* + a_2^* b_2^* + \ldots + a_n^* b_n^*}{n}}$$

E la retta di regressione, in coordinate standard, è semplicemente

$$B^* = r\, A^*$$

Da cui, sostituendo A^* e B^* con le rispettive definizioni,

$$\frac{B - \mu_B}{\sigma_B} = r\,\frac{A - \mu_A}{\sigma_A} \qquad \Longrightarrow \qquad B = \overbrace{r\,\frac{\sigma_B}{\sigma_A}}^{\text{pendenza}} A + \overbrace{\mu_B - r\,\frac{\sigma_B}{\sigma_A}\,\mu_A}^{\text{intercetta}}$$

Non conviene memorizzare quest'ultima formula, ma la molto più semplice

Regola (retta di regressione in coordinate standard)

$$B^* = r\,A^*$$

da cui è facile ricavare la retta di regressione che lega A e B come appena visto.

Esercizio
Calcola il coefficiente di correlazione r e la retta di regressione di B rispetto ad A per i dati seguenti.

a_i	4	5	1	9	4	7	5	4	5	6
b_i	5	6	8	2	4	1	5	3	2	4

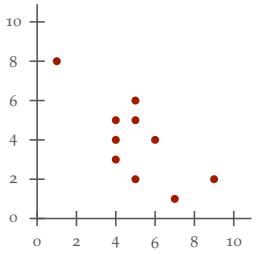
Soluzione.

Otteniamo $\mu_A = 5.00$ $\sigma_A = 2.00$

$\mu_B = 4.00$ $\sigma_B = 2.00$



I dati sono finti...



Da cui

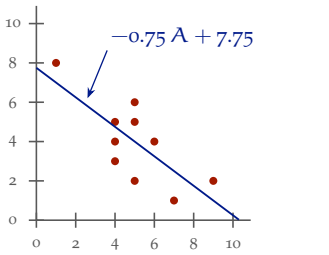
a_i^*	-0.5	0.0	-2.0	2.0	-0.5	1.0	0.0	-0.5	0.0	0.5
b_i^*	0.5	1.0	2.0	-1.0	0.0	-1.5	0.5	-0.5	-1.0	0.0
$a_i^* b_i^*$	-0.25	0	-4	-2	0	-1.5	0	0.25	0	0

$$r = \text{media di questi} = \frac{-7.5}{10} = -0.75$$

Per cui la retta di regressione è $B^* = -0.75\,A^*$, che possiamo scrivere nella forma

$$\frac{B-4}{2} = -0.75\,\frac{A-5}{2}$$

$$B = -0.75\,A + 7.75$$



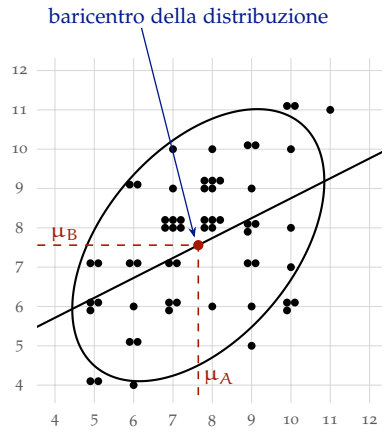
□

Esempio

I risultati che abbiamo discusso di una prova di abilità hanno

$$\mu_A = 7.644 \qquad \sigma_A = 1.603$$
$$\mu_B = 7.559 \qquad \sigma_B = 1.730 \qquad r = 0.469$$

quindi la retta di regressione è



$$\frac{B - 7.559}{1.730} = 0.469\,\frac{A - 7.644}{1.603} \qquad \Longrightarrow \qquad B = 0.506\,A + 3.69$$

Non stupisce che ci sia correlazione fra due ripetizioni della medesima prova: questo avviene, in generale, con le prove di abilità.

Osservazione
La retta di regressione passa sempre per il baricentro (μ_A, μ_B) dei punti del campione, quindi la si può disegnare tracciando la retta per questo punto che ha pendenza $r\,\frac{\sigma_B}{\sigma_A}$.

Nota (regressione verso la media)
Nell'esempio, la retta di regressione in coordinate standard è $B^* = 0.469\,A^*$: siccome $|r| < 1$, il valore previsto per B è, in coordinate standard, più vicino alla media di quanto lo sia A. I dati lo confermano: gli 8 studenti che hanno ottenuto 10 alla prima prova hanno avuto, alla seconda, 8.1 in media; i 7 che hanno ottenuto 5 hanno avuto 5.7 in media. Chi è andato molto bene tende a peggiorare un po', chi è andato male a migliorare. Questo fenomeno si chiama regressione verso la media — è da qui che viene il nome "retta di regressione".

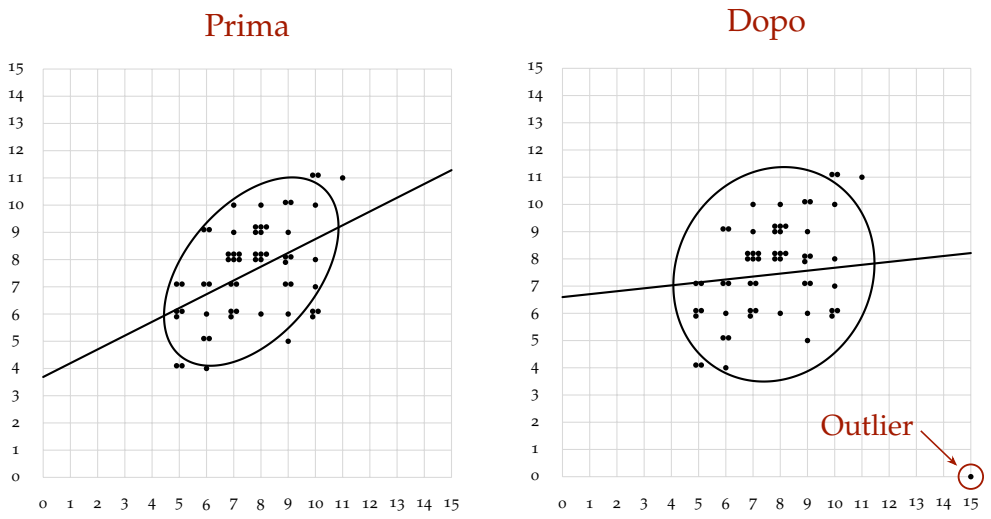
Non serve cercare spiegazioni: i primi non si sono montati la testa, gli ultimi non si sono impegnati di più, e, contrariamente al motto evangelico, regrediscono verso la *media*, non verso il massimo della distribuzione. Questo fenomeno è una conseguenza meccanica del fatto che la correlazione non è perfetta. Il punteggio dipende in parte dall'abilità e in parte dalla fortuna: fra chi ha ottenuto un punteggio molto alto ci sono più fortunati che sfortunati, e la fortuna non si ripete. Infatti il fenomeno si presenta anche a ritroso: chi è andato molto bene alla seconda prova, alla prima era andato, in media, un po' peggio.

Attenzione se si valuta una terapia. Di solito un paziente comincia a curarsi quando sta peggio: alla visita successiva starà, in media, meglio, qualunque cosa abbia preso, per cui, senza un gruppo di controllo, è facile scambiare questo

miglioramento per un effetto del trattamento. È una delle ragioni per cui servono gli studi controllati.

§20.2 Regressione lineare e outlier

In statistica un outlier è un dato che pare anomalo se confrontato con la distribuzione degli altri. Questa definizione è imprecisa perché non c'è una definizione precisa. Possiamo introdurre artificialmente un outlier fra i dati della nostra prova di abilità aggiungendo il singolo punto $(15, 0)$ ai 59 presenti.



$r = 0.469$ — p-value $= 0.00018$

$r = 0.101$ — p-value $= 0.44$

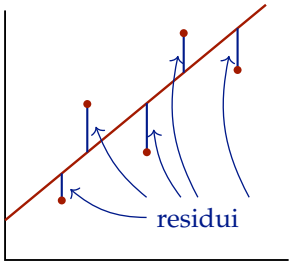
Come si vede, un singolo outlier confonde completamente il calcolo: il coefficiente di correlazione e la retta di regressione non sono misure statistiche robuste. Allo stesso modo la media non è robusta,

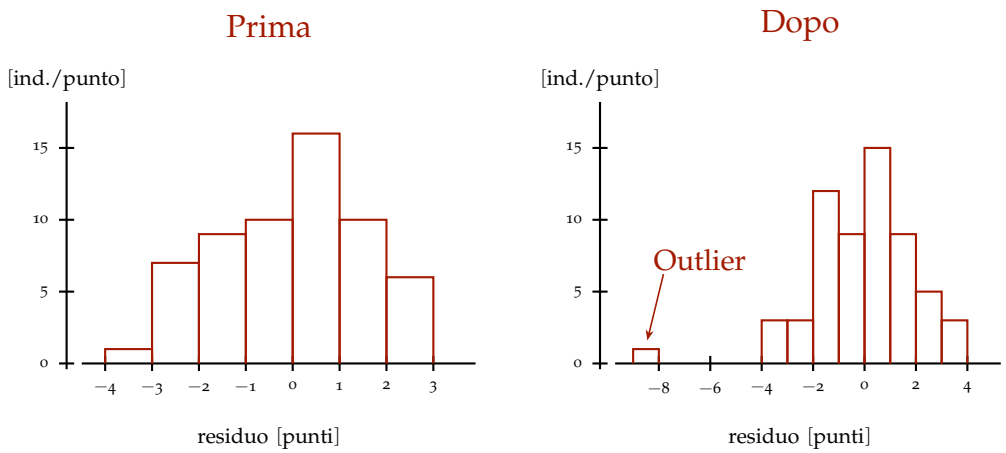
perché un singolo outlier può avere un peso arbitrariamente grande sulla media, mentre, per esempio, questo non accade per la mediana.

Perché il metodo che abbiamo visto sia giustificato, conviene che i residui

$$\text{i-esimo residuo} = b_i - \overbrace{(m\,a_i + q)}^{\text{retta di regressione}}$$

siano distribuiti in maniera (approssimativamente) gaussiana. Questa condizione si può verificare a posteriori, per esempio calcolando i residui e tracciandone un istogramma.





In conclusione, è importante, prima di applicare la regressione lineare, controllare su un diagramma di dispersione che non ci siano evidenti outlier. È buona norma verificare altresì la distribuzione dei residui.

§20.3 Il p-value

I p-value compaiono, in generale, nel contesto dei test di significatività. Nel caso della regressione lineare, noi vogliamo saggiare l'ipotesi seguente — che, per qualche ragione, chiamiamo ipotesi alternativa.

Ipotesi alternativa: A e B sono correlate linearmente.

Per farlo, raccogliamo un campione di n individui, calcoliamo il coefficiente r_{oss} e la retta di regressione, e ci convinciamo che i residui sono distribuiti in modo compatibile con una gaussiana. Ora possiamo chiederci: se A e B fossero scorrelate, quanto sarebbe probabile che un campione di n individui abbia $|r| \geqslant |r_{oss}|$? Detto in altri termini: se A e B fossero scorrelate, quanti dei campioni di n individui, in proporzione a tutti quelli possibili, sarebbero correlati al pari del nostro, o più? Questo è il p-value e misura il grado di significatività statistica con cui possiamo rifiutare l'ipotesi nulla:

Ipotesi nulla: A e B non sono correlate.

Più basso è il p-value, meno è verosimile che la correlazione osservata sia uno scherzo del caso, più, quindi, è ragionevole che sia reale.

Calcolare questo p-value può essere complicato, per via della necessità di caratterizzare l'insieme di tutti i campioni di n individui possibili. Infatti, a seconda di quali ipotesi si fanno sulla popolazione, si ottengono diversi insiemi di campioni possibili, quindi p-value diversi. Il fatto seguente è basato sull'ipotesi che i residui siano indipendenti fra loro e distribuiti in maniera gaussiana.

Fatto
Se valesse l'ipotesi nulla, allora

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

sarebbe distribuito secondo una t di Student con $n-2$ gradi di libertà.

La correlazione è significativa quando possiamo rifiutare l'ipotesi nulla — l'ipotesi di non correlazione. Vale quindi la regola seguente.

Regola (significatività della correlazione)
La correlazione è significativa al livello α se

$$|t| > t_{\alpha/2,\,n-2}$$

Dove, ricordiamo, $t_{\alpha/2,\,n-2}$ è il valore della tavola della t di Student nella colonna $\frac{\alpha}{2}$ alla riga $n-2$ (per $\alpha = 0.05$ la colonna 0.025, per $\alpha = 0.01$ la colonna 0.005).

Esercizio
Considera la situazione dell'esercizio a pagina 149:

a_i	4	5	1	9	4	7	5	4	5	6
b_i	5	6	8	2	4	1	5	3	2	4

$n = 10$

La correlazione è significativa al livello 0.05? E al livello 0.01?

Soluzione. Abbiamo già calcolato $r = -0.75$, da cui

$$t = -0.75\sqrt{\frac{10-2}{1-0.75^2}} \approx -3.21$$

Guardiamo la tavola della t di Student (appendice C).

				$\alpha = 0.05$		$\alpha = 0.01$	
gradi di libertà	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	
...	...	...	...	...	...	...	
6	0.72	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	
7	0.71	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	
8	0.71	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	$2.31 < 3.21 < 3.36$
9	0.70	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	
10	0.70	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	

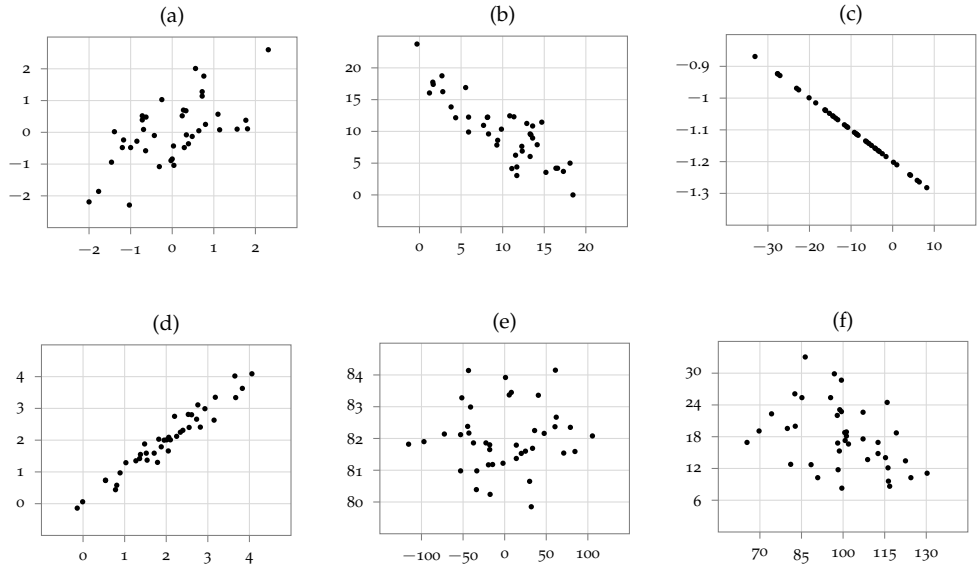
Applicando la regola: alla riga $8 = 10 - 2$ le soglie sono $t_{0.025,8} = 2.31$ e $t_{0.005,8} = 3.36$. Siccome $2.31 < |t| = 3.21 < 3.36$, la correlazione è significativa al livello 0.05, ma non al livello 0.01. □

§20.4 Esercizi

Esercizio 110 (soluzione a p. 318)
I coefficienti di correlazione corrispondenti ai seguenti diagrammi di dispersione sono

$$-0.85 \qquad -0.38 \qquad -1.00 \qquad 0.06 \qquad 0.97 \qquad 0.62$$

Associa ad ogni diagramma il suo coefficiente.



I valori indicati sugli assi sono spaziati di una deviazione standard delle rispettive variabili, con la media posta al centro. Per ciascuno dei diagrammi, calcola l'equazione della retta di regressione e traccia questa retta sul diagramma stesso.

Esercizio 111 (soluzione a p. 320)
Considera le seguenti coppie di valori assunti dalle variabili statistiche X e Y su un campione di sei individui.

x_i	4.9	13.6	0.3	5.8	4.0	5.6
y_i	5.4	2.9	11.7	1.8	6.1	8.1

1. Rappresenta questi punti su un diagramma di dispersione.
2. Calcola la retta di regressione di Y (variabile dipendente) rispetto a X (variabile indipendente).
3. È possibile affermare, al livello di significatività $\alpha = 0.05$, che X e Y sono linearmente correlate?

Esercizio 112 (soluzione a p. 321)
Considera le seguenti coppie di valori assunti dalle variabili statistiche X e Y su un campione di sei individui.

x_i	0.7	9.4	4.3	3.2	6.9	5.3
y_i	4.1	9.9	6.8	6.6	7.2	9.8

1. Rappresenta questi punti su un diagramma di dispersione.
2. Calcola la retta di regressione di Y (variabile dipendente) rispetto a X (variabile indipendente).
3. È possibile affermare, al livello di significatività $\alpha = 0.05$, che X e Y sono linearmente correlate?

Esercizio 113 (soluzione a p. 323)
Considera le seguenti coppie di valori assunti dalle variabili statistiche X e Y su un campione di sei individui.

x_i	4.4	2.1	8.0	4.3	4.7	2.7
y_i	9.4	5.4	9.1	5.1	7.7	3.9

1. Rappresenta questi punti su un diagramma di dispersione.
2. Calcola la retta di regressione di Y (variabile dipendente) rispetto a X (variabile indipendente).
3. È possibile affermare, al livello di significatività $\alpha = 0.05$, che X e Y sono linearmente correlate?

Esercizio 114 (soluzione a p. 324)
Le variabili statistiche X e Y hanno rispettivamente media 3.60 e 84.1, e deviazione standard 0.45 e 8.6. Sapendo che la pendenza della retta di regressione di Y (variabile dipendente) rispetto a X (variabile indipendente) è 14.6, determina l'espressione della retta e il coefficiente di correlazione di Pearson. Supponendo che i dati precedenti siano stati ricavati da un campione di dieci individui, è possibile affermare, al livello di significatività $\alpha = 0.05$, che X e Y sono correlate? Qual è l'espressione della retta di regressione di X (variabile dipendente) rispetto a Y (variabile indipendente), ossia la retta di regressione che si ottiene scambiando le variabili?

§21 Test di significatività

I dati statistici sono affetti dal caso — il caso, anzi, viene impiegato di proposito, per esempio negli studi clinici randomizzati. Servono quindi metodi per distinguere i fenomeni realmente rilevabili nei dati dagli effetti del caso. Questi metodi si chiamano test di significatività (detti anche test di ipotesi). Il risultato di un test di significatività è un numero, detto p-value, che misura quanto sia verosimile attribuire i dati osservati alla mera azione del caso: più piccolo è il p-value, maggiore è la significatività statistica della rilevazione del fenomeno corrispondente. Il p-value si confronta con una soglia fissata in anticipo, detta livello di significatività. Abbiamo già visto, studiando la regressione lineare, che, nelle scienze della vita, un p-value < 0.05 è frequentemente richiesto per considerare il risultato statisticamente significativo, e un p-value < 0.01 viene considerato fortemente significativo.

Nota importante
È fondamentale ricordare che i p-value misurano il grado di evidenza statistica che abbiamo a favore di una certa ipotesi, e non l'intensità dell'effetto ipotizzato, né il rilievo scientifico del risultato.

§21.1 Un esempio: il pronetalolo

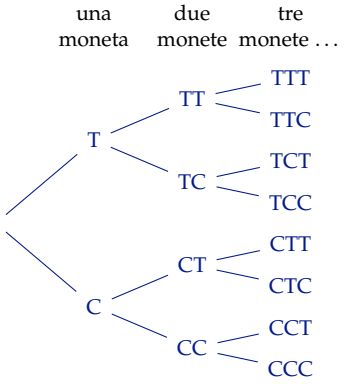
Consideriamo la tabella seguente, che mostra i risultati di uno studio clinico sull'uso del pronetalolo per il trattamento dell'angina pectoris (Prichard et al., 1963).

	numero di attacchi di angina	
paziente	pronetalolo	placebo
1	7	14
2	16	23
3	29	71
4	25	34
5	15	17
6	1	8
7	0	2
8	2	7
9	0	3
10	348	323
11	65	79
12	41	55

In questo studio, dodici pazienti sono stati trattati, a periodi alterni, con pronetalolo o con un placebo. (Nota: le durate dei periodi di trattamento coincidono e la loro disposizione nel tempo è randomizzata.) Per ciascun paziente si riporta il numero di attacchi subiti durante ciascuno dei due trattamenti. Si vede bene che 11 dei 12 pazienti hanno avuto meno attacchi mentre si trovavano sotto l'azione del farmaco: possiamo quindi concludere che questo è efficace? Se il farmaco non facesse nulla, se fosse equivalente a un placebo, ci aspetteremmo, nel confronto col placebo, di vedere

un miglioramento grosso modo nella metà dei casi e nell'altra metà un peggioramento: insomma la distribuzione di miglioramenti e peggioramenti, se il farmaco non avesse effetto, sarebbe statisticamente equivalente al lancio di una moneta. Ci chiediamo quindi: dal mero lancio di 12 monete, quanto sarebbe probabile ottenere 11 o più risultati concordi, come è avvenuto nell'esperimento?

Dodici monete possono dare luogo a $2^{12} = 4096$ diverse sequenze di teste e croci.



Ogni nuova moneta duplica il numero delle possibili sequenze. Con 12 monete le sequenze possibili sono quindi

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{\text{12 duplicazioni}} = 2^{12} = 4096$$

Quante sequenze presentano 11 o più risultati concordi? Abbiamo due sequenze con 12 risultati concordi: TTTT...T e CCCC...C. Abbiamo poi 12 sequenze con 11 teste: CTTT...T, TCTT...T, TTCT...T, ... (sono 12 perché l'unica C può stare in posizione 1, 2, 3, ..., 12: che sono 12 possibilità). Infine, allo stesso modo, abbiamo 12 sequenze con 11 croci: gran totale $2 + 12 + 12 = 26$. La probabilità di ottenere 11 o più risultati concordi da 12 monete è quindi

$$p = \frac{26}{4096} \approx 0.0063$$

Questo numero è il p-value prodotto dal test che abbiamo appena eseguito. Si chiama test dei segni, perché, di ciascun paziente, considera solo il segno della differenza fra i due trattamenti (miglioramento o peggioramento), e non la sua entità. Siccome $p < 0.01$ sappiamo già che i risultati dell'esperimento mostrano una forte evidenza statistica a favore dell'efficacia del pronetalolo. Ma perché questo? Qual è il ragionamento? Noi stiamo dicendo che se il farmaco non avesse effetto, allora l'esperimento sarebbe come il lancio ripetuto di 12 monete, quindi un risultato sbilanciato come quello che abbiamo osservato, o più, si verificherebbe solo 26 volte su 4096, o nello 0.63% dei casi. Di conseguenza o il farmaco ha effetto, oppure si è verificata una coincidenza molto rara: meno di un caso su 100. Più rara è la coincidenza — ossia minore è il p-value — più siamo spinti a credere che questa non si sia, in realtà, verificata, la qual cosa equivale a dire che crediamo che il farmaco abbia effetto.

Nota
Prichard et al. dichiarano un p-value, per questo test, di 0.003, ossia la metà del nostro. Chiaramente loro hanno calcolato la probabilità di ottenere 11 o più risultati positivi (miglioramenti) e non concordi (che potrebbero essere positivi o negativi). Il nostro si chiama test a due code, il loro a una coda: il primo considera risultati pari o più estremi di quelli dell'esperimento, il secondo risultati pari o più positivi. I test a due code asseriscono una minore significatività statistica (p-value più alto), sono quindi più prudenti. Generalmente, la scelta più prudente, ossia quella più cauta nell'asserire la significatività dei risultati, è ritenuta preferibile — ma il lavoro citato è del '63, erano altri tempi...

§21.2 Ricapitolando

Un test di significatività oppone due ipotesi.

Ipotesi nulla: "i dati sono unicamente affetti dal caso".
Ipotesi alternativa: "i dati esibiscono un fenomeno che non si può spiegare con la mera casualità".

Se stiamo valutando un trattamento, l'ipotesi alternativa equivale quindi a dire "il trattamento produce un effetto". Un test di significatività può solo rifiutare l'ipotesi nulla, e anche questo solamente a un certo livello di significatività α: l'ipotesi nulla si rifiuta se il p-value è minore di α. Livelli comunemente impiegati sono $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.01$. Più bassa è, numericamente, questa soglia, più forte la significatività statistica con la quale rifiutiamo l'ipotesi nulla (se effettivamente $p < \alpha$).

In termini precisi, dire che un test viene eseguito al livello di significatività α equivale a dire che se l'ipotesi nulla fosse vera allora la probabilità che il test rifiuti l'ipotesi nulla stessa ("falso positivo" o "errore del primo tipo") sarebbe α.

Nota importante
Un test non può rifiutare l'ipotesi alternativa. Ossia, un risultato di non significatività ci dice che non siamo in grado di rifiutare l'ipotesi nulla e non che abbiamo dimostrato l'inefficacia del trattamento.

Nota
Nessun livello di significatività statistica equivale alla certezza. Anche una coincidenza che capita solo una volta su un milione, quella volta, capita. E nulla vieta che quella volta sia proprio il primo tentativo. L'unico modo di avvicinarsi alla certezza, in statistica, è ripetendo gli esperimenti (meglio se ad opera di ricercatori diversi, con metodi diversi, eccetera). Nessun esperimento, nessun risultato, in questo senso, può dirsi definitivo.

Nota
Fissare la soglia α determina solo in modo indiretto la probabilità di ottenere un risultato positivo o negativo nel caso in cui sia l'ipotesi alternativa ad essere vera. Va da sé che più bassa è la soglia, più il test è severo, maggiore sarà quindi la probabilità, se è vera l'ipotesi alternativa, di un falso negativo, o errore del secondo tipo. Questa probabilità, solitamente denotata con β, non dipende solo da α, e, in questo corso, non vedremo come si possa calcolare. Il numero $1-\beta$, che è la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla se questa è falsa, si chiama potenza del test.

Per estrarre il p-value 0.0063 dai dati di Prichard et al. abbiamo impiegato un ragionamento ad hoc. In generale, non è necessario, per ogni singolo caso, fare una piccola invenzione: ci sono dei metodi standard che coprono tutti i casi più frequenti. Nel seguito vedremo due di questi metodi:

- il test t di Student per saggiare le medie di variabili statistiche numeriche;
- il test χ^2 per saggiare la distribuzione di variabili statistiche categoriche.

§21.3 Test t di Student

Supponiamo di estrarre un campione di n individui e consideriamo i valori $x_1, \dots, x_n$ assunti dalla variabile statistica X su questi individui. Intendiamo saggiare l'ipotesi che la media di X (su tutta la popolazione) sia un certo valore μ_0.

Ipotesi nulla: $\mu_X = \mu_0$
Ipotesi alternativa: $\mu_X \neq \mu_0$

Perché questo test si applichi è necessario che la distribuzione di X sia grosso modo gaussiana o il numero n degli individui grande.

Calcoliamo

$$t = \frac{|\hat{\mu} - \mu_0|}{s/\sqrt{n}} \qquad (\hat{\mu} \text{ è la media campionaria, } s^2 \text{ la varianza campionaria})$$

Se fosse vera l'ipotesi nulla, questa quantità sarebbe distribuita come una t di Student con $n-1$ gradi di libertà. Quindi:

Regola (test t sulla media)
Rifiutiamo l'ipotesi nulla al livello di significatività α se $t > t_{\alpha/2,\,n-1}$ (il che equivale a dire che il p-value è minore di α).

Dove la soglia $t_{\alpha/2,\,n-1}$ si può ricavare da una tavola delle aree sotto il grafico della t di Student (appendice C): si cerca la riga $n-1$ e la colonna $\frac{\alpha}{2}$. Per esempio, con un campione di 5 individui, per il livello di significatività 0.01 la soglia è

$$t_{0.005,\,4} = 4.60$$

Nota
Per valori grandi di n, la distribuzione t di Student è bene approssimata da una gaussiana. In mancanza di valori tabulati, oltre i 30 gradi di libertà, le soglie possono essere dedotte da una tavola della gaussiana (nella tavola dell'appendice C, è l'ultima riga: ∞).

Osservazione
Questo test è strettamente legato agli intervalli di confidenza (capitolo 19). La condizione $t > t_{\alpha/2,\, n-1}$ equivale a

$$|\hat{\mu} - \mu_0| > t_{\alpha/2,\, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

e il secondo membro è la semiampiezza dell'intervallo di confidenza per la media, calcolato con il metodo più generale. Quindi il test rifiuta l'ipotesi nulla $\mu_X = \mu_0$ al livello di significatività α esattamente quando μ_0 cade fuori dall'intervallo di confidenza al livello $1 - \alpha$. Per esempio, il livello di significatività 0.05 corrisponde al livello di confidenza del 95%.

Riprendiamo l'analisi dei dati di Prichard et al. sull'uso del pronetalolo per l'angina pectoris. Il lavoro ci dice sinteticamente cosa è stato fatto[1]: è stata considerata la variabile statistica

$$X = \log(\text{placebo} + 1) - \log(\text{pronetalolo} + 1)$$

L'ipotesi nulla che vorremmo rifiutare è che il farmaco non abbia effetto. Se questo avvenisse, le due quantità sottratte sarebbero, in media, uguali, quindi avremmo

Ipotesi nulla: $\mu_X = 0$ (questo è μ_0)

Il lavoro asserisce di poter rifiutare questa ipotesi al livello di significatività 0.01: per confermare i calcoli dobbiamo verificare che

$$t = \frac{|\hat{\mu}|}{s/\sqrt{12}} > t_{0.005,\, 11} = 3.11$$

dove $\hat{\mu}$ è la media di X e s^2 la varianza campionaria. Si può osservare che la scelta della base dei logaritmi non influisce sul risultato del test: facciamo i conti in base 10. (Cambiare base moltiplica tutti i valori di X per la stessa costante, che nel rapporto t si semplifica.)

Calcoliamo X per ciascun paziente.

[1] Riportiamo il passo in traduzione: "I dati sono stati analizzati anche con una tecnica standard di analisi della varianza, dopo aver trasformato la variabile nel logaritmo di (numero di attacchi +1). Questa trasformazione rende la distribuzione più simmetrica, e la variabilità più uniforme fra i gruppi, come richiesto dall'analisi. La differenza fra i dati del placebo e del pronetalolo risulta significativa al livello dell'1%."

paziente	pronetalolo	placebo	X
1	7	14	$0.2730 = \log_{10}(14+1) - \log_{10}(7+1)$
2	16	23	$0.1498 = \log_{10}(23+1) - \log_{10}(16+1)$
3	29	71	0.3802
4	25	34	0.1291
5	15	17	0.0512
6	1	8	0.6532
7	0	2	0.4771
8	2	7	0.4260
9	0	3	0.6021
10	348	323	−0.0323
11	65	79	0.0835
12	41	55	$0.1249 = \log_{10}(55+1) - \log_{10}(41+1)$

Abbiamo

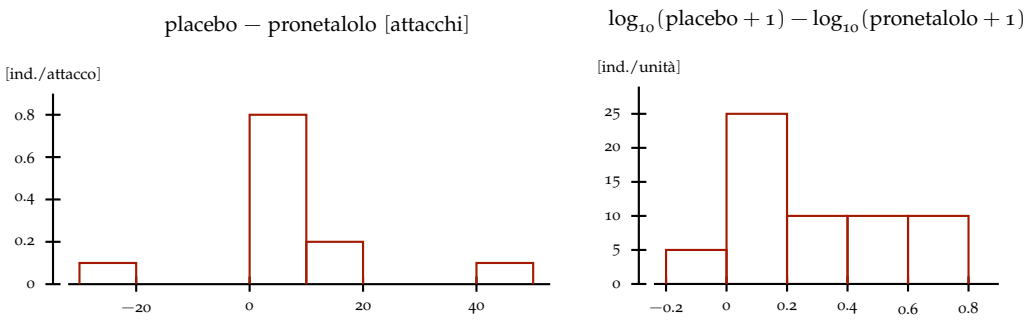
$$\hat{\mu} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{12}}{12} = 0.2765 \qquad s = \sqrt{\frac{(x_1 - \hat{\mu})^2 + \ldots + (x_{12} - \hat{\mu})^2}{11}} = 0.2267$$

per cui

$$t = \frac{|\hat{\mu}|}{s/\sqrt{12}} \approx 4.22$$

Siccome $4.22 > t_{0.005,\,11} = 3.11$, possiamo rifiutare l'ipotesi nulla al livello di significatività 0.01, a favore dell'ipotesi alternativa, ossia dell'efficacia del farmaco.

Merita considerazione la scelta di applicare una trasformazione logaritmica. A prima vista potrebbe sembrare un tentativo di adulterare i dati, però, in realtà, si tratta di una tecnica standard. Cerca di risolvere il problema che alcune distribuzioni che si incontrano in pratica hanno code lunghe, ossia una proporzione eccessiva di individui molto lontani dalla media, rispetto a quanto sarebbe previsto da una distribuzione gaussiana.



Il guaio è che molti test derivano dallo studio della distribuzione gaussiana, quindi, a distribuzioni del genere, si applicano male. Più profondamente, se noi usassimo placebo − pronetalolo, i due individui che si trovano molto lontani dalla media avrebbero un'influenza preponderante sul risultato del test, e questo non è desiderabile, perché, in ultima analisi, ci interessa sapere se il farmaco sia utile per la generalità dei pazienti, e non se il singolo caso più fortunato di tutti bilanci o no il singolo caso più sfortunato di tutti. (Nell'istogramma di sinistra, 2 individui su 12 sono oltre 2σ dalla media: dovrebbero essere meno del 5%. Dopo la trasformazione, l'istogramma è più compatto.)

§21.4 Test t per il confronto di variabili appaiate

Nella sezione precedente abbiamo appreso che il test t si può impiegare anche per saggiare l'uguaglianza fra le medie di due variabili statistiche appaiate. Ricapitolando, questa è la situazione. Abbiamo un campione di n individui e due variabili numeriche A e B; abbiamo quindi i numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$. Lì abbiamo considerato $A = \log_{10}(\text{placebo} + 1)$ e $B = \log_{10}(\text{pronetalolo} + 1)$. Vogliamo saggiare l'ipotesi nulla

Ipotesi nulla: $\mu_A = \mu_B$

Per farlo calcoliamo la variabile $X = A - B$, per cui

$$x_1 = a_1 - b_1 \qquad x_2 = a_2 - b_2 \qquad \dots \qquad x_n = a_n - b_n$$

Ora possiamo rifiutare l'ipotesi nulla al livello di significatività α se

$$t = \frac{|\hat{\mu}_X|}{s_X/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2,\, n-1}$$

§21.5 Test t per il confronto di campioni indipendenti

Negli studi clinici avviene spesso di avere due campioni indipendenti: un gruppo di trattamento e un gruppo di controllo. Una variante del test t, detta test di Welch, permette di confrontare le medie di due variabili statistiche sull'uno e sull'altro gruppo, per saggiare l'ipotesi che siano uguali. Questa è la situazione: abbiamo due campioni, di n_X e n_Y individui rispettivamente. Una certa variabile statistica X assume sul primo i valori $x_1, \dots, x_{n_X}$, mentre una seconda variabile Y assume sul secondo $y_1, \dots, y_{n_Y}$. Possiamo rifiutare l'ipotesi nulla

Ipotesi nulla: $\mu_X = \mu_Y$

al livello di significatività α se

$$t = \frac{|\hat{\mu}_X - \hat{\mu}_Y|}{\sqrt{\dfrac{s_X^2}{n_X} + \dfrac{s_Y^2}{n_Y}}} > t_{\alpha/2,\, \nu}$$

dove s_X^2 e s_Y^2 sono le varianze campionarie dei due campioni, e il numero ν dei gradi di libertà è il più piccolo fra $n_X - 1$ e $n_Y - 1$.

> **Nota**
> Il numero di gradi di libertà che compete a questo test si calcola con una formula più complicata, e risulta sempre compreso fra il più piccolo di $n_X - 1$ e $n_Y - 1$, e $n_X + n_Y - 2$. Prendere il più piccolo è la scelta prudente: la soglia è un po' più alta del necessario, quindi è un po' più difficile rifiutare l'ipotesi nulla.

§21.6 Test χ^2

Consideriamo una variabile categorica X che può assumere m valori diversi $x_1, \ldots, x_m$ (qui l'indice numera i valori possibili, non gli individui). Per esempio il sesso è una variabile di questo tipo: in questo caso $m = 2$, $x_1 =$ "femmina", $x_2 =$ "maschio". Un altro esempio potrebbe essere lo stato di occupazione, con $m = 3$ e i tre valori "disoccupato", "occupato" e "in pensione". Dati m numeri $f_1, f_2, \ldots, f_m$, possiamo chiederci se questi siano le frequenze relative dei valori $x_1, \ldots, x_m$ rispettivamente, su tutta la popolazione. Estraiamo un campione casuale di n individui, e indichiamo con $n_1, n_2, \ldots, n_m$ le frequenze degli m valori nel campione.

Notazione (promemoria)
frequenza $=$ numero di individui frequenza relativa $= \dfrac{\text{numero di individui}}{\text{totale}}$.
Per cui $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$ e $f_1 + f_2 + \ldots + f_m = 1$.

Chiaramente, se le frequenze relative su tutta la popolazione fossero davvero $f_1, \ldots, f_m$, sul nostro campione ci aspetteremmo le frequenze teoriche $\bar{n}_1 = n \cdot f_1$, $\bar{n}_2 = n \cdot f_2$, ... Calcoliamo la quantità

$$\chi^2 = \frac{(n_1 - \bar{n}_1)^2}{\bar{n}_1} + \frac{(n_2 - \bar{n}_2)^2}{\bar{n}_2} + \ldots + \frac{(n_m - \bar{n}_m)^2}{\bar{n}_m}$$

Questo numero, chiaramente, misura la distanza fra le frequenze osservate $n_1, \ldots, n_m$ e le frequenze teoriche $\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_m$.

Regola (test χ^2)
Il test χ^2 rifiuta l'ipotesi nulla

Ipotesi nulla: le frequenze relative di $x_1, \ldots, x_m$ sono $f_1, \ldots, f_m$

al livello di significatività α se $\chi^2 > \chi^2_{\alpha, m-1}$, dove $m - 1$ è il numero dei gradi di libertà.

Le soglie $\chi^2_{\alpha, m-1}$ sono tabulate, similmente a come accade per la t di Student (appendice C).

Nota
Il test χ^2 è generalmente eseguito a una coda. Infatti abbiamo osservato che il valore di χ^2 misura la distanza fra le frequenze osservate e quelle teoriche, ossia previste dall'ipotesi nulla. È chiaro quindi che solo un valore grosso di χ^2 fornisce una ragione per rifiutare quest'ultima.

Affinché il test χ^2 produca risultati validi è generalmente richiesto che sia soddisfatta la seguente condizione, dovuta a Cochran.

Regola (condizione di Cochran)
Almeno l'80% delle frequenze teoriche deve essere > 5 e tutte le frequenze teoriche devono essere > 1.

Se questa condizione non è soddisfatta, allora la tecnica non si applica. In questa situazione è possibile ricondursi ad un caso trattabile combinando alcuni dei valori fra loro. Per esempio, se abbiamo una variabile "classe di reddito" suddivisa in dieci categorie I, II, ..., X, possiamo accorpare queste categorie a due a due ottenendo una nuova variabile che può assumere i cinque valori I–II, III–IV, V–VI, eccetera. Va da sé che, sommandosi le frequenze, sarà più facile che la condizione di Cochran sia soddisfatta.

Introducendo i test di significatività abbiamo analizzato i dati di Prichard et al. osservando che 11 dei 12 pazienti sono apparentemente migliorati durante il trattamento. Se questo non avesse effetto, i miglioramenti e peggioramenti si verificherebbero con uguale frequenza (50% e 50%). Con un calcolo ad hoc abbiamo sfruttato questo fatto per determinare il p-value 0.0063: la probabilità che, lanciate 12 monete, vengano 11 o più risultati uguali. Ripetiamo la medesima analisi usando il test χ^2.

Consideriamo la variabile categorica X che associa ad ogni paziente il valore $x_1 =$ "+" se questi è migliorato e $x_2 =$ "−" se è peggiorato. Quindi $m = 2$. L'ipotesi nulla è che miglioramenti e peggioramenti si verifichino con uguale frequenza:

Ipotesi nulla: le frequenze relative di "+" e "−" sono $f_1 = 0.5$ e $f_2 = 0.5$.

Il numero dei pazienti è $n = 12$, per cui le frequenze teoriche sono

$$\bar{n}_1 = nf_1 = 6 \qquad \bar{n}_2 = nf_2 = 6$$

e queste vanno confrontate con le frequenze osservate $n_1 = 11$ e $n_2 = 1$. Quindi

$$\chi^2 = \frac{(11-6)^2}{6} + \frac{(1-6)^2}{6} \approx 8.33$$

La soglia con cui confrontare questo numero, per il livello di significatività 0.01, è $\chi^2_{0.01,1} = 6.63$. Siccome $8.33 > 6.63$ possiamo rifiutare l'ipotesi nulla a questo livello.

Avendo a disposizione un computer, possiamo anche calcolare esattamente a che p-value corrisponda $\chi^2 = 8.33$: il risultato è $p = 0.0039$. Il valore corretto, però, è quello che abbiamo già calcolato: $p = 0.0063$. La differenza si spiega per una combinazione delle approssimazioni implicite nel test e il fatto che le frequenze teoriche sono appena accettabili per la condizione di Cochran.

§21.7 Test χ^2 di indipendenza

Un test χ^2 può essere anche impiegato per valutare la correlazione fra due variabili categoriche. Per esempio, in uno studio clinico, si vuole capire se trattamento/controllo e l'esito della cura siano variabili, almeno in parte, correlate.

Consideriamo questa situazione: abbiamo due variabili categoriche X e Y, che possono assumere i valori $x_1, \dots, x_a$ e $y_1, \dots, y_b$ rispettivamente. Estraiamo un campione di n individui e indichiamo con $n_{i,j}$, al variare dei due indici $i = 1, \dots, a$ e $j = 1, \dots, b$, le frequenze delle coppie x_i, y_j. Con c_i indichiamo la frequenza di x_i e con r_j la frequenza di y_j. Sotto forma di tabella di contingenza possiamo rappresentare la situazione: c_i e r_j sono i totali delle colonne e delle righe.

	x_1	x_2	$\dots$	x_a	totali righe
y_1	$n_{1,1}$	$n_{2,1}$	$\dots$	$n_{a,1}$	r_1
y_2	$n_{1,2}$	$n_{2,2}$	$\dots$	$n_{a,2}$	r_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_b	$n_{1,b}$	$n_{2,b}$	$\dots$	$n_{a,b}$	r_b
totali colonne	c_1	c_2	$\dots$	c_a	n

Vogliamo saggiare l'ipotesi nulla

Ipotesi nulla: le variabili X e Y sono indipendenti (ossia non c'è correlazione fra X e Y).

Per farlo, calcoliamo le frequenze teoriche

$$\bar{n}_{i,j} = \frac{c_i \cdot r_j}{n} \qquad \text{per es. } \bar{n}_{2,7} = \frac{c_2 \cdot r_7}{n}$$

Osservazione
Il ragionamento è che, se le variabili fossero indipendenti, la proporzione di y_7 nella seconda colonna della tabella sarebbe uguale alla proporzione di y_7 sul totale, quindi

$$\underbrace{\text{n. di } y_7 \text{ nella col. } x_2}_{\bar{n}_{2,7} \text{ (teorico, se vale l'ipotesi nulla)}} : \underbrace{\text{tot. col. } x_2}_{c_2} = \underbrace{\text{n. di } y_7 \text{ totali}}_{r_7} : \underbrace{\text{n. individui}}_{n}$$

da cui, risolvendo la proporzione, $\bar{n}_{2,7} = \frac{c_2 \cdot r_7}{n}$.

Ora calcoliamo χ^2 a partire da tutte le frequenze $n_{i,j}$ e dalle corrispondenti frequenze teoriche $\bar{n}_{i,j}$.

$$\chi^2 = \frac{(n_{1,1} - \bar{n}_{1,1})^2}{\bar{n}_{1,1}} + \frac{(n_{2,1} - \bar{n}_{2,1})^2}{\bar{n}_{2,1}} + \dots + \frac{(n_{3,5} - \bar{n}_{3,5})^2}{\bar{n}_{3,5}} + \dots + \frac{(n_{a,b} - \bar{n}_{a,b})^2}{\bar{n}_{a,b}}$$

Regola (test χ^2 di indipendenza)
Rifiutiamo l'ipotesi nulla al livello di significatività α se $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,(a-1)\cdot(b-1)}$.

Esercizio
La tabella seguente proviene dallo studio sulla efficacia della streptomicina che abbiamo già esaminato (Medical Research Council, 1948).

			trattamento = X		
			x_1		x_2
		valutazione radiologica a sei mesi	streptomicina		controllo
esito = Y	y_1	netto miglioramento	28	51%	4	8%
	y_2	miglioramento moderato o lieve	10	18%	13	25%
	y_3	nessun cambiamento sostanziale	2	4%	3	6%
	y_4	peggioramento moderato o lieve	5	9%	12	23%
	y_5	netto peggioramento	6	11%	6	11%
	y_6	decesso	4	7%	14	27%
		totale	55	100%	52	100%

Usa un test χ^2 per saggiare l'ipotesi nulla: non c'è correlazione fra il trattamento con streptomicina e l'esito a sei mesi.

Soluzione. Chiamiamo X la variabile trattamento, che può assumere due valori: x_1 = "streptomicina" e x_2 = "controllo". Chiamiamo Y la variabile esito, e denotiamo con $y_1, \dots, y_6$ i sei possibili esiti considerati. Quindi a = numero degli $x_i = 2$ e b = numero degli $y_j = 6$. La tabella di contingenza è come qui accanto: nell'ultima colonna ci sono i totali delle righe, $r_1 = 32, \dots, r_6 = 18$, e nell'ultima riga i totali delle colonne, $c_1 = 55$ e $c_2 = 52$; il numero degli individui è $n = 107$.

	x_1	x_2	tot.
y_1	28	4	32
y_2	10	13	23
y_3	2	3	5
y_4	5	12	17
y_5	6	6	12
y_6	4	14	18
tot.	55	52	107

Da questa possiamo dedurre la tabella delle frequenze teoriche.

Per esempio il valore 8.26 si ottiene calcolando

$$\bar{n}_{2,4} = \frac{c_2 \cdot r_4}{n} = \frac{52 \cdot 17}{107} \approx 8.26$$

	x_1	x_2
y_1	16.45	15.55
y_2	11.82	11.18
y_3	2.57	2.43
y_4	8.74	8.26
y_5	6.17	5.83
y_6	9.25	8.75

Due delle dodici frequenze teoriche, 2.57 e 2.43, sono minori di 5; le altre dieci, ossia l'83%, sono maggiori di 5, e tutte sono maggiori di 1: la condizione di Cochran è soddisfatta. Ora calcoliamo

$$\chi^2 = \frac{(28-16.45)^2}{16.45} + \frac{(4-15.55)^2}{15.55} + \frac{(10-11.82)^2}{11.82} + \dots = 26.97$$

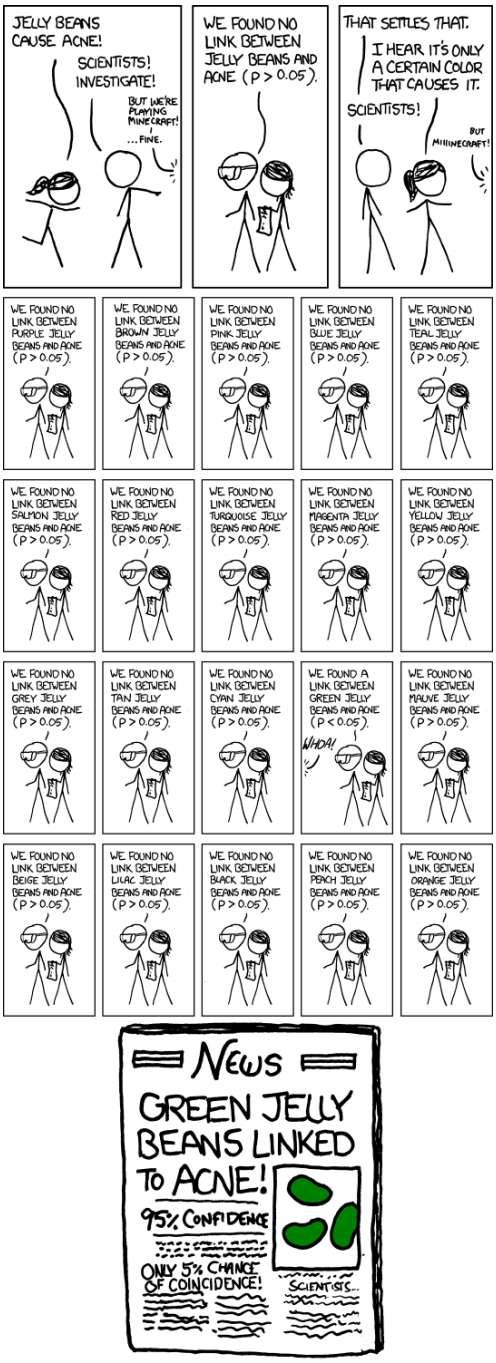
I gradi di libertà sono $(a-1)\cdot(b-1) = 1 \cdot 5 = 5$. Siccome $26.97 > \chi^2_{0.01,5} = 15.09$ possiamo rifiutare l'ipotesi nulla al livello di significatività 0.01, a favore dell'ipotesi alternativa, ossia dell'efficacia della streptomicina. □

§21.8 La correzione di Bonferroni

Questo fumetto illustra una insidia implicita nell'uso di test di significatività statistica: fissato un livello di significatività α, se l'ipotesi nulla è vera, c'è una probabilità α di ottenere un falso positivo (ossia di rifiutare l'ipotesi nulla benché sia vera). Se, per esempio, consideriamo il livello $\alpha = 0.05$, una volta su 20 (in media) rifiuteremo un'ipotesi nulla vera.

Di conseguenza, se uno studio richiede di eseguire m test, e una determinazione positiva seguirebbe dalla riuscita di uno qualunque di essi, allora per ogni singolo test è opportuno usare la soglia

$$p < \frac{\alpha}{m} \qquad \text{(correzione di Bonferroni)}$$



Randall Munroe, *Significant*, xkcd n. 882, CC BY-NC 2.5.

§21.9 Riepilogo

Se vogliamo saggiare	**usiamo**
la media di una variabile numerica	il test t di Student
la distribuzione di una variabile categorica	il test χ^2

Se vogliamo saggiare l'indipendenza (assenza di correlazione) di	**usiamo**
due variabili numeriche	la regressione lineare[†]
una variabile numerica e una binaria	il test t di Student[*]
(una variabile numerica e una categorica	ANOVA — non in programma)
due variabili categoriche	il test χ^2 di indipendenza

[†] se sospettiamo la presenza di una relazione di tipo lineare; ci sono tecniche analoghe per relazioni diverse.
[*] per campioni indipendenti o appaiati, secondo il caso.

§21.10 Esercizi

Esercizio 115 (soluzione a p. 325)
Supponi di avere due farmaci A e B contro la medesima malattia. L'efficacia del farmaco A è corroborata da uno studio clinico al livello di significatività 0.05 (p-value < 0.05), l'efficacia di B è corroborata da uno studio al livello di significatività 0.01 (p-value < 0.01). Per ciascuna delle seguenti affermazioni indica se sia giustificata oppure no, spiegando la ragione della tua scelta.

1. Il farmaco A è efficace almeno nel 95% dei casi di malattia, mentre il farmaco B almeno nel 99%.
2. C'è maggiore evidenza statistica a favore dell'efficacia del farmaco B rispetto al farmaco A.
3. Anche se supponiamo che entrambi i farmaci siano effettivamente efficaci, non è detto che il farmaco B produca un effetto più forte del farmaco A.
4. Anche se supponiamo che entrambi i farmaci siano effettivamente efficaci, non è detto che il farmaco B curi un maggior numero di casi del farmaco A.
5. Se il farmaco A non fosse efficace, una replica dello studio relativo avrebbe il 95% di probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla.
6. Se il farmaco A non fosse efficace, una replica dello studio relativo avrebbe il 95% di probabilità di non riprodurre il risultato positivo di quest'ultimo.
7. Se il farmaco A fosse efficace, una replica dello studio relativo avrebbe il 5% di probabilità di non rifiutare l'ipotesi nulla.
8. La probabilità che il farmaco A non sia efficace è minore del 5%.
9. Se un secondo test, indipendente, del farmaco A, producesse un risultato positivo con $p < 0.05$, comunque, in totale, l'evidenza statistica a favore del farmaco A sarebbe minore di quella a favore del farmaco B.

Esercizio 116 (soluzione a p. 327)
I valori assunti da una variabile statistica su un campione di sei individui sono

$$27.4 \quad 6.7 \quad 6.9 \quad 15.2 \quad 18.2 \quad 35.2$$

1. Calcola media, varianza (σ^2) e varianza campionaria (s^2) di questi valori.
2. Con che intervallo di confidenza al 95% possiamo stimare la media della popolazione?
3. Possiamo dire che la media della popolazione è diversa da 0 al livello di significatività $\alpha = 0.01$?

Esercizio 117 (soluzione a p. 328)
Saggia l'affermazione che le nascite sono distribuite uniformemente fra i mesi dell'anno (ossia che in ogni mese avvenga, in media, un dodicesimo delle nascite), usando i seguenti dati, raccolti nel corso di un anno.

gennaio	35	luglio	36
febbraio	31	agosto	38
marzo	35	settembre	37
aprile	32	ottobre	36
maggio	35	novembre	35
giugno	35	dicembre	35

Esercizio 118 (soluzione a p. 328)
La popolazione costituita da tutte le piante di una certa specie si divide in quattro categorie osservando due tratti genetici indipendenti. Indichiamo le quattro categorie con AB, aB, Ab, ab, dove le lettere maiuscole indicano il carattere dominante e le minuscole quello recessivo. Secondo la teoria di Mendel, gli individui nelle quattro categorie si suddividono nella proporzione

$$\mathrm{AB} : \mathrm{aB} : \mathrm{Ab} : \mathrm{ab} = 9 : 3 : 3 : 1$$

In un campione di 160 piante si trovano 100 individui del fenotipo AB, 23 aB, 25 Ab e 12 ab. Possiamo concludere, al livello di significatività $\alpha = 0.05$, che i due tratti in questione non si comportano come previsto dalla teoria?

Esercizio 119 (soluzione a p. 329)
Un campione composto da 75 uomini e 25 donne viene sottoposto ad un trattamento per l'emicrania. Dopo un mese, 32 partecipanti fra cui 26 uomini dichiarano di non aver tratto giovamento dal trattamento; altri 28 uomini dichiarano di aver tratto solo un minimo giovamento dal trattamento e 13 donne di averne tratto forte giovamento.

1. Costruisci la tabella di contingenza della distribuzione del risultato del trattamento fra uomini e donne.

2. Se si trattassero 100 uomini e 100 donne, quale proporzione totale se ne attenderebbe con forte giovamento?
3. Possiamo concludere, con un livello di significatività di 0.05, che il trattamento abbia un effetto diverso fra uomini e donne?

Esercizio 120 (soluzione a p. 330)
Si conduce uno studio per rilevare se la prevalenza di diabete negli anziani è associata alla loro autonomia (vivere autonomamente; assistenza domiciliare; casa di cura). Si campionano 1000 anziani di cui 200 sono diabetici. Fra i non diabetici, il 40% vive autonomamente ed il 30% si avvale di assistenza domiciliare. Fra i diabetici il 25% vive autonomamente e il 50% vive in casa di cura. Dalla tabella di contingenza ottenuta dal campione stimare:

1. la probabilità che un anziano sia affetto da diabete e la probabilità che un soggetto che vive in casa di cura sia affetto da diabete;
2. la probabilità che un soggetto viva in casa di cura e sia affetto da diabete.
3. Si può affermare che la distribuzione di probabilità della variabile autonomia sia diversa fra i diabetici e i non diabetici con un livello di significatività di 0.01?

Esercizio 121 (soluzione a p. 331)
Il farmaco **Neo Snake Oil Plus Forte** è stato somministrato a un campione randomizzato di 100 volontari in buona salute, mentre ad altri 100 è stato somministrato un placebo. Ad ogni individuo è stato chiesto di eseguire determinate prove psico-fisiche, e quindi indicare un eventuale miglioramento o peggioramento in una serie di parametri. Il numero di risposte ricevute è dato nella tabella seguente (+ indica un miglioramento, = nessuna variazione, − un peggioramento).

	farmaco			placebo		
parametro	+	=	−	+	=	−
Attenzione	26	52	22	20	61	19
Resistenza alla fatica	45	12	43	46	11	43
Qualità del sonno	23	55	22	18	60	22
Acuità visiva	7	86	7	5	85	10
Memoria a breve termine	18	57	25	15	63	22
Memoria a lungo termine	7	85	8	6	87	7
Velocità di reazione	9	88	3	5	87	8
Apprendimento	13	73	14	13	72	15
Umore	35	33	32	24	53	23
Riduzione dell'ansia	19	60	21	25	58	17
Gestione dello stress	26	56	18	21	63	16
Motivazione	45	6	49	44	10	46
Digestione regolare	12	81	7	6	91	3
Idratazione cutanea	22	56	22	24	50	26
Forza muscolare	45	9	46	29	19	52

	farmaco			placebo		
parametro	+	=	−	+	=	−
Recupero post-allenamento	9	76	15	9	78	13
Resistenza aerobica	37	36	27	36	35	29
Coordinazione motoria	24	51	25	21	48	31
Riduzione del dolore	16	66	18	23	57	20
Libido	44	5	51	41	4	55
Funzione sessuale	7	86	7	13	83	4
Udito	24	53	23	19	57	24
Problem-solving	41	13	46	47	14	39
Creatività	13	76	11	10	76	14
Ritmo circadiano	36	27	37	33	32	35
Socialità	49	16	35	41	15	44
Autostima	42	10	48	46	8	46
Concentrazione	37	18	45	39	23	38
Durata del sonno	47	13	40	43	11	46
Congestione nasale	40	9	51	49	7	44

1. Usa un test χ^2 per concludere che non c'è evidenza statistica, al livello di significatività $\alpha = 0.05$, che il farmaco abbia un effetto sull'attenzione.

2. Trova uno dei parametri, che chiameremo P, tale che un test χ^2 permetta di concludere che il farmaco ha un effetto su P statisticamente significativo al livello $\alpha = 0.05$.
3. Spiega dettagliatamente perché l'esperimento precedente, in realtà, non fornisce alcuna evidenza statistica a favore dell'ipotesi che il farmaco abbia influenza sul parametro P.

Parte III
Elementi di analisi matematica

§22 Introduzione

Questa parte del corso presenta i rudimenti dell'analisi matematica. Questa disciplina si fonda su un cambiamento di prospettiva rispetto alla matematica elementare della prima parte del corso: il nostro oggetto di studio è stato il concetto di quantità, concretizzato dai numeri e dalle grandezze fisiche; ora, invece, studieremo quantità continuamente variabili. Concretamente, una quantità variabile, per esempio nel tempo, sarà rappresentata da una funzione; quindi, mentre nella prima parte del corso abbiamo studiato operazioni fra numeri (operazioni aritmetiche, ma anche, per esempio, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche), in quest'ultima parte studieremo operazioni *fra funzioni*.

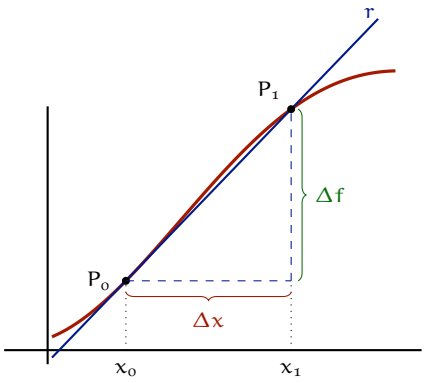
Senza dubbio, date due funzioni della stessa variabile, ha senso sommarle, moltiplicarle, elevarle l'una all'altra, &c. Queste operazioni non aggiungono nulla a quello che già sappiamo. C'è però una novità: data una funzione, diciamo del tempo, $f(t)$, possiamo derivare da questa una nuova funzione $f'(t)$ che rappresenta la velocità di variazione di f. Per esempio, se $f(t)$ rappresenta la concentrazione di un certo reagente in una reazione chimica al tempo t, possiamo considerare la velocità con cui quella concentrazione varia (qui diminuisce, perché il reagente si consuma), e anche questa sarà una quantità variabile col tempo, che chiameremo $f'(t)$: la derivata di f rispetto a t. L'operazione di derivazione non è meramente *numerica*: se so che la mia concentrazione ad un certo tempo t_0 è, poniamo, $12.5\,\mathrm{mmol/L}$, questo non mi dice nulla della sua velocità di variazione, diciamo, fra il tempo t_0 e un altro tempo arbitrario $t_0 + \Delta t$. La derivazione, che passa da una quantità variabile alla sua velocità di variazione, e l'integrazione, che compie il cammino inverso, saranno le due operazioni fondamentali studiate in questa parte di corso.

Come le quantità sono spesso legate fra loro in maniere complicate, per cui, per determinarne la misura, occorre risolvere *equazioni*; così avviene che le quantità variabili siano legate fra loro in maniere complicate: per esempio la velocità con cui un reagente si consuma ne determina il variare della concentrazione, però questa velocità stessa non è costante, e dipende da quant'è il reagente disponibile (più ce n'è, più velocemente, ci aspettiamo, si consuma), ossia proprio dalla sua concentrazione. Per sbrogliare questi grovigli, le semplici equazioni numeriche non bastano: servono equazioni in cui l'incognita non è un numero, bensì un'intera funzione, le equazioni differenziali. Le equazioni differenziali sono fondamentali in tutte le scienze esatte, anzi, le leggi della natura, per come le capiamo al momento, *sono* equazioni differenziali. In questa parte del corso, introdurremo le equazioni più semplici, che incontrerai, per esempio, nello studio della fisica, della termodinamica, della cinetica chimica, della farmacocinetica.

§23 La derivata

Data una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si chiama rapporto incrementale di f fra x_0 e x_1 il numero

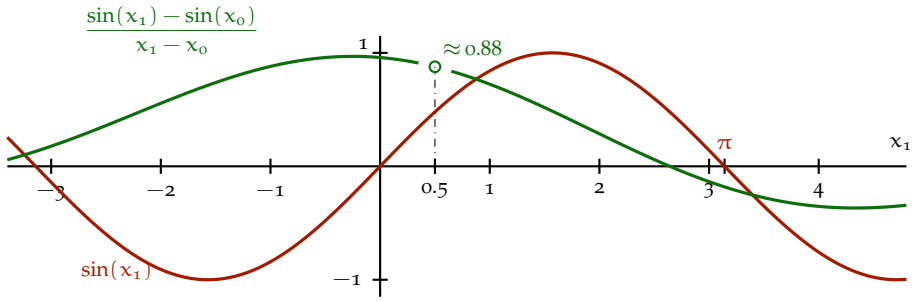
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\overbrace{f(x_1) - f(x_0)}^{\Delta f}}{\underbrace{x_1 - x_0}_{\Delta x}}$$



Questo numero è il coefficiente angolare o pendenza della retta passante per i punti $P_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ e $P_1\big(x_1, f(x_1)\big)$.

Esempio
Tracciamo il grafico del rapporto incrementale della funzione $f(x) = \sin(x)$, per $x_0 = 0.5$ fissato, al variare di x_1:

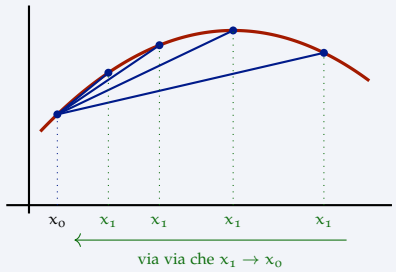
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin(x_1) - \sin(0.5)}{x_1 - 0.5}$$



Il rapporto incrementale nell'esempio non è definito in $x_1 = x_0 = 0.5$, perché il denominatore si annulla. Però, osserviamo che, per x_1 che si avvicina a x_0, il rapporto incrementale si avvicina a ≈ 0.88: è come se alla curva del rapporto incrementale mancasse il singolo punto $(0.5, \approx 0.88)$. Questo ci dice che la pendenza della curva $\sin(x)$ misurata vicino all'ascissa $x_0 = 0.5$, a patto di andare *abbastanza* vicino, è ≈ 0.88. Chiameremo questo numero la derivata di $\sin(x)$ in 0.5.

In generale, via via che x_1 si avvicina a x_0, il rapporto incrementale $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ rappresenta la pendenza di rette che approssimano il grafico di f sempre meglio nelle più immediate vicinanze di x_0.

Definizione



La derivata di $f(x)$ in x_0, indicata col simbolo $f'(x_0)$, è il valore al quale converge il rapporto incrementale di f fra x_0 e x_1, via via che x_1 si avvicina a x_0. In simboli (fuori programma):

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

La derivata di f (che indichiamo con f') può essere calcolata in ogni x_0, è quindi una nuova funzione che associa a ogni x_0 il valore $f'(x_0)$. Geometricamente, questa funzione rappresenta la pendenza del grafico di $f(x)$ nel punto x_0.

Operativamente, possiamo dedurre l'espressione di f' direttamente dalla espressione di f. Le regole sono qui sotto.

§23.1 Derivate delle funzioni elementari

$$(\text{costante})' = 0 \qquad \left(e^x\right)' = e^x \qquad \left(\log_e(x)\right)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(x^k\right)' = k\,x^{k-1} \qquad \left(a^x\right)' = a^x \log_e(a) \qquad \left(\log_b(x)\right)' = \frac{1}{x \cdot \log_e(b)}$$

$$\left(\sin(x)\right)' = \cos(x) \qquad \left(\tan(x)\right)' = \frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2} \qquad \left(\arctan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(\cos(x)\right)' = -\sin(x) \qquad = 1 + \left(\tan(x)\right)^2$$

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left(\arccos(x)\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

§23.2 Regole di derivazione

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \qquad \left(f(g(x))\right)' = f'\left(g(x)\right)\,g'(x)$$

$$(f-g)' = f' - g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot f'(x)$$

Nota
Le regole scritte in verde si possono dedurre a partire dalle altre regole: provaci per esercizio.

Nota importante
Queste regole illustrano l'importanza del numero e. Infatti $\left(10^x\right)' = 10^x \log_e(10)$: non è possibile calcolare le derivate di esponenziali e logaritmi in una base qualunque senza fare uso del logaritmo in base e.

Esercizio
Sia $h(x) = \underbrace{\sin(x^2)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)}$. Calcola $h'(x)$.

Soluzione. Applichiamo $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$:

$$h'(x) = \Big(\sin(x^2)\Big)' \cdot \cos(x) + \sin(x^2) \cdot \underbrace{\Big(\cos(x)\Big)'}_{-\sin(x)}$$

Per il primo fattore applichiamo $\big(f(g(x))\big)'$ con $f(y) = \sin(y)$ e $g(x) = x^2$. Siccome $f'(y) = (\sin(y))' = \cos(y)$ otteniamo

$$\Big(\sin(x^2)\Big)' = \cos(x^2) \cdot \underbrace{\left(x^2\right)'}_{2x} = 2x\cos(x^2)$$

Nel primo passaggio si usa $\left(x^k\right)' = k\,x^{k-1}$. In conclusione

$$h'(x) = 2x\cos(x^2)\cos(x) - \sin(x^2)\sin(x)$$

□

Esempio ($f(x) = (x+1)^2$, in due modi)
Primo modo. Scriviamo $f(x) = g\big(h(x)\big)$, con $h(x) = x+1$ e $g(y) = y^2$. Allora $g'(y) = 2y$ e $h'(x) = 1$, quindi

$$f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x) = 2(x+1) = 2x+2$$

Secondo modo. $f(x) = x^2 + 2x + 1$, quindi

$$f'(x) = \underbrace{\left(x^2\right)'}_{2x} + \underbrace{\left(2x\right)'}_{2} + \underbrace{\left(1\right)'}_{0} = 2x+2$$

Esercizio
Calcola la derivata di $f(x) = \sin\big(\sin(\sin(x))\big)$.

Soluzione. Calcoliamo prima la derivata di $g(x) = \sin\big(\sin(x)\big)$:

$$g'(x) = \sin'\big(\sin(x)\big) \cdot \sin'(x) = \cos\big(\sin(x)\big) \cdot \cos(x)$$

Ora $f(x) = h\big(g(x)\big)$ con $h(x) = \sin(x)$, quindi

$$f'(x) = h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = \cos\big(\sin(\sin(x))\big) \cdot \cos\big(\sin(x)\big) \cdot \cos(x)$$

□

Esempio ($f(x) = \tan(x)$)
Questa derivata è tabulata nello specchietto delle derivate di funzioni elementari. Calcoliamola, però, a partire dalla definizione $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$:

$$\big(\tan(x)\big)' = \frac{\big(\sin(x)\big)'\cos(x) - \sin(x)\big(\cos(x)\big)'}{\big(\cos(x)\big)^2} = \frac{\big(\cos(x)\big)^2 + \big(\sin(x)\big)^2}{\big(\cos(x)\big)^2}$$

Da qui si può concludere in due modi. Usando $\sin^2 + \cos^2 = 1$:

$$\big(\tan(x)\big)' = \frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$$

oppure, spezzando la frazione,

$$\frac{\big(\cos(x)\big)^2}{\big(\cos(x)\big)^2} + \frac{\big(\sin(x)\big)^2}{\big(\cos(x)\big)^2} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + \big(\tan(x)\big)^2$$

Esercizio
Calcola la derivata di $f(x) = x^{x^2}$.

Soluzione. Siccome non abbiamo una regola per gli elevamenti a potenza di funzioni, adoperiamo i logaritmi per portare la funzione a una forma più maneggevole:

$$f(x) = x^{x^2} = \Big(e^{\log_e(x)}\Big)^{x^2} = e^{x^2 \log_e(x)} = g\big(h(x)\big) \qquad g(y) = e^y, \quad h(x) = x^2 \log_e(x)$$

Ora

$$h'(x) = \big(x^2\big)' \log_e(x) + x^2\big(\log_e(x)\big)' = 2x \log_e(x) + x \qquad g'(y) = e^y$$

e quindi

$$f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x) = e^{x^2 \log_e(x)} \cdot \big(2x \log_e(x) + x\big) = \big(2 \log_e(x) + 1\big) \cdot x^{1+x^2}$$

□

Nota importante
$x^{x^2} = x^{(x^2)}$ non è $(x^x)^2$. Per esempio $3^{3^2} = 3^9$, mentre $(3^3)^2 = 3^6$.

Nota
Nei testi si può trovare la formula per la derivata del logaritmo nella forma

$$\big(\log_b(x)\big)' = \frac{\log_b(e)}{x}$$

Questa formula, in realtà, è equivalente alla nostra, perché vale l'identità

$$\log_\square(\triangle) = \frac{1}{\log_\triangle(\square)}$$

Per renderci conto, a sua volta, di questa, applichiamo la formula di cambiamento di base per scrivere $\log_\square(\triangle)$ usando la base $\triangle$:

$$\log_\square(\triangle) = \frac{\overbrace{\log_\triangle(\triangle)}^{=1}}{\log_\triangle(\square)} = \frac{1}{\log_\triangle(\square)}$$

§23.3 Notazioni per le derivate

La derivata della derivata si chiama derivata seconda, e si indica con $f''(x)$. Continuando a calcolare derivate successive si ottiene la derivata terza $f'''(x)$ e, più in generale, la derivata n-esima $f^{(n)}(x)$.

Nelle formule $y = f(x)$, $z = f'(x)$, eccetera, la x si chiama variabile indipendente. Quando è chiaro quale sia la variabile indipendente si può omettere di indicarla: per esempio, anziché scrivere

$$y = f(x) = 3x^2 \qquad z = f'(x) = 6x$$

possiamo abbreviare in

$$y = 3x^2 \qquad z = y' = 6x$$

Nota importante
Non sempre la variabile indipendente è x. Per esempio, nella cinematica x è tendenzialmente una variabile dipendente, mentre la variabile indipendente è il tempo t: potresti quindi incontrare

$$x = \sin(2t) \qquad x' = 2\cos(2t)$$

Un modo di scrivere le derivate comodo, specialmente quando sono in gioco diverse variabili, è

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Questa notazione, che richiama il rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ (e non va confusa con esso!), ha il vantaggio di indicare la variabile indipendente al denominatore.

Inoltre, se, come capita nelle applicazioni, $f(x)$ e x sono grandezze fisiche, la notazione $f' = \frac{df}{dx}$ aiuta a ricordare le dimensioni della derivata. Immaginiamo per esempio che x sia una lunghezza misurata in metri, $[x] = m$, e che $f(x)$ sia un potenziale elettrico in volt, $[f(x)] = V$: allora

$$[f'] = \frac{[df]}{[dx]} = \frac{V}{m} = V \cdot m^{-1}$$

ossia un'intensità di campo elettrico. Altri esempi tipici: se $[x] = m$ e $[t] = s$, allora $[x'] = m/s$ e $[x''] = m/s^2$.

Notazione
In questo sistema di notazione la derivata seconda si indica con

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Troverai anche la scrittura $\frac{\partial f}{\partial x}$ — con ∂ al posto di d. Questa scrittura si usa quando f dipende da diverse variabili, fra cui x, che sono (o possono essere) a loro volta legate fra loro. La scrittura $\frac{\partial f}{\partial x}$ fa esplicitamente riferimento alla derivata dell'espressione di f rispetto a x considerando ogni altra variabile come se fosse una costante, vale a dire trascurando ogni possibile dipendenza delle altre variabili da x. In termodinamica — per soprammercato — si indica anche, a pedice, la variabile che si tiene costante: $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ si legge "derivata di V rispetto a T a P costante".

§23.4 Esercizi

Test 122 (soluzione a p. 333)
Calcola la derivata di $f(x) = x(x-1)(x+1)$.

Test 123 (soluzione a p. 333)
Calcola la derivata di $f(x) = x^4 - \sin(x) + 10^x$.

Test 124 (soluzione a p. 333)
Calcola la derivata di $f(x) = \sin(2x)\cos(3x)$.

Test 125 (soluzione a p. 334)
Calcola la derivata di $f(x) = e^x \cos(x)$.

Test 126 (soluzione a p. 334)
Calcola la derivata di $f(x) = e^{x\cos(x)}$.

Test 127 (soluzione a p. 334)
Calcola la derivata di $f(x) = x^x$.

Test 128 (soluzione a p. 334)
Calcola la derivata di $f(x) = \tan(x) + \log_e(x)$.

Test 129 (soluzione a p. 335)
Calcola la derivata di $f(x) = \sin(x^2) + \log_{10}(x)$.

Test 130 (soluzione a p. 335)
Calcola la derivata di $f(x) = \log_x(2)$.

Test 131 (soluzione a p. 336)
Calcola la derivata di $f(x) = \log_e(x^4)$.

Esercizio 132 (soluzione a p. 336)
Trova un polinomio di terzo grado $f(x)$ tale che $x^2 + x \cdot f'(x) = 3 \cdot f(x)$ e $f(1) = 0$.

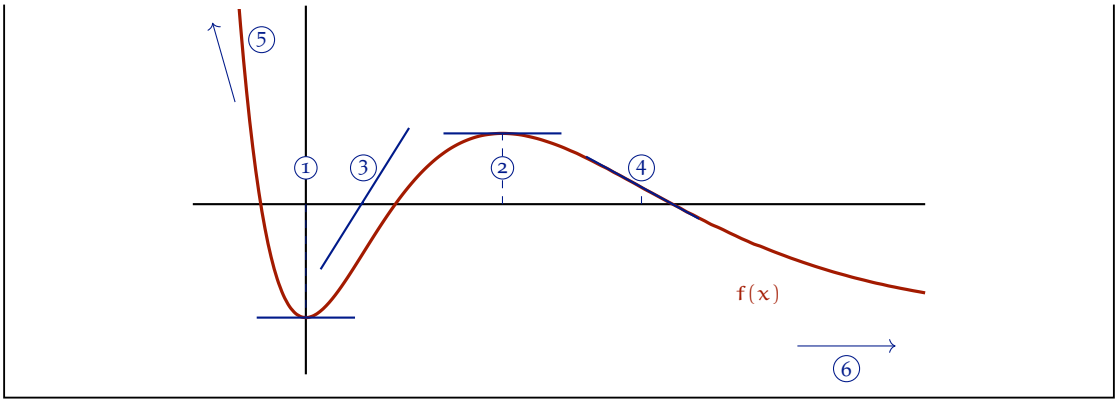
§24 Grafici e derivate

Siccome sappiamo che $f'(x_0)$ è la pendenza del grafico di $f(x)$ nel punto x_0 (in un diagramma in cui ascisse e ordinate abbiano la stessa scala), possiamo farci un'idea qualitativa (ossia priva di accuratezza numerica) del grafico di f' semplicemente osservando il grafico di f. Conviene tenere a mente questi principi.

Fatto

- Dove il grafico di f è orizzontale, $f' = 0$.
- Dove il grafico di f è crescente, $f' > 0$.
- Dove il grafico di f è decrescente, $f' < 0$.
- Maggiore è l'inclinazione del grafico di f rispetto all'orizzontale, maggiore è $|f'|$.

Esercizio
Traccia un grafico qualitativo della derivata della funzione $f(x)$ il cui grafico è dato in figura.



Soluzione. Ragioniamo così:

A. Nei punti ① e ② f è orizzontale, quindi $f' = 0$.

B. f decresce a sinistra di ①, cresce fra ① e ②, e decresce a destra di ②. Quindi $f' > 0$ fra ① e ②, e $f' < 0$ altrimenti.

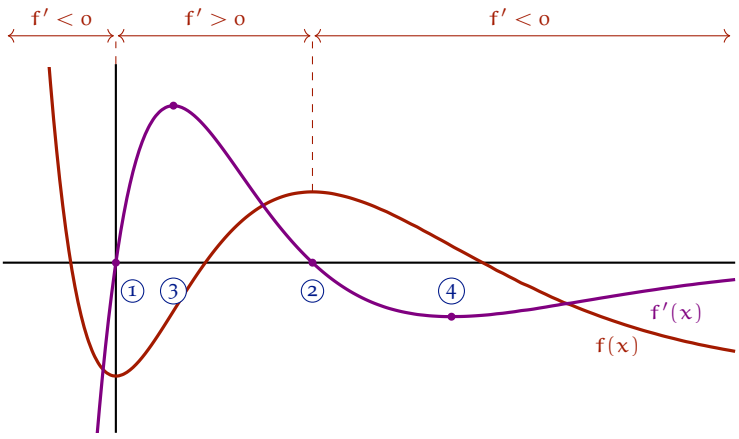
C. I punti ③ e ④ sono punti di massima pendenza per f, detti anche punti di flesso, quindi

- f' cresce a sinistra di ③;
- f' decresce fra ③ e ④;
- f' cresce a destra di ④.

D. In ⑤ f' pare assumere valori arbitrariamente negativi.

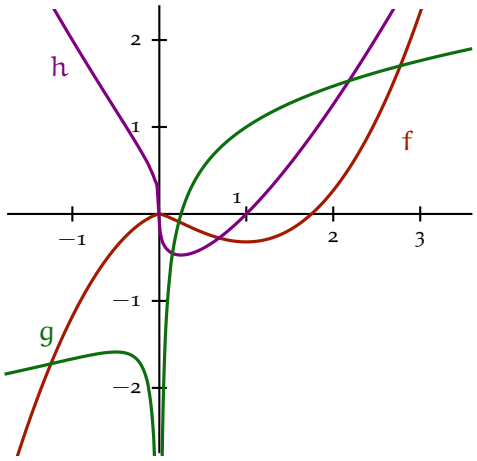
E. In ⑥ il grafico di f sembra essere sempre più orizzontale, quindi f' si avvicina allo zero.

Sfruttando queste considerazioni possiamo ottenere il grafico seguente.



□

Esercizio
Il grafico seguente rappresenta tre funzioni, di cui una è la primitiva, una la derivata, e una la derivata seconda (la derivata della derivata). Chi è chi?



Soluzione. Consideriamo le tre ipotesi possibili.

1. f **è la primitiva.** Siccome intorno a $x = 1$ il grafico di f è orizzontale, in quei paraggi deve esserci un punto di annullamento della derivata di f. Di certo, però, $g \neq 0$ (infatti, dal grafico, $g(1) \approx 1$). In questo caso l'unica possibilità è quindi $f' = h$ e, per esclusione, $h' = g$.

2. g **è la primitiva.** Vediamo bene che g è crescente nel semiasse positivo, quindi la sua derivata dovrebbe essere positiva per $x > 0$. Però, fra 0 e 1, sia f che h sono negative: non c'è un candidato valido per la derivata, e dobbiamo quindi escludere questa ipotesi.

3. h **è la primitiva.** In questo caso f e g dovrebbero essere una la derivata dell'altra (o f di g, oppure g di f). Però, intorno a $x = -1$, f e g sono entrambe crescenti ed entrambe negative, e questo non può essere: quella delle due che è la derivata, essendo derivata di una funzione crescente, dovrebbe essere positiva. Dobbiamo quindi escludere anche questa ipotesi.

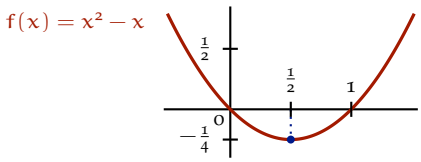
In conclusione deve essere vera l'unica ipotesi che non abbiamo escluso: f è la primitiva, h la derivata e g la derivata seconda. □

Nota (metodologica)
Quando ci viene richiesto di identificare il caso vero fra una lista di casi possibili, non dobbiamo ragionare per conferma, ossia mostrare perché il caso vero è plausibile. Dobbiamo invece ragionare per esclusione, ossia portare argomenti incontrovertibili che escludono ciascuno degli altri casi.

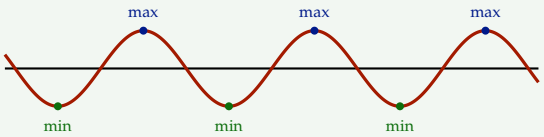
§24.1 Massimi e minimi di funzioni

Definizione
Data una funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ definita in un certo dominio D, diciamo che f ha un punto di massimo in $x_{max} \in D$ se, per ogni $x \in D$, vale $f(x) \leqslant f(x_{max})$ — in altre parole se $f(x_{max})$ è il massimo valore possibile di $f(x)$ al variare di $x \in D$. Diciamo che f ha un punto di minimo in $x_{min} \in D$ se, per ogni $x \in D$, vale $f(x) \geqslant f(x_{min})$, ossia se $f(x_{min})$ è il minimo valore possibile di $f(x)$ al variare di $x \in D$.

Per esempio, se $f(x) = x^2 - x$ e $D = \mathbb{R}$, il vertice $x_{min} = \frac{1}{2}$ della parabola $y = x^2 - x$ è un punto di minimo di $f(x)$.



Osservazione
L'esempio della funzione seno evidenzia che i punti di massimo e di minimo non sono sempre unici.



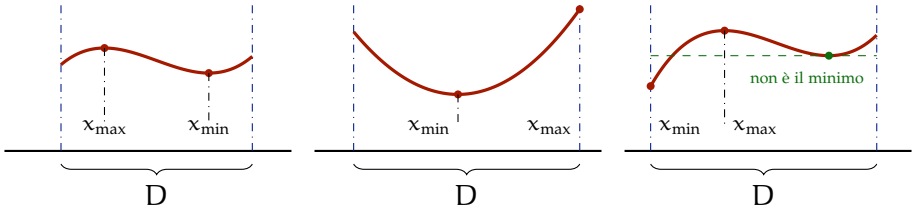
In generale massimi e minimi possono anche non esistere: basta pensare alla funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x$, il cui grafico  sale e scende senza fermarsi mai. Se però il dominio è un intervallo chiuso le cose vanno meglio.

Fatto
Se il dominio D è un intervallo chiuso $[a, b]$ (ossia l'insieme degli x con $a \leqslant x \leqslant b$) e la funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ è continua — ossia è definita in tutti i punti dell'intervallo e il suo grafico può essere tracciato con un unico tratto continuo di penna — allora f ha almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo in D.

Se abbiamo la derivata f' di f, allora possiamo cercare massimi e minimi di f sfruttando il fatto seguente.

Fatto
I punti di massimo o di minimo di f si possono trovare solo

- dove il grafico di f è orizzontale (ossia $f' = 0$),
- oppure agli estremi del dominio.



§24.2 Massimi e minimi in un intervallo chiuso

Data una funzione derivabile $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, per trovarne massimi e minimi procediamo così.

Regola

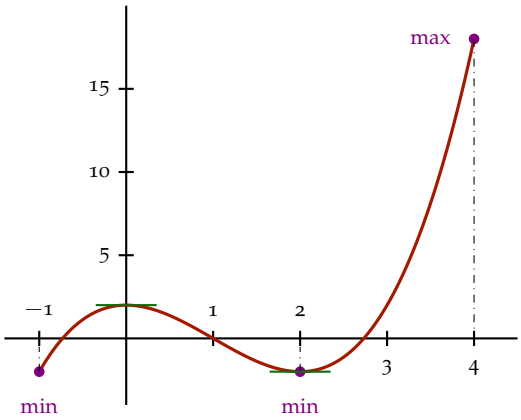
1. Calcoliamo i punti stazionari (ossia risolviamo $f'(x) = 0$) che cadono nell'intervallo $[a,b]$, ottenendo, diciamo, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ (le soluzioni fuori dall'intervallo si scartano).
2. Calcoliamo $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\ldots$, $f(x_n)$, $f(b)$.
3. Quelli fra i punti a, x_1, x_2, $\ldots$, x_n, b in cui f assume il valore più grande sono i punti di massimo; quelli in cui assume il più piccolo sono i punti di minimo.

Esercizio
Trova massimi e minimi di $f\colon [-1,4] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, e traccia un grafico di f.

Soluzione.

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, quindi i punti stazionari sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.
2. $f(-1) = -2$, $\quad f(0) = 2$, $\quad f(2) = -2$, $\quad f(4) = 18$.
3. Il più grande di questi numeri, 18, è assunto da $f(x)$ in $x = 4$; il più piccolo, -2, in $x = -1$ e in $x = 2$.

Quindi $f(x)$ ha un punto di massimo in $x = 4$ e due punti di minimo in $x = -1$ e $x = 2$; il massimo valore assunto da $f(x)$ è 18, il minimo valore assunto è -2.

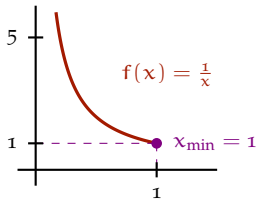


□

§24.3 Massimi e minimi in generale

Se il dominio della funzione da massimizzare o minimizzare non è un intervallo chiuso — per esempio se è $]a, b[$, ossia l'insieme degli x strettamente compresi fra a e b (cioè $a < x < b$), oppure $]a, b]$, ossia gli x con $a < x \leqslant b$, oppure ancora una semiretta come $[a, +\infty[$, che denota tutti gli $x \geqslant a$ — allora non necessariamente massimi e minimi esistono.

Per esempio la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x$ non ha né un massimo né un minimo. La funzione $f\colon]0, 1] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{1}{x}$ ha un minimo in $x_{\min} = 1$, ma non ha un massimo, perché assume valori arbitrariamente grandi all'avvicinarsi di x a 0.



Approfondimento (fuori programma)
Ci sono, poi, anche i cavilli burocratici come la funzione $f\colon [0, 1[\to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$. Questa non ha massimo perché avrebbe tutte le carte in regola per assumere il valore massimo $f(x) = 1$ in $x = 1$, salvo che il punto $x = 1$ non appartiene al dominio $[0, 1[$. Di questi casi ci preoccupiamo il giusto.

Quando il dominio non è un intervallo chiuso possiamo ancora avvalerci degli zeri della derivata per trovare massimi e minimi, però la procedura si complica leggermente.

Regola

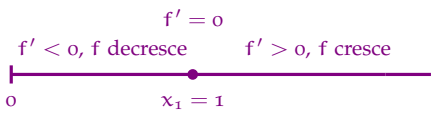
1. Troviamo i punti stazionari (ossia risolviamo $f'(x) = 0$).
2. Valutiamo f nei punti stazionari e negli estremi del dominio (dove siano inclusi).
3. Quelli fra i punti precedenti in cui $f(x)$ assume il massimo valore y_{max} sono candidati massimi; quelli dove assume il minimo valore y_{min} sono candidati minimi.
4. Per decidere se i candidati massimi siano effettivamente massimi occorre capire se $f(x)$ assume valori più grandi di y_{max} all'avvicinarsi di x agli estremi del dominio. Simmetricamente, per decidere se i candidati minimi siano minimi occorre controllare che $f(x)$ non scenda sotto y_{min} agli estremi del dominio.

I primi due punti sono come nel caso dell'intervallo chiuso. Il punto 4 può essere più o meno complicato, e c'è più di un modo per affrontarlo: per esempio sfruttando il grafico di f, o studiando il segno della derivata, oppure ancora calcolando i limiti agli estremi.

Esercizio
Trova massimi e minimi di $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ con $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

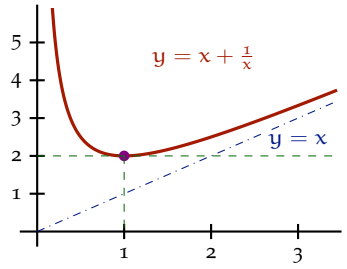
Soluzione.

1. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, che si annulla per $x_1 = 1$ (l'altra soluzione $x_2 = -1$ non appartiene a $]0, +\infty[$).
2. $f(x_1) = 2$ (non c'è altro da calcolare, perché $]0, +\infty[$ non ha estremi inclusi).
3. x_1 è l'unico punto che abbiamo, quindi è sia un candidato massimo sia un candidato minimo.
4. Usando il segno della derivata possiamo notare che $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ è negativa a sinistra di $x_1 = 1$, nulla in x_1, e positiva a destra.



   Quindi f decresce a sinistra di 1, tocca il minimo in 1, e cresce dopo 1.

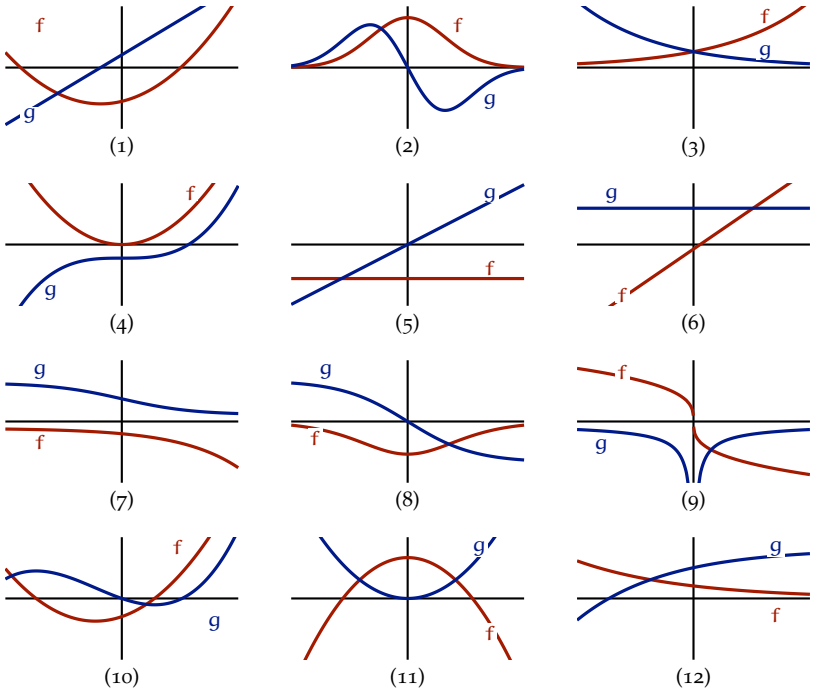
Altro modo: studiando il grafico vediamo che sia per x che si avvicina a 0, sia per x grande, il grafico di f resta sopra il valore $f(1) = 2$, quindi f ha un minimo in $x_{min} = 1$, e un massimo non c'è.



□

§24.4 Esercizi

Esercizio 133 (soluzione a p. 337)
Per ciascuna di queste coppie di grafici decidi se f potrebbe essere la derivata di g, o g quella di f, oppure non si dà nessuno di questi due casi.



Esercizio 134 (soluzione a p. 338)
Traccia il grafico cartesiano della funzione $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ per $0 \leqslant x \leqslant 3$. Determina quindi il massimo ed il minimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo.

Esercizio 135 (soluzione a p. 339)
Traccia il grafico di $f(x) = (1+x)^2(1-x)^5$ e della sua derivata $f'(x)$, per x fra -1 e 1; quindi calcola esattamente in quali punti il grafico di $f(x)$ è orizzontale.

Esercizio 136 (soluzione a p. 340)
Traccia il grafico di

$$f(x) = 0.60 + 0.41\,x - \sqrt{x}$$

per $1 \leqslant x \leqslant 2$ su un diagramma cartesiano. Determina il massimo e il minimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo, scrivendo i risultati correttamente arrotondati a quattro cifre significative.

Esercizio 137 (soluzione a p. 341)
Traccia il grafico di $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ e della sua derivata $f'(x)$, per x fra -5 e 5; quindi calcola esattamente in quali punti il grafico di $f(x)$ è orizzontale, e in quali raggiunge la massima e la minima pendenza.

Esercizio 138 (soluzione a p. 342)
Traccia il grafico di

$$f(x) = x - 5\sin(x)$$

per $0 \leqslant x \leqslant 10$ su un diagramma cartesiano. Trova i punti stazionari di $f(x)$ in questo intervallo, e determina il massimo e il minimo dei valori assunti da $f(x)$ nel medesimo intervallo. Indica i tuoi risultati con quattro cifre significative di precisione.

Esercizio 139 (soluzione a p. 344)
Traccia il grafico cartesiano della funzione $f(x) = e^{-x}\cos(x)$ per $0 \leqslant x \leqslant 10$. Determina quindi il massimo e il minimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo.

Esercizio 140 (soluzione a p. 346)
Traccia il grafico di

$$f(x) = 5.64^x - 15.28^x$$

per $-3 \leqslant x \leqslant 0$ in un diagramma cartesiano. Determina il massimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo, scrivendo il risultato, correttamente arrotondato, con cinque cifre significative di precisione.

Esercizio 141 (soluzione a p. 348)
Si vuole costruire un fusto cilindrico in lamiera di acciaio, chiuso da ogni lato, più capiente possibile. La lamiera è spessa 0.90 mm e il peso del fusto vuoto deve essere di 14 kg. Sapendo che il peso specifico dell'acciaio è 7.85 kg/L, calcola la capienza del fusto.

Esercizio 142 (soluzione a p. 349)
Dati i punti $A = (-2, -1)$ e $B = (0, -1)$, trova il punto $C = (x, y)$ sulla retta $x + y = 1$ tale che il perimetro del triangolo ABC sia più piccolo possibile.

§25 Equazioni differenziali

La derivata ha una definizione tecnica — *il limite del rapporto incrementale* — di questa, in questo corso, ci curiamo il giusto. Quello che ci importa è il significato fisico e tecnologico di questo concetto. Siamo partiti da una *interpretazione* del concetto di derivata — la pendenza dei grafici — che permette di usare le derivate per un certo numero di scopi pratici: per esempio capire quale sia il massimo o il minimo valore ottenibile da una certa formula. Non varrebbe la pena di studiare le derivate se la storia finisse qua. L'interpretazione più rilevante è questa:

Nota importante
Data una quantità $f(t)$ dipendente da t, la derivata $f' = \frac{df}{dt}$ è la velocità di variazione di f al variare di t.

Immaginiamo, per esempio, di riempire un serbatoio d'acqua: diciamo che inizialmente contiene 10 litri, e immettiamo acqua tramite un condotto che porta 5 litri al minuto. Il grafico del contenuto del serbatoio sarà la retta

$$\text{contenuto}(t) \;=\; 10\,\text{L} + t \cdot 5\,\text{L/min}$$

La pendenza di questa retta $\frac{d\,\text{contenuto}}{dt} = 5\,\text{L/min}$ è la velocità con cui si immette acqua nel serbatoio. Questo esempio elementare fa capire perché le derivate, che sono pendenze, sono anche velocità di variazione; la potenza dell'analisi, però, è nella possibilità di trattare matematicamente velocità di variazione che non sono costanti. Per esempio, la velocità a cui avviene una reazione chimica dipende dalla concentrazione dei reagenti, e questa, a sua volta, non è costante, ma varia durante la reazione, istante per istante, in funzione della velocità di reazione stessa. Questo gatto che si morde la coda è una specie di equazione che coinvolge quantità variabili — le concentrazioni — e le loro derivate: un'equazione differenziale. Le equazioni differenziali sono il linguaggio della scienza.

Definizione
Un'equazione differenziale è un'equazione funzionale che coinvolge una funzione incognita $f(x)$ e le sue derivate. Un'equazione che coinvolge derivate fino all'n-esima si dice dell'n-esimo ordine.

Grazie. E cos'è un'equazione funzionale, mi stai chiedendo?

Definizione
Un'equazione funzionale è un'equazione la cui incognita non è un singolo numero, bensì un'intera funzione.

L'esercizio 132 (p. 180), che ti invito a risolvere prima di proseguire nella lettura, è un esempio di equazione differenziale.

$$x^2 + x \cdot f'(x) = 3 \cdot f(x)$$

Questa è un'equazione del primo ordine, perché la funzione incognita f vi si trova derivata al massimo una volta. Chi conosce l'esercizio sa che tutti i polinomi $f(x) = ax^3 + x^2$ risolvono questa equazione. Per verificarlo basta sostituire $f(x)$ nei due membri e constatare che si ottiene un'identità:

$$\begin{aligned} x^2 + x \cdot \left(ax^3 + x^2\right)' &\stackrel{?}{=} 3 \cdot \left(ax^3 + x^2\right) \\ x^2 + x \cdot \left(3ax^2 + 2x\right) &\stackrel{?}{=} 3ax^3 + 3x^2 \\ \cancel{x^2} + \cancel{3ax^3} + \cancel{2x^2} &\stackrel{?}{=} \cancel{3ax^3} + \cancel{3x^2} \quad \text{OK} \end{aligned}$$

Inoltre si potrebbe dimostrare che non ci sono altre soluzioni. L'espressione $f(x) = ax^3 + x^2$, che rappresenta una famiglia di funzioni parametrizzata dal parametro a, è quindi detta soluzione generale dell'equazione.

La soluzione generale di un'equazione differenziale è sempre una famiglia di funzioni. Dando valori specifici ai parametri si ottengono le diverse soluzioni particolari: ossia i membri della famiglia. Per esempio, l'esercizio chiedeva di trovare la soluzione particolare tale che $f(1) = 0$.

Fatto
La soluzione generale di un'equazione differenziale è sempre una famiglia di funzioni parametrizzata da tante costanti quanto è l'ordine dell'equazione.

Esercizio (l'equazione logistica)
Considera la funzione

$$f(x) = \frac{L}{1 + e^{-k(x - x_0)}}$$

dove L, k e x_0 sono parametri fissati. Verifica che f risolve l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{k}{L} f(x) \left(L - f(x)\right)$$

Soluzione. Al membro di sinistra abbiamo

$$\frac{d}{dx} f(x) = \left(\frac{L}{1 + e^{-k(x - x_0)}}\right)' = \frac{-L \cdot \left(1 + e^{-k(x - x_0)}\right)'}{\left(1 + e^{-k(x - x_0)}\right)^2} = \frac{L \cdot k \cdot e^{-k(x - x_0)}}{\left(1 + e^{-k(x - x_0)}\right)^2}$$

Al membro di destra

$$\frac{k}{L} f(x)\left(L - f(x)\right) = \frac{k}{\cancel{L}} \frac{\cancel{L}}{1 + e^{-k(x-x_0)}} \left(L - \frac{L}{1 + e^{-k(x-x_0)}}\right) = \frac{L \cdot k \cdot e^{-k(x-x_0)}}{\left(1 + e^{-k(x-x_0)}\right)^2}$$

I due membri coincidono, per cui f è una soluzione. (L e k compaiono nell'equazione, mentre x_0 no: x_0 è il parametro della soluzione generale.) □

§26 Integrali indefiniti

Supponiamo di voler risolvere l'equazione differenziale $f'(x) = x^4$. Potremmo notare che $(x^5)' = 5x^4$, quindi $\left(\frac{1}{5}x^5\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 = x^4$ e, di conseguenza, $f(x) = \frac{1}{5}x^5$ è una soluzione particolare della nostra equazione. Ricordando che la derivata di una costante è nulla, vediamo che qualunque funzione del tipo

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + C$$

è una soluzione: questa è infatti la soluzione generale di $f'(x) = x^4$.

In generale l'equazione $f'(x) = g(x)$, con $g(x)$ una funzione fissata (ne abbiamo appena visto un esempio con $g(x) = x^4$), è così importante che c'è un simbolo apposta per indicare la sua soluzione generale.

Notazione
Il simbolo

$$\int g(x)\,dx \qquad \text{letto: "integrale di } g(x) \text{ in } dx\text{"}$$

denota la soluzione generale dell'equazione differenziale $f'(x) = g(x)$.
Per esempio, $\int x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5 + C$.

Detto altrimenti: $\int g(x)\,dx$ è la famiglia di quelle funzioni $f(x)$ tali che $f'(x) = g(x)$. Queste funzioni, che sono le soluzioni particolari di $f' = g$, si chiamano anche primitive di g.

Data una primitiva $f(x)$ di $g(x)$, tutte le funzioni del tipo $f(x) + C$ sono, a loro volta, primitive di $g(x)$, e si può dimostrare che non ce ne sono altre. Quindi

$$\int g(x)\,dx = f(x) + C \qquad \text{con } f(x) \text{ una qualunque primitiva di } g(x)$$

§26.1 Integrali delle funzioni elementari

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad \text{per } \alpha \neq -1 \qquad \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log_e(x) + C \quad \text{caso } \alpha = -1 \qquad \int 1 \, dx = \int x^0 \, dx = x + C$$

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C \qquad \int \log_e(x) \, dx = x \log_e(x) - x + C$$

Nota importante
Queste sono formule da sapere. Si ricavano quasi tutte leggendo al contrario le formule per le derivate delle funzioni elementari: per controllarne una basta derivare il membro di destra e verificare che si ottiene la funzione sotto il segno di integrale.

§26.2 Regole di integrazione

$$\int k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int f(x) \, dx \qquad \int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

Esempio (della prima regola)

$$\int 2x^2 \, dx = 2 \cdot \int x^2 \, dx = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right) = \frac{2}{3} x^3 + 2C$$

Siccome la costante di integrazione C rappresenta "un numero qualunque", anche il 2C che abbiamo ottenuto è semplicemente un numero qualunque. Quindi siamo giustificati a scrivere

$$\int 2x^2 \, dx = \frac{2}{3} x^3 + C$$

Esempio (della prima regola, bis)
Dato un qualunque numero k fissato

$$\int k \, dx = k \cdot \int 1 \, dx = kx + C$$

dove abbiamo rimpiazzato kC con C grazie al medesimo ragionamento di prima.

Esempio (della seconda regola)

$$\begin{aligned}\int x - \sin(x)\,dx &= \int x\,dx + \int -\sin(x)\,dx = \int x\,dx - \int \sin(x)\,dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1\right) - \left(-\cos(x) + C_2\right) = \frac{1}{2}x^2 + \cos(x) + C_1 - C_2\end{aligned}$$

(nel secondo passaggio si usa $\int -1 \cdot \sin(x)\,dx = -1 \cdot \int \sin(x)\,dx$). Sono due integrali separati, e ciascuno ha la sua costante: siccome $C_1 - C_2$ è semplicemente un numero qualunque — scritto in maniera fantasiosa —, siamo giustificati a chiamarlo C.

$$\int x - \sin(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \cos(x) + C$$

Nota importante
Se, nell'esempio precedente, anziché C_1 e C_2 avessimo scritto C e C, al posto di $C_1 - C_2$ ci sarebbe venuto $C - C = 0$, e avremmo ottenuto un risultato sbagliato (senza costante di integrazione).

Nota
La costante di integrazione conduce a discorsi un po' complicati però, essenzialmente, è solo burocrazia: alla fine otterremo sempre un risultato del tipo $\int \text{funzione}\,dx = \text{primitiva} + C$. All'atto pratico non serve mai, anzi, al di fuori di un corso di matematica sarebbe goffo dilungarsi su questa formalità. Potrebbe essere apprezzato, però, che tu non scriva cose false tipo $x^2 = x^2 + C$.

§26.3 La regola di sostituzione

Rispetto alle derivate, gli integrali sono più complicati per via di un guaio: non esiste una regola per $\int f(x) \cdot g(x)\,dx$. Ci sono, tuttavia, metodi che talvolta — ossia solo in determinate circostanze — permettono di calcolare integrali di questo tipo. In questo corso vediamo soltanto la regola di sostituzione; si potrebbe dire molto altro, ma sarebbe oltre gli scopi del corso.

Regola

Se $\int f(y)\,dy = F(y) + C$, allora

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + C$$

Esercizio
Calcola $\int x \sin(x^2)\,dx$.

Soluzione. Usiamo la regola con $f(y) = \sin(y)$ e $g(x) = x^2$ (da cui $g'(x) = 2x$). Siccome

$$\int f(y)\,dy = \int \sin(y)\,dy = -\cos(y) + C$$

prendiamo $F(y) = -\cos(y)$, e la regola dà

$$\int \sin(x^2) \cdot 2x\,dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = -\cos(x^2) + C$$

Per risalire all'integrale cercato basta quindi moltiplicare e dividere per 2:

$$\begin{aligned}\int x \sin(x^2)\,dx &= \int \frac{1}{2}\sin(x^2) \cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(x^2) \cdot 2x\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C\end{aligned}$$

(ricordando le solite considerazioni su C). □

Esempio ($\int \cos(x+1)\,dx$)
Usiamo $f(y) = \cos(y)$ e $g(x) = x + 1$. Siccome $\int f(y)\,dy = \sin(y) + C$ prendiamo $F(y) = \sin(y)$; inoltre $g'(x) = 1$. Quindi

$$\int \cos(x+1)\,dx = \int \cos(x+1) \cdot 1\,dx = \sin(x+1) + C$$

Osservazione (verifica della regola di sostituzione)
Dobbiamo controllare che la derivata di $F(g(x)) + C$ sia la funzione integranda:

$$\big(F(g(x)) + C\big)' = \underbrace{F'(g(x))}_{f(g(x))} \cdot g'(x) + 0 = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

dove si usa $F' = f$, che vale appunto perché $\int f(y)\,dy = F(y) + C$.

§26.4 Un caso particolare che conviene ricordare

Il caso seguente si presenta con grande frequenza, per cui conviene tenere a mente la formula.

Regola

Se $\int f(y)\,dy = F(y) + C$, allora

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Infatti, usando la regola di sostituzione con $g(x) = ax + b$ (da cui $g'(x) = a$), otteniamo

$$\int f(ax+b)\,dx = \int \frac{1}{a} f(ax+b)\cdot a\,dx = \frac{1}{a}\int f\big(g(x)\big)\,g'(x)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Esempio ($\int \frac{1}{2x+3}\,dx$)
Usiamo la formula con $f(y) = \frac{1}{y}$: siccome $\int f(y)\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy = \log_e(y) + C$ prendiamo $F(y) = \log_e(y)$. Ora abbiamo $a = 2$ e $b = 3$ (affinché $2x+3 = ax+b$), quindi

$$\int \frac{1}{2x+3}\,dx = \int f(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}\log_e(2x+3) + C$$

Esempio ($\int 7^x\,dx$)
Per applicare la regola conviene ricordare che $7^x = e^{x\log_e(7)}$, e poi applicare la formula con $f(y) = e^y$, $a = \log_e(7)$ e $b = 0$:

$$\int 7^x\,dx = \int e^{x\log_e(7)}\,dx = \frac{1}{\log_e(7)}e^{x\log_e(7)} + C = \frac{1}{\log_e(7)}\cdot 7^x + C$$

§26.5 Esercizi

Test 143 (soluzione a p. 351)
$\int \sin(2x) + x^2\,dx$

Test 144 (soluzione a p. 351)
$\int e^{3x} - \cos(1-x)\,dx$

Test 145 (soluzione a p. 352)
$\int \frac{x-1}{x}\,dx$

Test 146 (soluzione a p. 352)
Trova una primitiva di $f(x) = e^{2+3x}$.

Test 147 (soluzione a p. 352)
Trova una primitiva di $f(x) = 2\sqrt[3]{3x}$.

Test 148 (soluzione a p. 352)
Calcola la soluzione generale dell'equazione $f'(x) = x^3 + \cos(x)$.

Test 149 (soluzione a p. 352)
Calcola $\int \log_e(2x - 1)\,dx$.

§27 Bestiario minimo di equazioni differenziali

In generale, risolvere equazioni differenziali è difficilissimo, e le leggi della natura non si fanno scrupolo di tirarcene addosso di insolubili anche nello studio di fenomeni semplicissimi. Le sezioni seguenti sono dedicate a tre classi di equazioni fra le molteplici che si sa come risolvere.

§27.1 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo ordine

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b$$

Già sappiamo la soluzione generale di questa equazione nel caso $a = 0$: infatti abbiamo $f'(x) = b$ e quindi

$$f(x) = \int b \, dx = bx + C$$

Per imparare a risolvere il caso generale, conviene ricordare a memoria quello che capita quando $b = 0$:

Fatto
L'equazione

$$f'(x) = a \cdot f(x)$$

ha la soluzione generale

$$f(x) = C \cdot e^{ax}$$

(verifica: $f'(x) = C \cdot a \cdot e^{ax} = a \cdot Ce^{ax} = a \cdot f(x)$).

Nota (trucco per ricordare la soluzione)
Basta ricordare che f è una funzione esponenziale. Scrivendo un esponenziale generico $f(x) = \alpha e^{\beta x}$ otteniamo $f'(x) = \alpha\beta e^{\beta x}$, quindi

$$\alpha\beta e^{\beta x} = f'(x) = af(x) = a\alpha e^{\beta x}$$

e $\beta = a$, mentre non vi sono condizioni su α. Quindi la soluzione generale è $f(x) = \alpha e^{ax}$.

Nel caso generale, sempre assumendo $a \neq 0$, abbiamo

$$f(x) = \underbrace{Ce^{ax}}_{\text{omogenea}} \underbrace{- \frac{b}{a}}_{\text{particolare}}$$

Come si ricava questa soluzione?

1. Si parte dall'equazione omogenea associata $f' = af$ (ottenuta cancellando il $+b$): abbiamo già visto che la sua soluzione generale è $f(x) = Ce^{ax}$.

2. Si cerca una soluzione particolare dell'equazione data. Per esempio possiamo cercarla costante, $f(x) = k$, da cui
$$0 = f'(x) = a \cdot k + b \qquad \Longrightarrow \qquad k = -\frac{b}{a}$$
3. La soluzione generale dell'equazione data si ottiene sommando la soluzione particolare trovata alla soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

Osservazione (verifica della soluzione generale)

$$f'(x) = \left(Ce^{ax} - \frac{b}{a}\right)' = C \cdot a \cdot e^{ax}$$
$$af(x) + b = a \cdot Ce^{ax} - \cancel{a}\frac{b}{\cancel{a}} + b = a \cdot C \cdot e^{ax}$$

I due membri coincidono.

Esempio
Qual è la soluzione generale di $f' = 2f + 4$?

L'omogenea associata $f' = 2f$ ha soluzione generale $f(x) = Ce^{2x}$. Una soluzione particolare costante $f(x) = k$ deve soddisfare $0 = 2k + 4$, cioè $k = -2$. Sommando, $f(x) = Ce^{2x} - 2$.
In alternativa, basta applicare meccanicamente la formula. In ogni caso, è meglio fare una verifica: $f'(x) = 2Ce^{2x}$ e $2f(x) + 4 = 2Ce^{2x} - 4 + 4 = 2Ce^{2x}$.

Esercizio
Un corpo si muove lungo l'asse x. Al tempo $t = 0$ esso si trova in $x = 0$ e ha velocità $\frac{dx}{dt} = 1$. Ad ogni istante il corpo è sottoposto a un'accelerazione $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt}$ (attrito viscoso). In che posizione si trova il corpo in funzione del tempo t?

Soluzione. In questo esercizio t, il tempo, è la variabile indipendente, mentre x, la posizione, dipende da t: possiamo quindi scrivere $x(t)$ per la posizione, $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ per la velocità e $x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ per l'accelerazione. Scritti così, i dati dell'esercizio sono

$$\text{(A) } x(0) = 0 \qquad \text{(B) } x'(0) = 1 \qquad \text{(C) } x''(t) = -x'(t)$$

Per affrontare l'equazione (C) conviene introdurre una nuova funzione, $v(t) := x'(t)$: in questo modo $v'(t) = x''(t)$ e l'equazione diventa
$$v'(t) = -v(t)$$

Questa è un'equazione del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti (con $a = -1$ e $b = 0$), la cui soluzione generale è $v(t) = Ce^{-t}$. Ci resta da trovare $x(t)$: siccome $x'(t) = v(t) = Ce^{-t}$,
$$x(t) = \int Ce^{-t}\,dt = -Ce^{-t} + D$$

(D perché C è già usata). Questa è la soluzione generale dell'equazione (C). Per trovare la soluzione particolare che rappresenta la legge del moto del corpo dato dobbiamo determinare le costanti C e D usando le condizioni (A) e (B):

$$0 \overset{(A)}{=} x(0) = -Ce^{-0} + D = D - C \qquad \Longrightarrow \qquad D = C$$
$$1 \overset{(B)}{=} x'(0) = v(0) = Ce^{-0} = C \qquad \Longrightarrow \qquad C = 1$$

Quindi, in definitiva, $x(t) = 1 - e^{-t}$. □

Nota
L'equazione (C) coinvolge derivate che arrivano fino alla seconda: si tratta quindi di un'equazione del secondo ordine. La soluzione generale di un'equazione dell'n-esimo ordine è una famiglia di funzioni con n parametri, ed è per questo che la soluzione che abbiamo trovato dipende da due costanti (C e D). In generale, per fissare una soluzione particolare di un'equazione di n-esimo ordine servono n condizioni (in questo caso ne avevamo infatti due).

§27.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del secondo ordine

$$f''(x) = af'(x) + bf(x) + c$$

Le equazioni di questa classe si risolvono nei medesimi passaggi delle equazioni lineari a coefficienti costanti del primo ordine:

1. risolvere l'equazione omogenea associata;
2. trovare una soluzione particolare dell'equazione da risolvere;
3. la soluzione generale cercata è la somma della soluzione generale dell'omogenea e di una soluzione particolare.

Vediamoli in dettaglio.

1. Soluzione dell'omogenea

L'equazione omogenea associata è

$$f''(x) = af'(x) + bf(x)$$

Provvisoriamente cerchiamo $f(x) = e^{\alpha x}$; mettiamo quindi $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$ e $f''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$ nell'equazione:

$$\alpha^2 \cancel{e^{\alpha x}} = a\alpha \cancel{e^{\alpha x}} + b\cancel{e^{\alpha x}} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha^2 - a\alpha - b = 0 \qquad (*)$$

- Se $\Delta = a^2 + 4b > 0$, l'equazione di secondo grado $(*)$ ha due soluzioni α_1 e α_2, e la soluzione generale dell'omogenea è

$$f(x) = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$$

- Se $\Delta = 0$, l'equazione $(*)$ ha una sola soluzione α, e la soluzione generale è
$$f(x) = \big(C_1 x + C_2\big)e^{\alpha x}$$
- Se $\Delta < 0$, la soluzione generale dell'omogenea è
$$f(x) = e^{\frac{a}{2}x}\Big(C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)\Big) \qquad \text{con} \qquad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

2. Soluzione particolare

- Se $c = 0$, allora l'equazione data coincide con l'omogenea, quindi abbiamo già finito.
- Se $b \neq 0$, allora $f(x) = -\frac{c}{b}$ è una soluzione particolare.
- Se $b = 0$ e $a \neq 0$, allora $f(x) = -\frac{c}{a}x$ è una soluzione particolare.
- Se $b = a = 0$, allora $f(x) = \frac{c}{2}x^2$ è una soluzione particolare.

3. Soluzione generale

La soluzione generale si ottiene sommando una soluzione particolare e la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

Nota importante
Non è importante che si sappia a memoria il metodo per risolvere questo tipo di equazioni. È importante sapere che le soluzioni hanno, in generale, comportamenti esponenziali e oscillanti variamente combinati (a seconda dei coefficienti). Ed è importante sapere (libro o appunti alla mano) come applicare il metodo.

Esempio $(f'' = 3f' - 2f)$

1. Omogenea: $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \implies \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, quindi
$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$
2. Soluzione particolare: $c = 0 \implies f(x) = 0$.
3. $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Esempio $(f'' = 2f' - 2f + 6)$

1. Omogenea: $\alpha^2 - 2\alpha + 2 = 0 \implies \Delta = -4 < 0$ (e $\omega = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$), quindi
$$f(x) = e^x\big(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\big)$$

2. Soluzione particolare: $f(x) = -\frac{c}{b} = -\frac{6}{-2} = 3$.
3. $f(x) = e^x\left(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\right) + 3$.

Esempio ($f'' = 2f' - f - 7$)

1. Omogenea: $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \implies \alpha = 1$ (soluzione doppia), quindi
$$f(x) = e^x\left(C_1 x + C_2\right)$$
2. Soluzione particolare: $f(x) = -\frac{c}{b} = -\frac{-7}{-1} = -7$.
3. $f(x) = e^x\left(C_1 x + C_2\right) - 7$.

Esempio ($f'' = f' + 1$)

1. Omogenea: $\alpha^2 - \alpha = 0 \implies \alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, quindi
$$f(x) = C_1 + C_2 e^x$$
2. Soluzione particolare ($b = 0$ e $a \neq 0$): $f(x) = -\frac{c}{a}x = -x$.
3. $f(x) = C_1 + C_2 e^x - x$.

Nota
Conviene verificare ciascuna di queste soluzioni calcolando separatamente i due membri dell'equazione, come abbiamo fatto per l'equazione del primo ordine: è un esercizio breve e mette al riparo da errori di segno.

Esempio (il corpo con attrito viscoso, di nuovo)
Possiamo rifare l'esercizio di pagina 199 sfruttando, questa volta, l'equazione del secondo ordine. La funzione incognita è $x(t)$ e dobbiamo risolvere $x''(t) = -x'(t)$. Questa equazione è omogenea, ossia non c'è il termine noto: dobbiamo quindi risolvere l'equazione di secondo grado $\alpha^2 + \alpha = 0$, che dà $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 0$, quindi
$$x(t) = C_1 e^{-1\cdot t} + C_2 e^{0\cdot t} = C_1 e^{-t} + C_2$$
Proseguiamo, ora, come nella soluzione precedente per trovare C_1 e C_2:
$$\begin{aligned} 0 = x(0) &= C_1 + C_2 && \implies && C_2 = -C_1 \\ 1 = x'(0) &= -C_1 e^{-0} = -C_1 && \implies && C_1 = -1 \end{aligned}$$
e quindi, ancora una volta, $x(t) = 1 - e^{-t}$.

§27.3 Equazioni differenziali a variabili separabili

Sono a variabili separabili le equazioni della forma

$$f'(x) = g(x) \cdot h\big(f(x)\big)$$

in cui f è la funzione incognita, mentre g e h sono funzioni date. Queste equazioni si possono risolvere con un trucco che non è formalmente ineccepibile, ma funziona.

Regola

1. Scriviamo l'equazione nella forma
$$\frac{df}{dx} = g(x) \cdot h(f)$$
2. Riordiniamo i termini dell'equazione
$$\frac{df}{h(f)} = g(x)\,dx$$
3. Calcoliamo l'integrale indefinito di ambo i membri
$$A(f) + C_1 := \int \frac{df}{h(f)} = \int g(x)\,dx =: B(x) + C_2$$
4. Raccogliamo le costanti C_1 e C_2 in $C := C_2 - C_1$
$$A(f) = B(x) + C$$
5. Ricaviamo f da quest'ultima equazione.

Così troviamo una famiglia di funzioni dipendente dal parametro C, e questa è la soluzione generale.

Esempio ($f' = 3xf$)

1. $\dfrac{df}{dx} = 3xf$
2. $\dfrac{df}{f} = 3x\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{df}{f} = \int 3x\,dx$, ossia $\log_e(f) + C_1 = \frac{3}{2}x^2 + C_2$
4. $\log_e(f) = \frac{3}{2}x^2 + C$

5. $f = e^{\frac{3}{2}x^2+C} = \underbrace{e^C}_{K} \cdot e^{\frac{3}{2}x^2}$

Quindi la soluzione generale dell'equazione è $f(x) = Ke^{\frac{3}{2}x^2}$.

Verifica:

$$f'(x) = K \cdot \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot e^{\frac{3}{2}x^2} = 3xKe^{\frac{3}{2}x^2} = 3xf(x)$$

Esempio ($x'(t) = \frac{3x(t)}{t}$)

1. $\frac{dx}{dt} = \frac{3x}{t}$
2. $\frac{dx}{x} = 3\frac{dt}{t}$
3. $\int \frac{dx}{x} = \int 3\frac{dt}{t}$, ossia $\log_e(x) + C_1 = 3\log_e(t) + C_2$
4. $\log_e(x) = 3\log_e(t) + C$
5. $x = e^{3\log_e(t)+C} = \underbrace{e^C}_{K}\underbrace{e^{3\log_e(t)}}_{t^3} = Kt^3$

Quindi $x(t) = Kt^3$.

Nota
Anche qui conviene verificare la soluzione: si calcola $x'(t)$ e si controlla che sia $\frac{3x(t)}{t}$.

§27.4 Un'applicazione: la cinetica chimica

Le reazioni chimiche non sono istantanee — *natura non facit saltus.* Spesso la velocità di una reazione è legata alla temperatura e alla concentrazione dei reagenti. Analizziamo il caso più semplice: quando conta solo (o principalmente) la concentrazione di un unico reagente; frequentemente, in questo caso, la dipendenza è di questo genere

$$\frac{d[A]}{dt} = -k\,[A]^n$$

dove $[A]$ denota la concentrazione molare del reagente A. Le costanti k e n si chiamano rispettivamente costante di velocità e ordine della reazione (va da sé che le unità di misura della costante di velocità dipendono dall'ordine di reazione: $(\text{mol/L})^{1-n}/\text{s}$). Abbiamo quindi un'equazione differenziale, la cui soluzione ci darà l'andamento della concentrazione di A nel tempo.

Nota importante
La parola "ordine" non si riferisce qui all'ordine dell'equazione differenziale: l'ordine di reazione è una cosa completamente diversa — l'esponente! — mentre l'equazione è sempre del primo ordine.

Ordine zero ($n = 0$). L'equazione è $\frac{d[A]}{dt} = -k$, e basta integrare:

$$[A] = [A]_0 - k\,t$$

dove $[A]_0$ è la concentrazione al tempo $t = 0$: la concentrazione diminuisce linearmente (finché il reagente non è esaurito).

Primo ordine ($n = 1$). L'equazione $\frac{d[A]}{dt} = -k\,[A]$ è lineare a coefficienti costanti:

$$[A] = [A]_0\, e^{-kt}$$

quindi $[A]$ decade esponenzialmente, con tempo di dimezzamento dato dall'equazione $e^{-kt_{1/2}} = \frac{1}{2}$:

$$t_{1/2} = \frac{\log_e(2)}{k}$$

Seguono una cinetica del primo ordine molte reazioni di decomposizione e, approssimativamente, l'eliminazione di molti farmaci dal plasma.

Secondo ordine ($n = 2$). L'equazione $\frac{d[A]}{dt} = -k\,[A]^2$ è a variabili separabili:

$$\frac{d[A]}{[A]^2} = -k\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{1}{[A]} = -k\,t + C$$

e imponendo che al tempo $t = 0$ la concentrazione sia $[A]_0$,

$$\frac{1}{[A]} = \frac{1}{[A]_0} + k\,t$$

Osservazione
La cinetica del primo ordine ha un tempo di dimezzamento costante. In una cinetica di ordine zero, ogni dimezzamento di $[A]$ impiega la metà del precedente. In una cinetica del secondo ordine, ogni dimezzamento impiega il doppio del precedente.

Misurando la concentrazione di A in vari istanti, è possibile distinguere fra gli ordini di reazione: un modo è osservare che, per ogni ordine di reazione, c'è un opportuno diagramma su cui la funzione $t \mapsto [A]$ è rappresentata da una retta.

ordine	soluzione	grafico che dà una retta
0	$[A] = [A]_0 - kt$	$[A]$ in funzione di t
1	$[A] = [A]_0\, e^{-kt}$	$[A]$ su scala logaritmica (semi-log)
2	$\frac{1}{[A]} = \frac{1}{[A]_0} + kt$	$\frac{1}{[A]}$ in funzione di t

Esempio
Un principio attivo in soluzione si degrada con una cinetica del primo ordine, con costante di velocità $k = 2.0 \cdot 10^{-3}$ giorni^{-1}. Quanto vale il tempo di dimezzamento? Dopo quanto tempo resta il 90% del principio attivo iniziale?

$$t_{1/2} = \frac{\log_e(2)}{k} = \frac{0.693147}{2.0 \cdot 10^{-3}\,\text{giorni}^{-1}} = 346.574\,\text{giorni} \approx 350\,\text{giorni}$$

Resta il 90% quando $e^{-kt} = 0.90$, cioè

$$t = \frac{\log_e(1/0.90)}{k} = \frac{0.105361}{2.0 \cdot 10^{-3}\,\text{giorni}^{-1}} = 52.680\,\text{giorni} \approx 53\,\text{giorni}$$

Esercizio
Due molecole di ciclopentadiene (C_5H_6) possono reagire formando una molecola di *di*ciclopentadiene ($C_{10}H_{12}$). I dati seguenti provengono da un esperimento eseguito alla temperatura di 25.1 °C in soluzione di benzene.

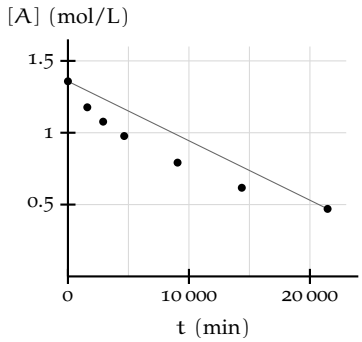
tempo (min)	0	1 600	2 910	4 650	9 060	14 370	21 460
$[C_5H_6]$ (mol/L)	1.358	1.177	1.077	0.977	0.792	0.617	0.470

L'autore dell'esperimento riporta un'accuratezza del 3–5% per le misure di concentrazione; i tempi sono probabilmente accurati entro ±10 min. Determina l'ordine della reazione e stima la costante di velocità.

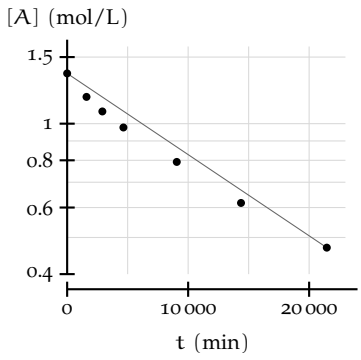
Soluzione. Calcoliamo il reciproco delle concentrazioni misurate, e tracciamo i diagrammi suggeriti dal metodo: lineare, semi-logaritmico e lineare di 1/concentrazione.

tempo (min)	0	1 600	2 910	4 650	9 060	14 370	21 460
$[C_5H_6]$ (mol/L)	1.358	1.177	1.077	0.977	0.792	0.617	0.470
$1/[C_5H_6]$ (L/mol)	0.736	0.850	0.929	1.024	1.263	1.621	2.128

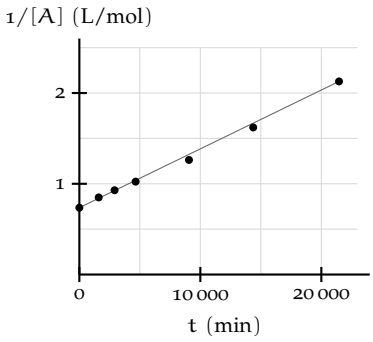
Si ottengono quindi i diagrammi seguenti



lineare



semi-logaritmico



lineare di 1/[A]

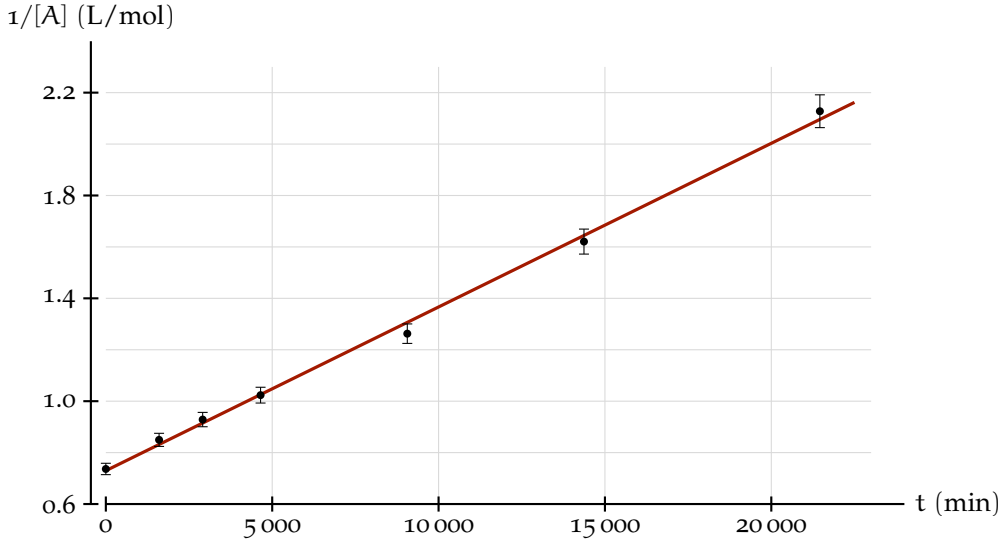
I punti paiono allineati nel terzo diagramma, per cui, se un ordine di reazione c'è, è il secondo. Per determinare i coefficienti della retta

$$\frac{1}{[A]} = \frac{1}{[A]_0} + kt$$

(vale a dire $1/[A]_0$ e k) possiamo ricorrere al metodo della regressione lineare (capitolo 20): la retta che troveremo, in questo contesto, si chiama retta dei minimi quadrati, perché è quella che rende minima la somma dei quadrati degli scarti dai dati misurati. La regressione lineare ci dà la retta

$$\frac{1}{[A]} = 0.730 \frac{L}{mol} + 6.366 \cdot 10^{-5} \frac{L}{mol \cdot min} \cdot t$$

Per verificare che questa ipotesi sia compatibile con i dati sperimentali, riportiamo sul diagramma dei dati questa retta e i margini di errore $1/[A] \pm 3\%$ — l'autore riporta un'accuratezza del 3–5%, qualunque cosa questo voglia dire.



I dati sono in accordo con la retta calcolata; possiamo quindi dire che l'ordine della reazione è $n = 2$, e la costante di velocità è $k \approx 6.4 \cdot 10^{-5}\,L\,mol^{-1}\,min^{-1}$.
Perché ho scelto di arrotondare questo valore a due cifre significative? Vista l'incertezza sui dati, sebbene non l'abbiamo calcolata esattamente, possiamo aspettarci un'incertezza simile sul risultato. Siccome il 3% di 6.366 è circa 0.2, l'ultima cifra affidabile del risultato è quella dei decimi. □

§27.5 Esercizi

Test 150 (soluzione a p. 353)
Trova la soluzione generale dell'equazione $f' = -2f + 4$.

Esercizio 151 (soluzione a p. 353)
Trova la soluzione dell'equazione differenziale $f'' + 4f' + 5f + 10 = 0$ tale che $f(0) = f'(0) = 0$.

Esercizio 152 (soluzione a p. 354)
Trova $f(x)$ sapendo che $x\,f(x)\,f'(x) = 1$ e $f(1) = 1$.

Esercizio 153 (soluzione a p. 354)
La funzione $f(x) = 10^{2+x} + 5$ è una soluzione particolare dell'equazione

$$f'(x) = Af(x) + B$$

Determina A e B.

Esercizio 154 (soluzione a p. 355)
La funzione $g(x) = (1 + x^2)e^x$ è una soluzione particolare dell'equazione

$$g'''(x) = Cg''(x) + Dg'(x) + Eg(x) + F$$

Determina C, D, E, F.

Esercizio 155 (soluzione a p. 355)
La funzione $f(x) = e^{-2x}\sin(x + 1)$ soddisfa un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti: determina questa equazione.

Esercizio 156 (soluzione a p. 356)
Indichiamo con $[A]_t$ la concentrazione molare di un reagente, in una certa reazione chimica, in funzione del tempo t. Sappiamo che $[A]_t$ soddisfa l'equazione differenziale (cinetica del secondo ordine)

$$\frac{d[A]_t}{dt} = -k\,[A]_t^2$$

nella quale k è una costante. Sapendo che $[A]_{0\,s} = 1.000\,\text{mol/L}$ e $[A]_{600\,s} = 0.230\,\text{mol/L}$, determina $[A]_{300\,s}$. Traccia quindi un grafico semilogaritmico, con l'asse dei tempi in scala lineare, che rappresenti l'andamento di $[A]_t$ per t fra 0 e 600 secondi.

§28 Integrali definiti & aree

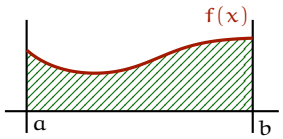
Notazione

Se $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, definiamo

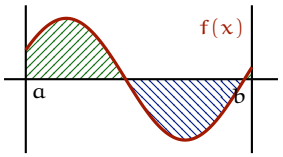
$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a) = \underbrace{\Big[F(x)\Big]_a^b}_{\text{maniera buffa di scrivere } F(b)-F(a)}$$

che si legge "integrale da a a b di $f(x)$ in dx". I numeri a e b si chiamano estremi di integrazione.

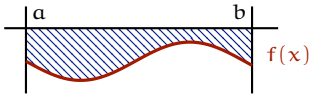
Fatto (teorema fondamentale del calcolo integrale)
$\int_a^b f(x)\,dx$, con $a \leqslant b$, è l'area della superficie di piano compresa fra il grafico di $f(x)$ e l'asse x, fra l'ascissa $x = a$ e l'ascissa $x = b$, contata positivamente nel semipiano superiore e negativamente nel semipiano inferiore.



$\int_a^b f = \text{Area}(\text{▨})$



$\int_a^b f = \text{Area}(\text{▨}) - \text{Area}(\text{▨})$

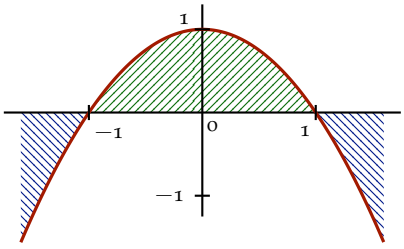


$\int_a^b f = -\text{Area}(\text{▨})$

Notazione
Se $b < a$ si pone $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$: si invertono gli estremi cambiando segno all'integrale.

Esercizio
Calcola l'area della regione limitata di piano compresa fra il grafico di $f(x) = 1 - x^2$ e l'asse x.

Soluzione.



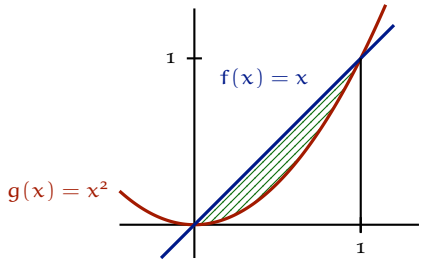
L'area richiesta è quella tratteggiata in verde. Nel grafico è possibile identificare anche altre aree (tratteggiate in blu), ma queste non sono limitate, quindi non è a quelle che

si riferisce il testo. Applicando il teorema fondamentale del calcolo, e ricordando che $\int 1 - x^2\,dx = x - \frac{1}{3}x^3 + C$,

$$\text{Area} = \int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

□

Esercizio
Calcola l'area della regione limitata compresa fra i grafici di $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$.



Soluzione.

Siccome il teorema fondamentale del calcolo non è applicabile direttamente a questa situazione, scomponiamo l'area in una differenza di due aree più semplici: quella sotto la retta f e quella sotto la parabola g, entrambe fra 0 e 1.

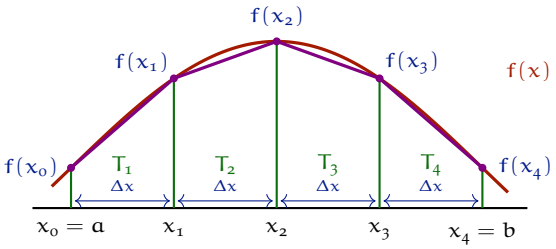
$$\begin{aligned}\text{Area} &= \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

□

§28.1 Calcolo numerico di integrali

Il teorema fondamentale del calcolo ci permette di dare un senso anche a quegli integrali che non riusciamo a calcolare in forma chiusa — e ce ne sono che non si possono proprio calcolare mediante una formula, per esempio $\int \frac{\sin(x)}{x}\,dx$. Sfruttando la connessione fra integrale e area, possiamo approssimare numericamente un integrale stimando il valore dell'area che esso rappresenta.

Per esempio, supponiamo di voler calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$. Potremmo approssimare il grafico di $f(x)$ con la spezzata viola nel disegno. L'area sotto questa spezzata, che sarà la nostra stima dell'integrale, è la somma delle aree dei trapezi T_1, T_2, T_3 e T_4 (le cui basi sono disposte in verticale).



L'area di un trapezio è $\frac{\text{base}_1+\text{base}_2}{2}\cdot$ altezza; nel nostro caso le basi sono verticali e l'altezza è Δx:

$$\text{Area}(T_1) = \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\cdot\Delta x \qquad \text{Area}(T_2) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot\Delta x \qquad \text{eccetera}$$

Mettendo insieme queste formule:

$$\begin{aligned}\text{Area(spezzata)} &= \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\Delta x + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\Delta x \\ &\quad + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}\Delta x + \frac{f(x_3)+f(x_4)}{2}\Delta x \\ &= \Delta x\cdot\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{f(x_4)}{2}\right)\end{aligned}$$

(i termini interni compaiono due volte, e si sommano).

Ora, abbiamo usato solo quattro trapezi, ma questo è un numero troppo piccolo in pratica. Conviene generalizzare la formula a un numero arbitrario n di trapezi: siccome l'intervallo $[a,b]$ è diviso in n lunghezze, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Regola (formula dei trapezi)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x\cdot\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

con $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $x_1 = a+\Delta x$, $x_2 = a+2\Delta x$, $x_3 = a+3\Delta x$, $\ldots$, $x_n = b$.

Chiaramente, più grande sarà il numero n dei trapezi, migliore sarà l'approssimazione così ottenuta.

Esempio (la formula dei trapezi all'opera)
È facile calcolare che $\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3} \approx 2.67$ (fallo per esercizio). Facciamo però finta di non saper fare questo calcolo, e troviamo un'approssimazione col metodo dei trapezi.

Useremo $n = 4$ trapezi, quindi $\Delta x = \frac{2-0}{4} = 0.5$; gli altri dati sono $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 2$.

x_i	0	0.5	1	1.5	2
$f(x_i)$	0	0.25	1	2.25	4

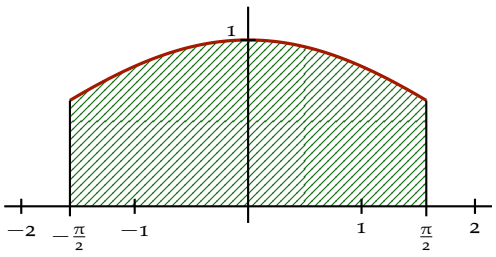
$$\int_0^2 x^2\,dx \approx 0.5 \cdot \left(\frac{0}{2} + 0.25 + 1 + 2.25 + \frac{4}{2}\right) = 2.75$$

Come possiamo notare, anche con soli quattro trapezi abbiamo ottenuto un risultato vicino al valore esatto $\frac{8}{3} \approx 2.67$.

Esercizio
Calcola un'approssimazione numerica di

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

Soluzione. Cominciamo col disegnare il grafico della funzione integranda.



Notiamo che l'area indicata dall'integrale è simmetrica rispetto all'asse y, ossia la funzione integranda $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ ha simmetria pari ($f(-x) = f(x)$). Quindi ci basta calcolare la metà fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, e poi moltiplicare per due:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

(questo passaggio non è necessario, però ci permette di ottenere il medesimo risultato facendo metà del lavoro).

Ora si presenta un nuovo guaio, che si sarebbe presentato in ogni caso: la funzione integranda non è definita in 0. La soluzione — che può essere giustificata teoricamente, ma la giustificazione esula dagli argomenti di questo corso — è di completare la

funzione integranda con il suo limite nel punto in cui non è definita. Siccome

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

possiamo immaginare, allo scopo di calcolare l'integrale, che questa funzione valga 1 in $x = 0$.

Procediamo ad applicare il metodo dei trapezi. Potremmo decidere di usare $n = 10$, ossia 10 trapezi fra 0 e $\frac{\pi}{2}$: otterremo il medesimo risultato che si avrebbe con 20 trapezi totali. Poniamo

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad n = 10 \qquad \Delta x = \frac{\pi/2}{10} = 0.15708$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.1571	0.3142	0.4712	0.6283	0.7854	0.9425	1.0996	1.2566	1.4137	1.5708
$f(x_i)$	1	0.9959	0.9836	0.9634	0.9355	0.9003	0.8584	0.8103	0.7568	0.6986	0.6366

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx \approx \Delta x \cdot \underbrace{\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_9) + \frac{f(x_{10})}{2}\right)}_{8.7212} = 1.3699$$

Quindi

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \approx 2.7399 \approx 2.74$$

(il valore esatto è 2.741524 . . .). □

Approfondimento (fuori programma)
È possibile stimare l'errore nel metodo dei trapezi mediante la formula

$$\underbrace{\text{approssimazione} - \int_a^b f(x)\,dx}_{\text{errore}} \approx \Delta x^2 \frac{f'(b) - f'(a)}{12}$$

Nel nostro caso

$$f'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} \qquad f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.4053 \qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0.4053$$

quindi

$$\text{errore} \approx 0.15708^2 \frac{-0.4053 - 0.4053}{12} \approx -0.0017$$

Questa stima conferma che le prime due cifre decimali della nostra approssimazione sono corrette, anzi suggerisce che il valore esatto sia ≈ 2.7416.

§28.2 Esercizi

Esercizio 157 (soluzione a p. 357)
Calcola l'area della regione limitata di piano compresa fra i grafici di $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = x^2$.

Esercizio 158 (soluzione a p. 358)
Stima $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ con la formula dei trapezi, usando quattro trapezi.

Esercizio 159 (soluzione a p. 358)
Calcola l'integrale

$$\int_0^1 x \sin\left(x^2\right) dx$$

se riesci analiticamente, altrimenti in maniera approssimata.

Esercizio 160 (soluzione a p. 359)
Calcola l'integrale

$$\int_2^7 \log_{10}\left(x^2 - 1\right) dx$$

se riesci analiticamente, altrimenti in maniera approssimata.

Parte IV
Appendici

§A Uso della calcolatrice scientifica

Seguono indicazioni per alcuni modelli specifici. Per ora ho esaminato solo calcolatrici CASIO, che mi sono parse le più usate. Con questo non intendo in alcun modo suggerire questo produttore: praticamente ogni calcolatrice è adatta per questo corso, e la più economica che trovi al supermercato va benissimo.

> **Nota**
> Nei nomi dei modelli, ☠ϟ☆ sta per i caratteri che cambiano all'interno della stessa serie: fx-☠ϟ☆ ES vuol dire fx-82ES, fx-85ES, fx-350ES e compagnia. I tasti vanno premuti in successione, da sinistra a destra; la graffa indica il nome stampato sopra la combinazione, la freccia la voce di menu che il tasto seleziona. Nei modelli fx-☠ϟ☆ CW, che hanno tutti i tasti tondi, il tasto [=] si chiama (EXE).

§A.1 Configurazione in generale

1. Se ti serve aiuto per configurare la tua calcolatrice, comincia col ripristinare le impostazioni di fabbrica (vedi sotto).
2. Prova a calcolare $2 \div 7 =$: la risposta dovrebbe essere più o meno 0.2857142857. Se invece è $\frac{2}{7}$ devi uscire dalla modalità baby, che in alcuni modelli è un'impostazione di fabbrica.
3. Configura le funzioni trigonometriche in GRADI o RADIANTI secondo la necessità.

   Per verificare che l'impostazione sia RADIANTI — quella giusta per questo corso — calcola $\sin(1)$: dovrebbe venire 0.8…

   Per verificare che l'impostazione sia GRADI SESSAGESIMALI calcola $\sin(90)$: dovrebbe venire esattamente 1.
4. Prova a spegnere e riaccendere la calcolatrice, e verifica che le impostazioni si mantengano.

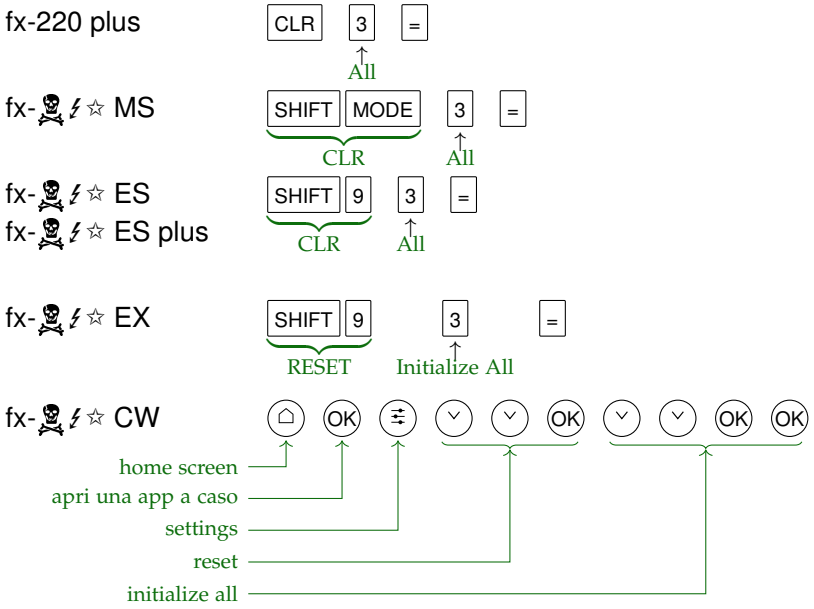
§A.2 Caveat

1. Le combinazioni (per esempio [SHIFT] [sin], che sulla tastiera è marcata $\sin^{-1}$) si eseguono premendo i tasti in successione, non contemporaneamente come si farebbe con un computer.
2. Gli angoli si misurano usualmente in gradi sessagesimali (Deg) o in radianti (Rad). Esiste un terzo sistema, desueto, di "gradi centesimali", indicato con Gra sulle calcolatrici.

   Attenzione: Gra non sono i gradi!
   Gra è il male.

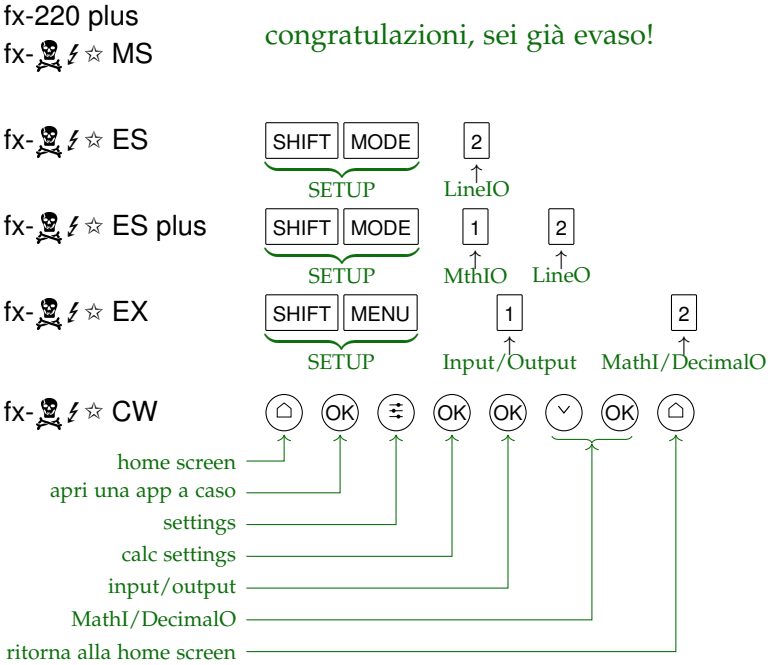
§A.3 Ripristino delle impostazioni di fabbrica

Prima di tutto spegni e riaccendi: non è strettamente necessario, ma non può far male. Poi, a seconda del modello, procedi come segue.



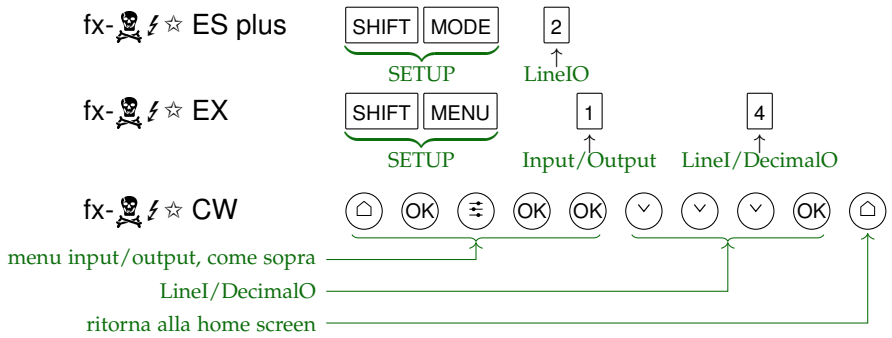
Nei modelli ES, ES plus ed EX la sequenza è la stessa: cambia solo la parola stampata sopra il tasto 9.

§A.4 Fuga dalla modalità baby

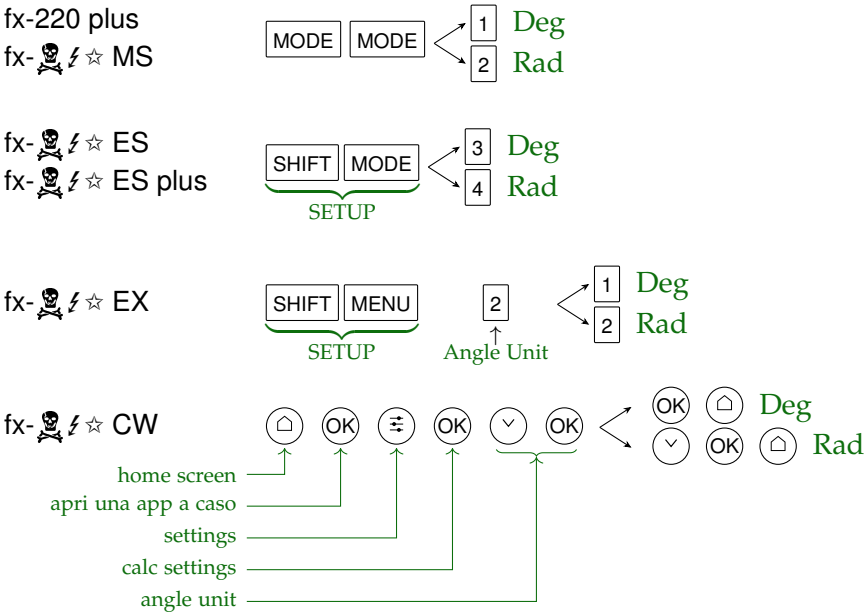


I modelli ES plus, EX e CW, impostati come sopra, si trovano in una modalità di inserimento grafica pensata per imitare l'aspetto delle formule algebriche scritte a mano o nei libri. Lo svantaggio di questa modalità è che, durante l'inserimento di un calcolo,

nasconde il risultato del calcolo precedente. È possibile ovviare all'inconveniente scegliendo una modalità di inserimento meno elaborata, che coincide con quella dei modelli precedenti, e suggerisco di farlo:



§A.5 Configurazione delle funzioni trigonometriche



§A.6 Uso efficace della calcolatrice

Conviene attenersi ai principi seguenti.

1. Eliminare i passaggi calcolatrice → carta → calcolatrice.
2. Eliminare il ri-inserimento di dati già inseriti.
3. Eliminare il ri-inserimento di formule.

Non sempre è possibile ottenere la situazione ideale, in cui si inserisce ogni formula e ogni dato una sola volta e nessuno dei risultati intermedi deve essere ri-inserito. Per cui, a volte, ci si dovrà accontentare del miglior compromesso.

Gli strumenti a nostra disposizione per mettere in pratica i principi 1–3 sono le funzioni di memoria della calcolatrice. In particolare:

- Il registro Ans (*answer*), che contiene il risultato dell'ultimo calcolo eseguito.
- I registri di memoria: uno (M) nel modello fx-220 plus, nove (le variabili A–F, x, y e M) o più negli altri.
- La cronologia dei calcoli, che permette di modificare e usare nuovamente le ultime espressioni inserite.

§A.7 Uso di Ans

Esempio ($\frac{\sin(x)}{1-\sin(x)}$ con $x = 0.1467$)

sin(0.1467) [=]	0.1461743801
Ans ÷ (1 − Ans) [=]	0.1711993371

Il dato x è stato inserito una volta sola, e il risultato intermedio non è passato dalla carta.

Esempio ($x\left(\sqrt{x} - \log_{10}(x)\right)$ con $x = 168.2731$)

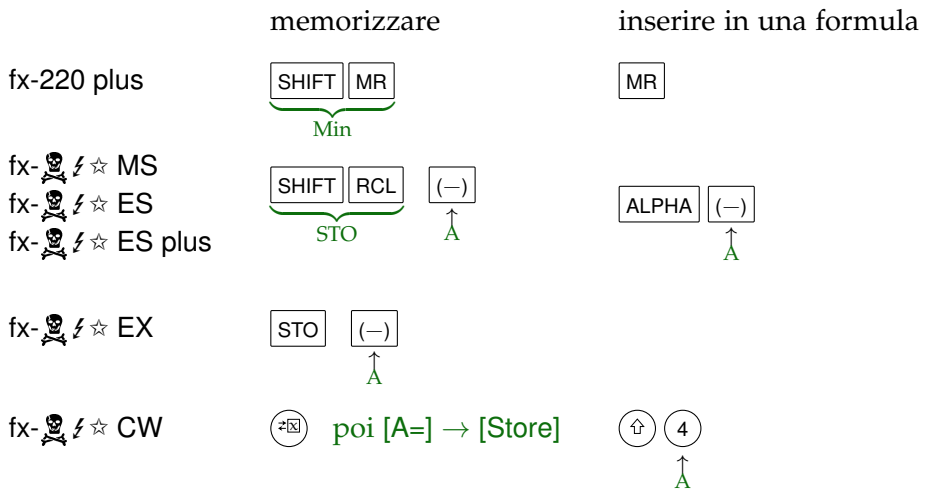
168.2731 [=]	168.2731
Ans (√(Ans) − log(Ans)) [=]	1808.262309

Qui il primo passaggio serve solo a caricare il dato in Ans: così nella formula il valore di x compare tre volte senza essere digitato tre volte.

Oltre a risparmiare lavoro, Ans è anche più preciso di qualunque ricopiatura: Ans conserva quindici cifre significative, ma la calcolatrice ne mostra solo dieci. Ricopiare a mano il risultato precedente è quindi sempre sbagliato, anche quando si ha la pazienza di ricopiarne tutte le cifre.

§A.8 Uso dei registri di memoria

Se un numero serve più volte nel corso di un conto, e non solo nel passaggio immediatamente successivo, conviene metterlo in un registro di memoria. Il numero resta nel registro anche spegnendo la calcolatrice, finché non ci si mette dentro qualcos'altro o non si ripristinano le impostazioni di fabbrica. I registri si chiamano A, B, C, ... (l'elenco cambia da un modello all'altro); nel modello fx-220 plus c'è il solo registro M. Ecco come si mette nel registro A (M per la fx-220 plus) il risultato dell'ultimo calcolo, e come si inserisce poi la lettera del registro in una formula.



Per gli altri registri, al posto di (−) (o 4) si preme il tasto sopra cui è stampata la lettera voluta. C'è anche una funzione RCL (*recall*) che, nei modelli EX e CW, mostra una tabella dei registri di memoria, mentre, negli altri, è in pratica equivalente ad ALPHA. La funzione RCL, nelle EX, si attiva tramite SHIFT STO, nelle CW con .

Esempio (Due funzioni di uno stesso dato)
Supponiamo di dover calcolare, con $x = 168.2731$,

$$x\left(\sqrt{x} - \log_{10}(x)\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{x}{1 + \log_{10}(x)},$$

magari con altri conti in mezzo. Inseriamo il dato una volta sola e lo mettiamo in A:

168.2731 = e poi in A, come sopra	A=168.2731
A (√(A) − log(A)) =	1808.262309
A ÷ (1 + log(A)) =	52.1612937

Qui Ans non sarebbe bastato: dopo il primo conto contiene 1808.262309, non più il dato.

§A.9 Uso della cronologia dei calcoli

Le calcolatrici ricordano le ultime espressioni inserite: premendo la freccia [▲] ((^) nei modelli CW) ricompaiono una alla volta, andando all'indietro, e si possono eseguire di nuovo con [=], eventualmente dopo averle modificate.

La cronologia ha una capienza limitata, e si cancella quando si spegne la calcolatrice, o anche solo premendo [ON] (e, nei fx-☠ϟ☆ CW, anche (⌂)).

Combinando la cronologia con Ans si ottiene un modo rapidissimo di calcolare una funzione in tanti punti: si scrive la formula una volta sola in termini di Ans; poi, per ogni nuovo valore di x, si inserisce il valore, si preme [=] (così il valore diventa Ans), si richiama la formula con [▲] e si preme di nuovo [=].

Esempio ($f(x) = x\left(\sqrt{x} - \log_{10}(x)\right)$ in più punti)

168.2731 [=]	168.2731
Ans (√(Ans) − log(Ans)) [=]	$f(168.2731) = 1808.262309$
200 [=] [▲] [=]	$f(200) = 2368.221126$
100 [=] [▲] [=]	$f(100) = 800$
150 [=] [▲] [=]	$f(150) = 1510.703618$

Verifica: $f(100) = 100\,(10 - 2) = 800$. Con questo trucco la tabella dei valori per il grafico di una funzione si riempie in pochi secondi per punto: non c'è ragione di lesinare sul numero dei punti.

Nota importante
Una formula richiamata dalla cronologia viene eseguita nel contesto attuale, non in quello in cui era stata scritta. Se contiene Ans o una lettera di memoria, e nel frattempo il loro contenuto è cambiato, il risultato sarà diverso da quello di prima.

Esempio (Un modo di sbagliare con la cronologia)

2 × 15 [=]	30
Ans ÷ 100 [=]	0.3
cos(Ans) [=]	0.9553364891
[▲] (ricompare Ans ÷ 100) [=]	$9.553364891 \times 10^{-3}$

Volevamo ritrovare 0.3, ma la formula Ans ÷ 100 ha diviso per 100 l'ultimo risultato, cioè $\cos(0.3)$. Lo stesso effetto che, nell'esempio precedente, faceva al caso nostro qui gioca contro di noi.

§A.10 Caveat: numeri negativi, moltiplicazione implicita, tabelle di valori

Le calcolatrici CASIO hanno due tasti per il segno meno: [−] per la sottrazione e [(−)] per scrivere un numero negativo. Verrebbe da pensare che [(−)] 3 sia, a tutti gli effetti, il numero -3, e che elevarlo al quadrato dia 9. Non è così: l'elevamento a potenza viene eseguito prima del segno meno, come nella scrittura matematica, dove -3^2 significa $-(3^2)$.

Esempio

[(−)] 3 [x^2] [=]	-9	cioè $-(3^2)$
([(−)] 3) [x^2] [=]	9	cioè $(-3)^2$

Lo stesso vale per tutte le potenze, e per tutti i modelli.

L'errore è insidioso quando si calcola una funzione per un valore negativo della variabile. Per valutare $\frac{x^2}{8}$ in $x = -0.9$ bisogna scrivere $(-0.9)^2 \div 8$: senza le parentesi si ottiene -0.10125 al posto di 0.10125, e nulla, sullo schermo, avverte dello sbaglio. Quindi, quando sostituisci un numero negativo al posto di una variabile, mettilo sempre fra parentesi. Oppure memorizzalo in un registro: se A contiene -0.9, allora A^2 fa correttamente 0.81.

Le calcolatrici CASIO prevedono due modi di scrivere la moltiplicazione: la moltiplicazione esplicita, scritta col tasto [×], e quella implicita, ottenuta scrivendo due fattori uno accanto all'altro, come in 2A o 3π. Nei modelli MS, ES plus, EX e CW le due hanno priorità diverse: la moltiplicazione implicita viene eseguita prima della divisione, quella esplicita no.

Esempio (Con 5 nel registro A)

1 ÷ 2A [=]	0.1	cioè $\frac{1}{2\cdot 5}$
1 ÷ 2 × A [=]	2.5	cioè $\frac{1}{2}\cdot 5$

Le due espressioni sembrano equivalenti, ma non lo sono. I modelli EX e CW rendono visibile la differenza aggiungendo da soli una parentesi, 1 ÷ (2A); i modelli MS ed ES plus no.

Nei modelli ES, invece, la moltiplicazione implicita ha la stessa priorità di quella esplicita. Nel dubbio, metti le parentesi: scrivi a ÷ (b × c) oppure (a ÷ b) × c, a seconda di quale dei due conti vuoi fare.

Alcuni modelli hanno la possibilità di calcolare automaticamente una tabella di valori di una funzione data. I risultati in questa tabella potrebbero avere una sola cifra significativa di precisione, ed essere, per di più, arrotondati male. Selezionando, col cursore, una casella, la calcolatrice mostra, al fondo dello schermo, il valore esatto corrispondente; comunque, trovo questo metodo inferiore a Ans+[▲].

§A.11 Funzioni avanzate

Fatta eccezione per la fx-220 plus, sono disponibili funzioni per alcuni calcoli statistici (non tutti quelli che servono in questo corso). Nei modelli ES e successivi, si trovano funzioni per la soluzione numerica di equazioni e per il calcolo numerico di integrali definiti. Questi sono strumenti che eseguono automaticamente alcuni dei calcoli richiesti in questo corso, per cui può valere la pena di studiare la propria calcolatrice e imparare a usarli.

§A.12 Riepilogo

I principi 1–3 sono elencati in ordine di priorità.

1. La cosa più importante è non far mai uscire dalla calcolatrice un risultato intermedio per poi reinserirlo: Ans e i registri di memoria servono a questo.
2. Eliminati questi passaggi, conviene non inserire più di una volta i dati del problema, specie se hanno tante cifre: Ans e i registri.
3. Infine, conviene non inserire più di una volta la stessa formula: la cronologia, combinata con Ans.

Ogni modello ha poi le sue stranezze, come il quadrato dei numeri negativi e la moltiplicazione implicita, e le sue funzioni più o meno avanzate.

Nota importante
È fondamentale acquisire dimestichezza con la propria calcolatrice prima dell'esame.

§B Come tracciare un grafico

Nota importante (attenzione)
Prima di proseguire, se non l'hai già fatto, risolvi l'esercizio qui sotto. Questa appendice non ti servirà a nulla se vedi il grafico corretto prima di provare a tracciarlo autonomamente.

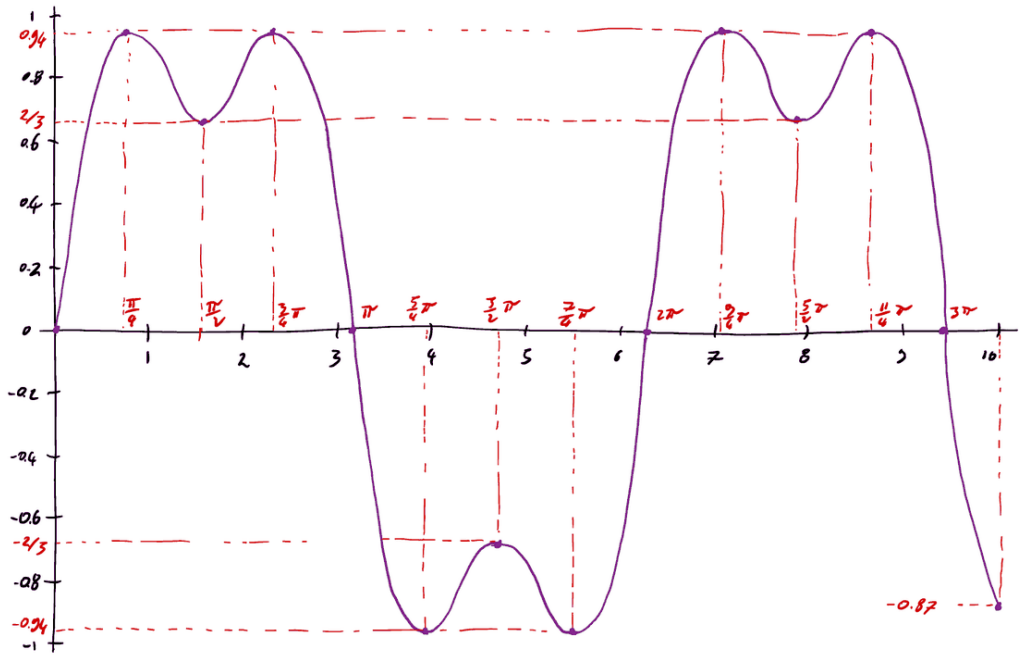
Esercizio
Traccia il grafico di

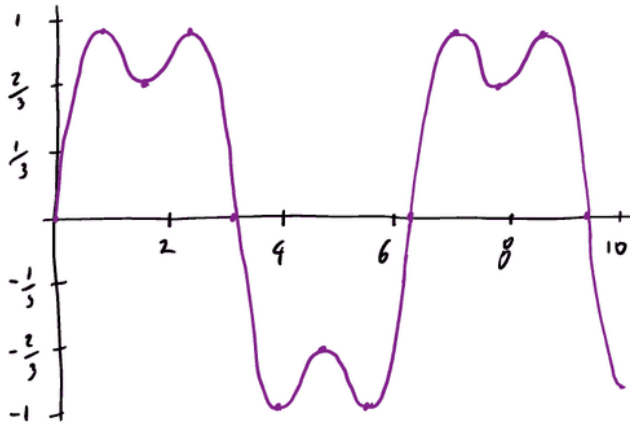
$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

per x compresa fra 0 e 10. Ricorda che, per convenzione, l'argomento della funzione seno è espresso in radianti.

§B.1 Due grafici accettabili

Questo esercizio è facile, ma richiede attenzione. Vediamo intanto due grafici accettabili.

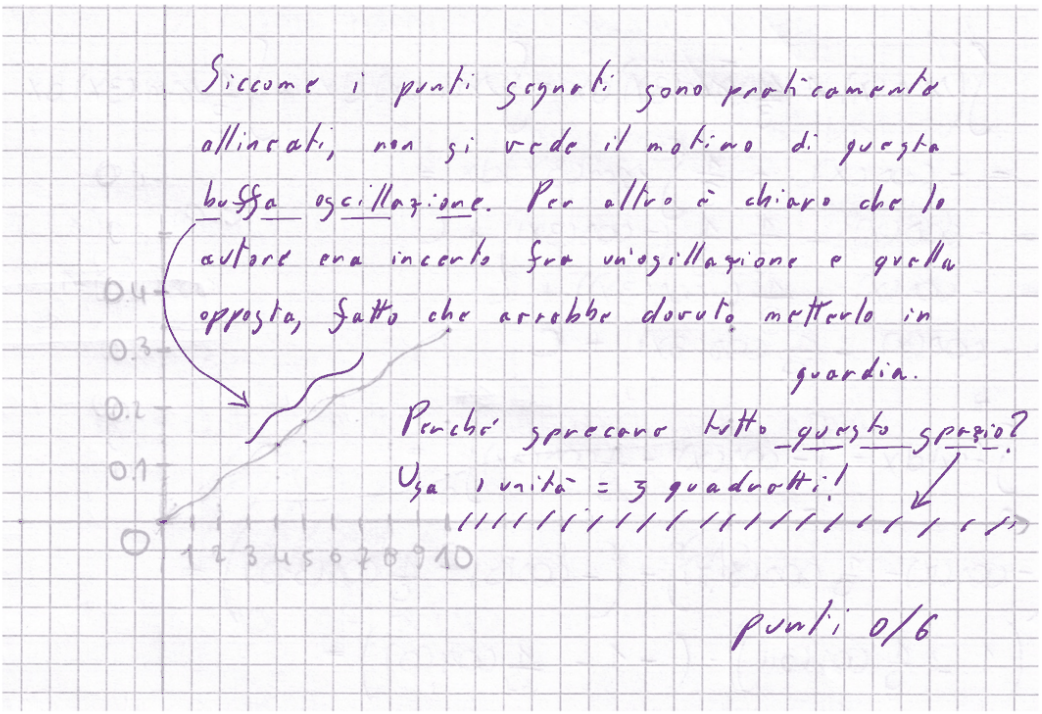




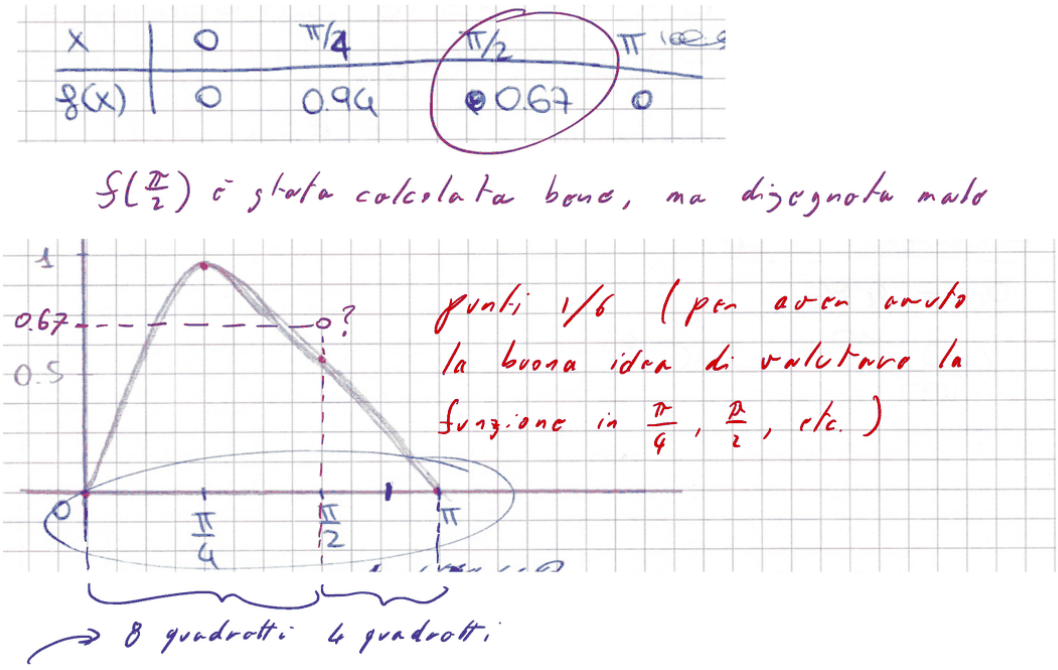
Questo secondo è il minimo necessario per ottenere 6/6 all'esame.

§B.2 Alcuni elaborati insufficienti

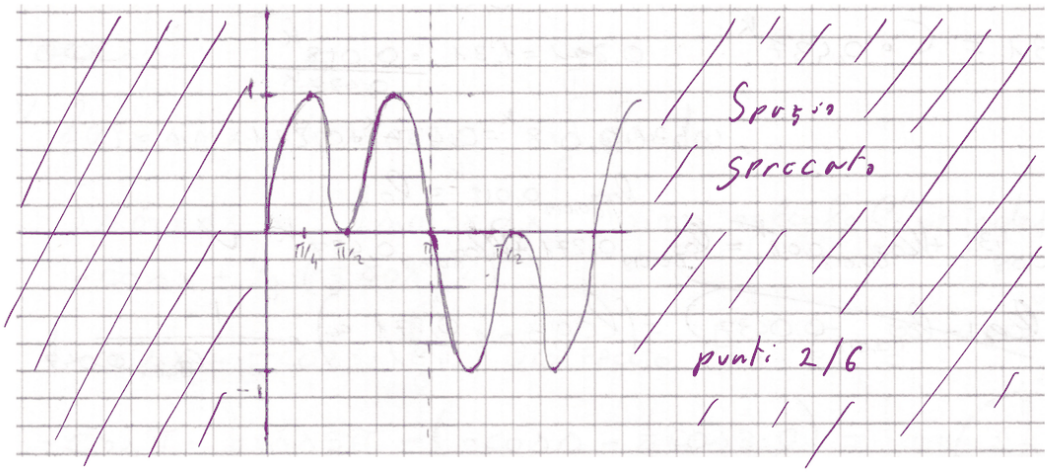
Prima di discutere di come si ottengano i grafici sopra, vediamo alcuni elaborati insufficienti.



L'errore più grave, quello che da solo invalida completamente questo grafico, è che la funzione seno è stata valutata in gradi anziché in radianti — benché la convenzione di esprimere l'argomento delle funzioni trigonometriche in radianti sia stata ricordata anche durante lo svolgimento della prova.

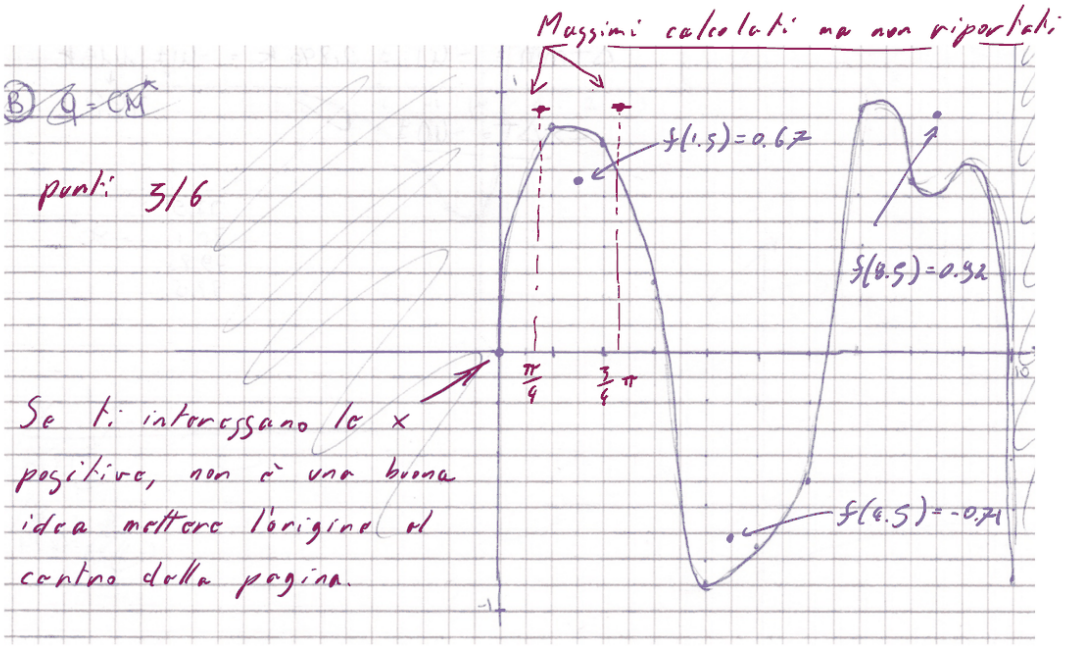


$\frac{\pi}{2}$ non è a metà fra 0 e π! Sembra che l'autore si sia dimenticato dell'esistenza di $\frac{3}{4}\pi$. Il vero guaio di questo grafico, però, è che non prova neanche a rispettare la richiesta: "traccia … per x compresa fra 0 e 10".



L'autore, qui, per sbaglio ha tentato di rappresentare la funzione $\sin(x) + \sin(3x)$ anziché la funzione richiesta. Comunque ci sono dei guai:

- l'intervallo rappresentato non è $[0, 10]$;
- in $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3}{4}\pi$ la funzione $\sin(x) + \sin(3x)$ vale ≈ 1.4 mentre è rappresentato ≈ 1; analogamente in $\frac{5}{4}\pi$ e $\frac{7}{4}\pi$ vale ≈ -1.4 e non -1.



Questo grafico mostra un errore frequente. Il grafico è ragionevolmente bene inquadrato e i punti calcolati sono riportati correttamente. Il guaio è che non rappresenta correttamente l'andamento della funzione, come si può vedere per confronto coi grafici accettabili. Cosa è andato storto? L'autore di questo grafico ha riportato correttamente $f(0), f(1), \ldots, f(10)$, poi ha cercato di collegare questi punti con una linea curva. Tuttavia, probabilmente, non ha provato a calcolare f in qualcuno dei valori intermedi, altrimenti avrebbe notato grandi discrepanze.

Rispondendo *correttamente* ad una domanda successiva, la stessa persona ha calcolato che f ha massimi in $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3}{4}\pi$, e lì vale $\frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0.94$. Dove sono questi punti sul grafico? Non ci crederai, ma nella stessa risposta in cui ha calcolato i massimi, la stessa persona ha disegnato alcuni punti del grafico di f: per $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \pi$, e quelli sono molto precisi, e mostrano chiaramente l'andamento della funzione. Non so perché, poi, non abbia corretto questo grafico.

§B.3 Come si traccia un buon grafico

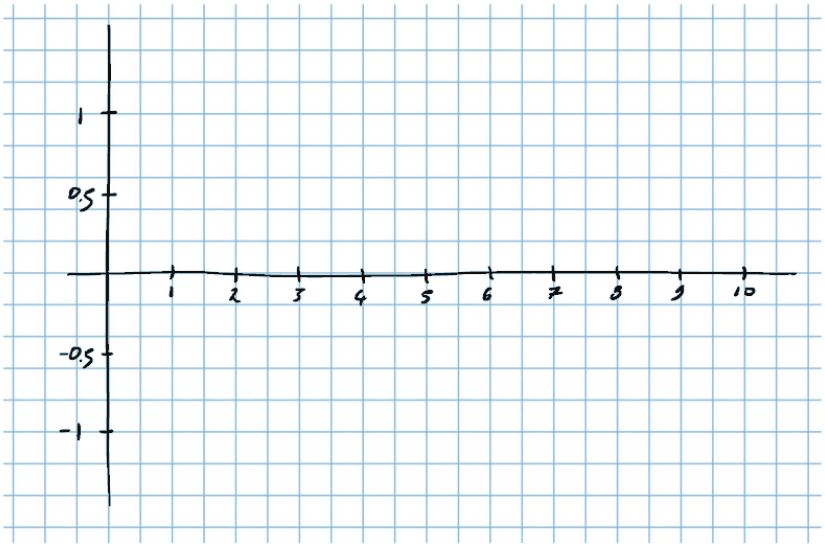
§B.3.1 Predisporre gli assi

- Per l'asse x è facile: va da 0 a 10.
- Per l'asse y, ricordiamo la funzione

$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

  Si tratta di una somma di seni, e il seno oscilla fra -1 e 1, quindi $f(x)$ è compresa fra $-1 - \frac{1}{3}$ e $1 + \frac{1}{3}$. Come prima approssimazione possiamo quindi rappresentare sull'asse delle ordinate l'intervallo $\left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$.
- Ora disponiamo gli assi nello spazio dedicato al disegno. Per esempio, qui sotto ho a disposizione un po' più di 20 quadretti in orizzontale, e un po' più di 15 in

verticale: stabilisco quindi che una unità equivalga a 2 quadretti sull'asse x e a 5 sull'asse y.



§B.3.2 Riportare alcuni valori di f

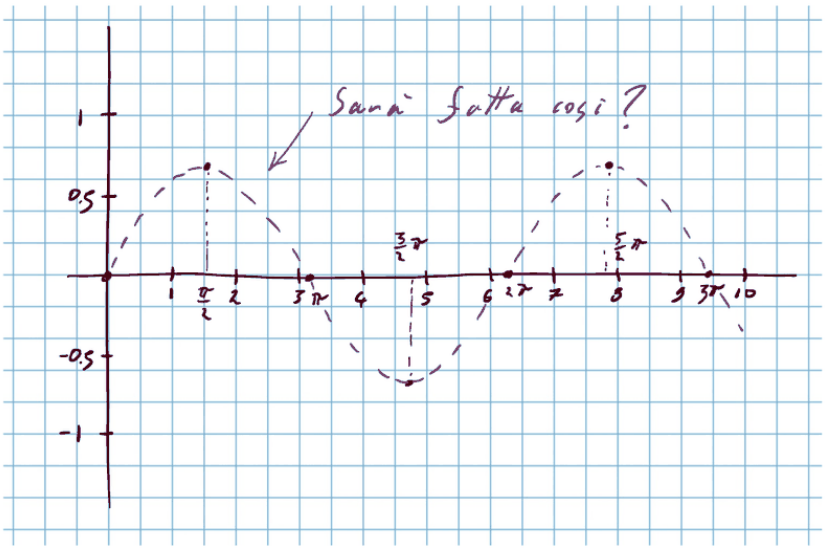
Adesso possiamo procedere in due modi: o sfruttando la nostra conoscenza delle funzioni trigonometriche, o calcolando ciecamente numerosi punti.

Il metodo furbo. Sappiamo che $\sin(x) = 0$ per $x = 0, \pi, 2\pi, \dots$ Quindi

$$f(0) = \sin(0) + \tfrac{1}{3}\sin(0) = 0 \qquad f(\pi) = \sin(\pi) + \tfrac{1}{3}\sin(3\pi) = 0 + \tfrac{1}{3}\cdot 0 = 0$$

e analogamente $f(2\pi) = f(3\pi) = 0$: la funzione si annulla in $0, \pi, 2\pi, 3\pi$. Questo suggerisce di calcolare f in altri multipli e sottomultipli di π; per esempio potremmo iniziare con $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi$:

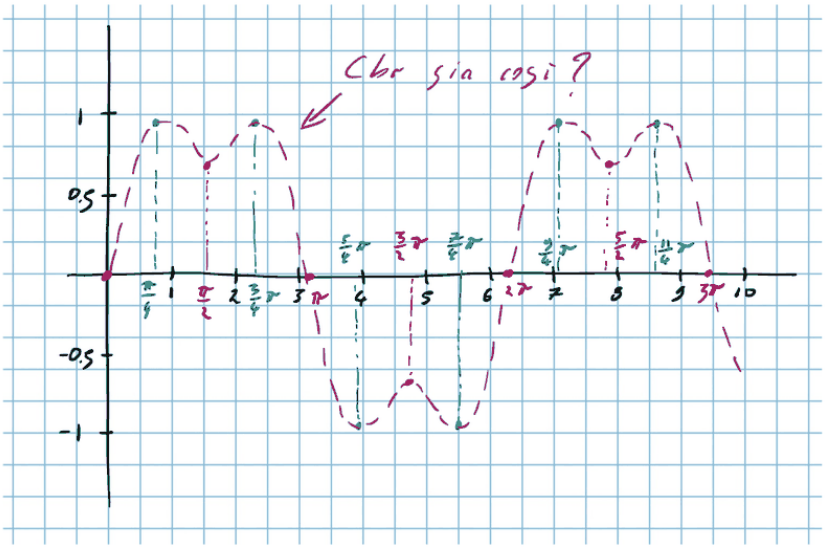
$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{2}{3} \approx 0.67 \qquad f\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = -\tfrac{2}{3} \approx -0.67 \qquad f\left(\tfrac{5}{2}\pi\right) = \tfrac{2}{3} \approx 0.67$$



Per controllare calcoliamo f in qualche punto intermedio, per esempio $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.94$. Se il grafico fosse quello congetturato, allora $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ sarebbe ≈ 0.5: è chiaro che dobbiamo calcolare più punti. Continuiamo con i multipli di $\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{array}{ll} f\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.94 & f\left(\frac{3}{4}\pi\right) \approx 0.94 \\ f\left(\frac{5}{4}\pi\right) \approx -0.94 & f\left(\frac{7}{4}\pi\right) \approx -0.94 \\ f\left(\frac{9}{4}\pi\right) \approx 0.94 & f\left(\frac{11}{4}\pi\right) \approx 0.94 \end{array} \qquad \text{e } \tfrac{13}{4}\pi > 10$$

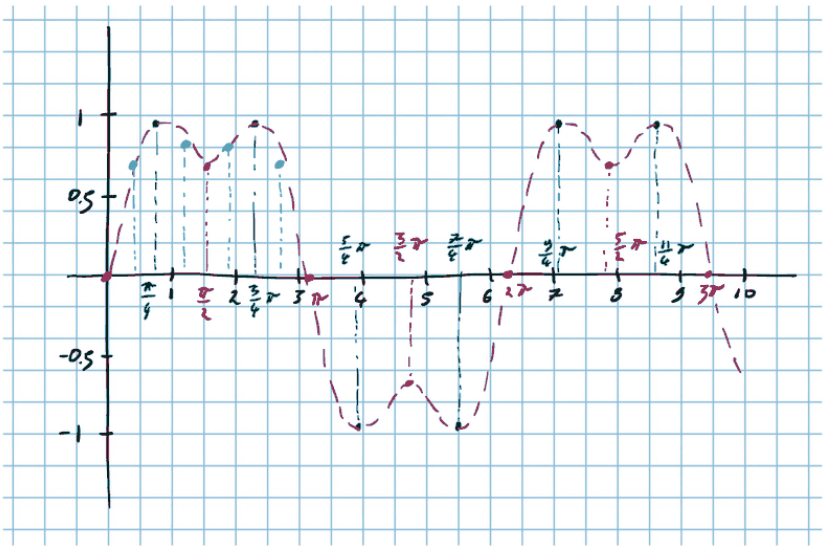
Qui salta all'occhio una certa simmetria!



È ragionevole la nuova congettura? Calcoliamo, per esempio,

$$f\left(\tfrac{\pi}{8}\right) \approx 0.69 \quad f\left(\tfrac{3}{8}\pi\right) \approx 0.80 \quad f\left(\tfrac{5}{8}\pi\right) \approx 0.80 \quad f\left(\tfrac{7}{8}\pi\right) \approx 0.69$$

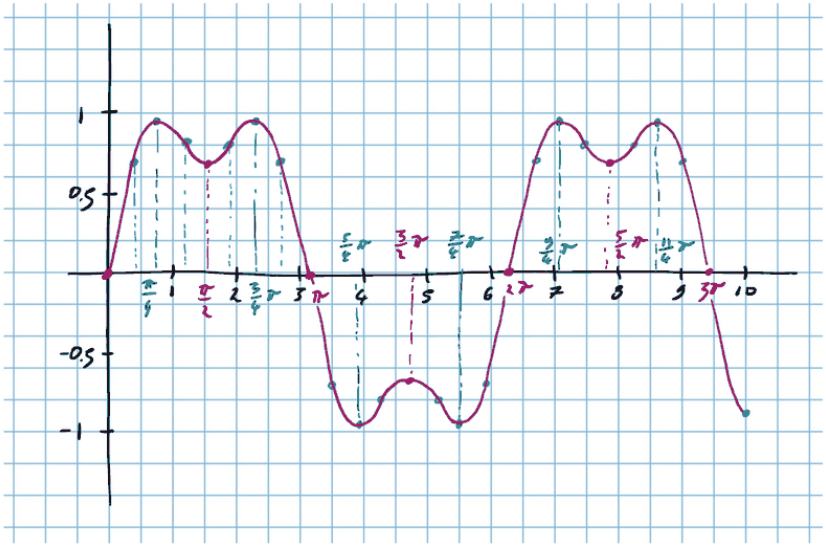
Non sfugge che i valori si ripetono: $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = f\left(\frac{7}{8}\pi\right)$ e $f\left(\frac{3}{8}\pi\right) = f\left(\frac{5}{8}\pi\right)$, come ci aspettiamo dalla simmetria della figura. Riportiamo i nuovi punti.



Sembra che l'andamento suggerito sia confermato. Inoltre ci aspetteremmo di ottenere

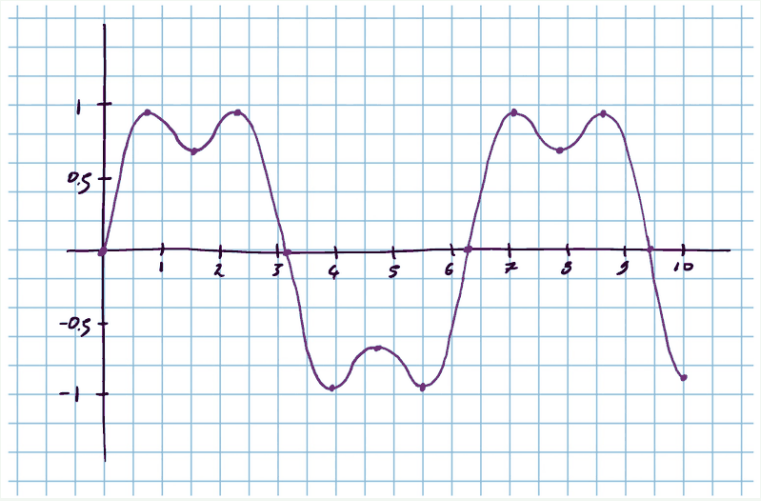
$$f\left(\tfrac{9}{8}\pi\right) \overset{?}{\approx} -0.69 \quad f\left(\tfrac{11}{8}\pi\right) \overset{?}{\approx} -0.80 \quad f\left(\tfrac{13}{8}\pi\right) \overset{?}{\approx} -0.80 \quad \text{ecc.}$$

Basta calcolare uno o due di questi punti per vedere che è proprio così. In definitiva, calcoliamo ancora $f(10) \approx -0.87$ per vedere dove deve terminare il grafico.



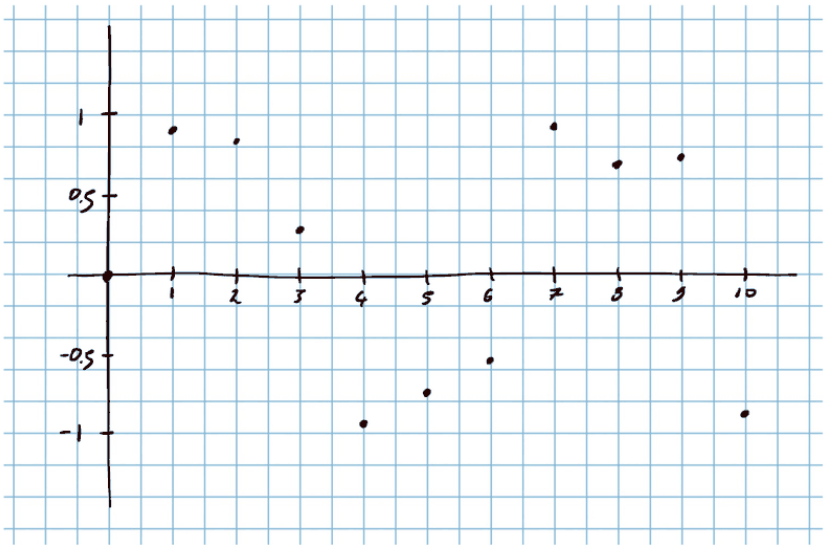
Nota

Chiaramente qui ho indicato i punti $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, ecc. a scopo didattico, ma non è necessario segnarli sul grafico. L'elaborato da presentare potrebbe tranquillamente avere l'aspetto seguente.



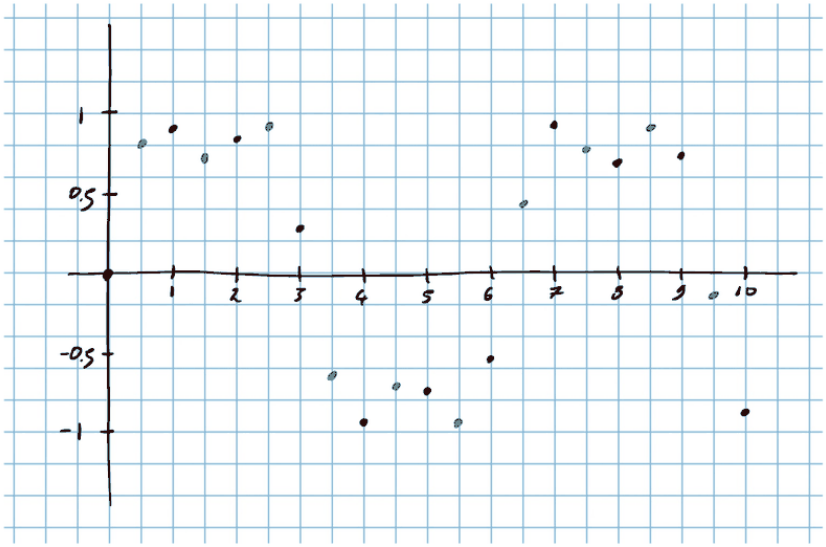
Il metodo cieco. Vediamo ora cosa capita se, anziché ragionare, semplicemente calcoliamo $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ecc.

$f(0) = 0$	$f(1) \approx 0.89$	$f(2) \approx 0.82$	$f(3) \approx 0.28$
$f(4) \approx -0.94$	$f(5) \approx -0.74$	$f(6) \approx -0.53$	$f(7) \approx 0.94$
$f(8) \approx 0.69$	$f(9) \approx 0.73$	$f(10) \approx -0.87$	



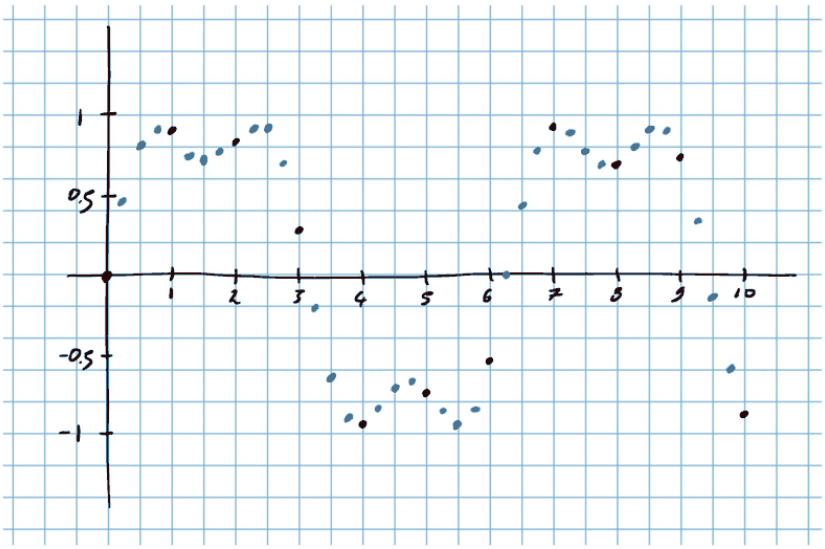
Ora si potrebbero collegare questi punti con una linea ondivaga di qualche tipo, ma è chiaro che vanno su e giù a casaccio, e non se ne deduce alcun andamento affidabile. Occorrono più punti!

$f(0.5) \approx 0.81$	$f(1.5) \approx 0.67$	$f(2.5) \approx 0.91$	$f(3.5) \approx -0.64$
$f(4.5) \approx -0.71$	$f(5.5) \approx -0.94$	$f(6.5) \approx 0.42$	$f(7.5) \approx 0.78$
$f(8.5) \approx 0.92$	$f(9.5) \approx -0.15$		

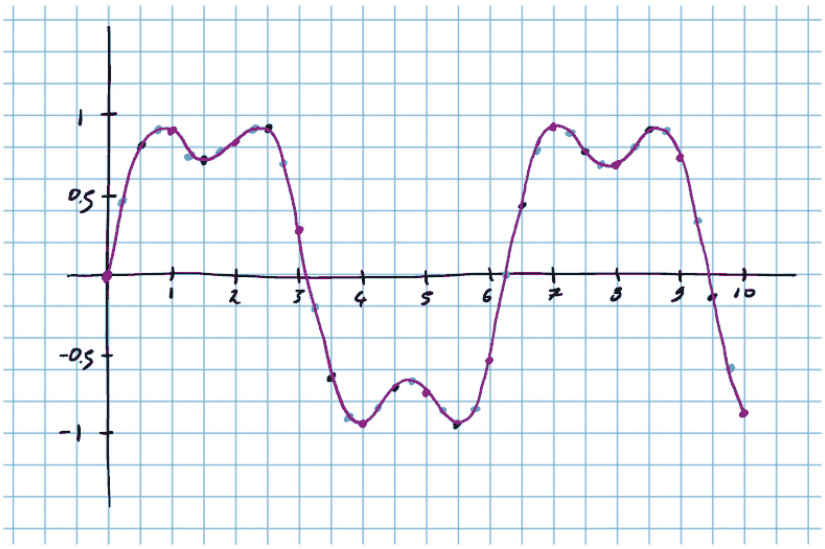


Adesso le cose si capiscono leggermente meglio, però non me la sento ancora di dire che il grafico di f è chiaro. D'altro canto abbiamo scelto di non ragionare: poco da stupirsi che ci tocchi fare dei calcoli!

$f(0.25) \approx 0.47$	$f(0.75) \approx 0.94$	$f(1.25) \approx 0.76$	$f(1.75) \approx 0.70$
$f(2.25) \approx 0.93$	$f(2.75) \approx 0.69$	$f(3.25) \approx -0.21$	$f(3.75) \approx -0.89$
$f(4.25) \approx -0.83$	$f(4.75) \approx -0.67$	$f(5.25) \approx -0.87$	$f(5.75) \approx -0.84$
$f(6.25) \approx -0.07$	$f(6.75) \approx 0.78$	$f(7.25) \approx 0.90$	$f(7.75) \approx 0.68$
$f(8.25) \approx 0.80$	$f(8.75) \approx 0.92$	$f(9.25) \approx 0.34$	$f(9.75) \approx -0.60$



Finalmente la situazione è assolutamente chiara.



> **Nota**
> Non è necessario scrivere queste lunghe tabelle di valori nell'elaborato. I conti sono comunque gravosi, in particolare se non si ha dimestichezza con la calcolatrice (vedi l'appendice A).

Chiaramente il metodo furbo e il metodo cieco non sono alternativi: si possono mescolare in vario modo via via che uno capisce meglio come è fatta f. Né è sempre necessario calcolare tutti i punti intermedi: si inizia da quelli che paiono più critici e si prosegue finché la situazione sul grafico non è chiara.

§B.3.3 I punti stazionari

C'è però un modo di procedere che, in questo caso, è il migliore di tutti: cercare i punti stazionari di f. Dal momento che un esercizio successivo chiede di trovare il massimo di f in $[0, \pi]$, il calcolo dei punti stazionari tornerà comunque utile.

Ricordiamo l'espressione di f,

$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) \qquad \text{quindi} \qquad f'(x) = \cos(x) + \cos(3x)$$

per cui i punti stazionari di f si ottengono da $\cos(3x) = -\cos(x)$. Un modo per risolvere questa equazione è osservare che, in generale, $-\cos(\alpha) = \cos(\alpha + \pi)$, per cui

$$\cos(3x) = \cos(x + \pi)$$

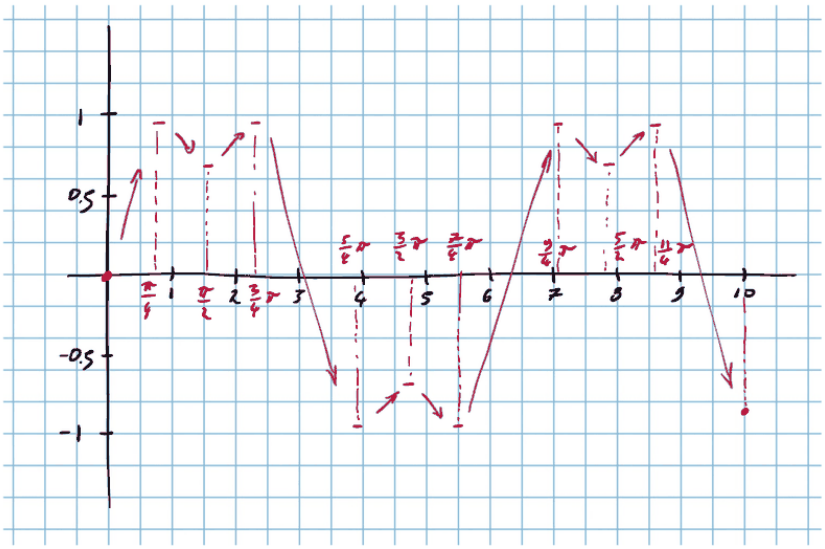
Ora, $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ se e solo se $\alpha = \beta + 2k\pi$ oppure $\alpha = -\beta + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Abbiamo allora due equazioni:

$$3x = x + \pi + 2k\pi \iff x = \pi\frac{2k+1}{2} \iff x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots$$
$$3x = -x - \pi + 2k\pi \iff x = \pi\frac{2k-1}{4} \iff x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \ldots$$

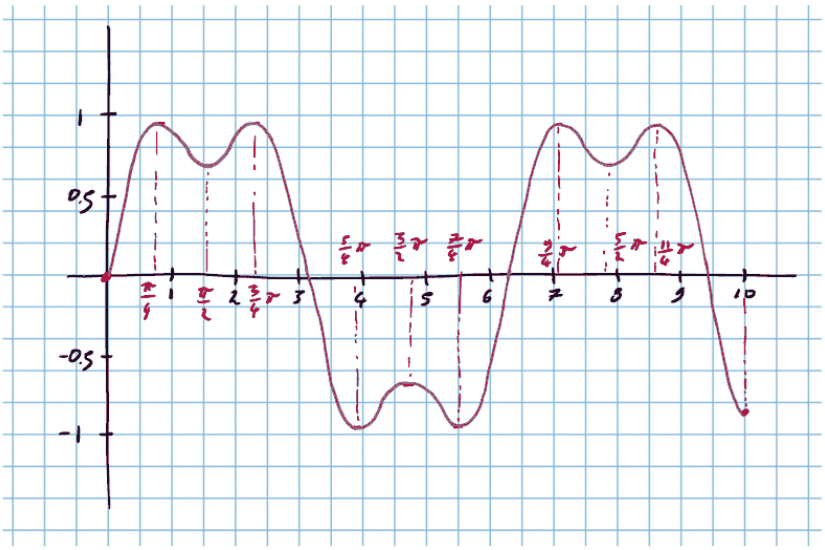
Abbiamo quindi i seguenti punti stazionari fra 0 e 10:

$$\frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{3}{4}\pi \quad \frac{5}{4}\pi \quad \frac{3}{2}\pi \quad \frac{7}{4}\pi \quad \frac{9}{4}\pi \quad \frac{5}{2}\pi \quad \frac{11}{4}\pi$$

e sappiamo che, fra due punti stazionari consecutivi, f può solo crescere o solo decrescere (altrimenti ci sarebbe un terzo punto stazionario in mezzo). Riportando i punti stazionari, $f(0)$ e $f(10)$ sul grafico:

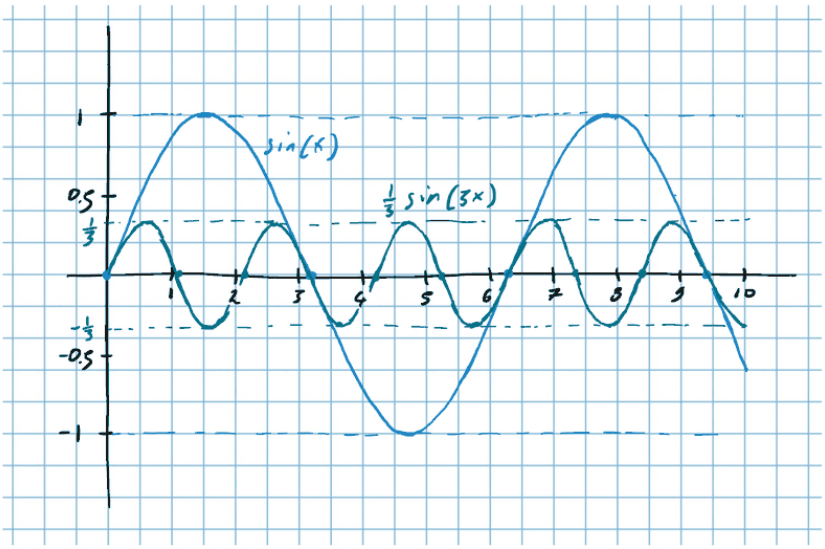


Da cui è chiaro come deve comportarsi f, e possiamo procedere a tracciare la linea.

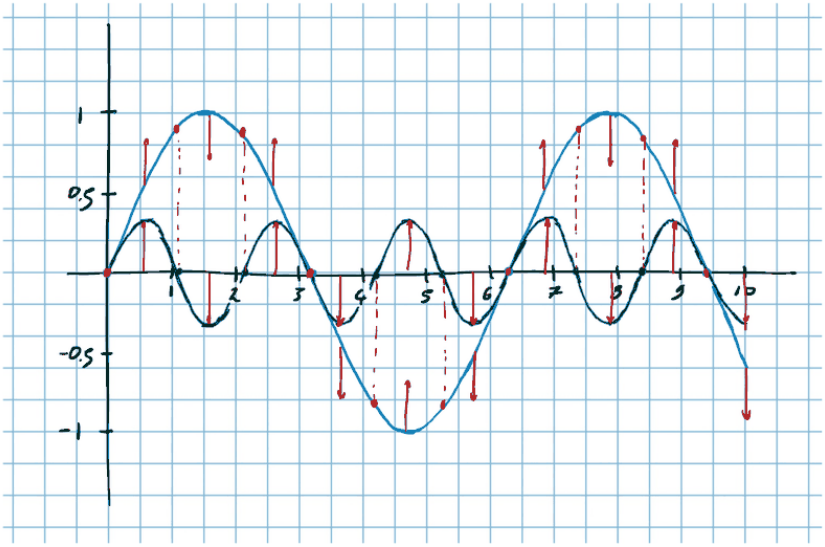


§B.3.4 Un procedimento creativo

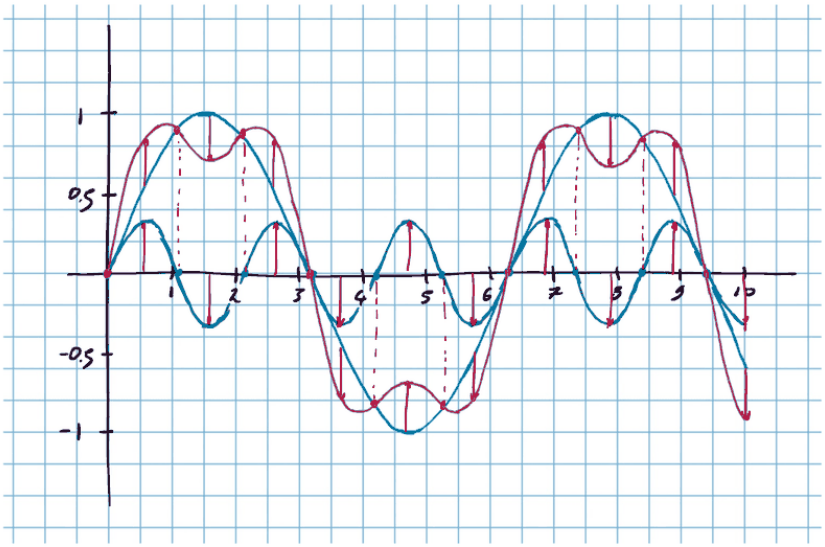
Possiamo sfruttare il fatto che $f(x)$ è la somma di due componenti — $\sin(x)$ e $\frac{1}{3}\sin(3x)$ — e i grafici di queste componenti sono ben noti.



Per ottenere il grafico di f partiamo dal grafico della componente $\sin(x)$ e, per fare la somma, ci spostiamo verticalmente di $\frac{1}{3}\sin(3x)$.



Unendo i punti:

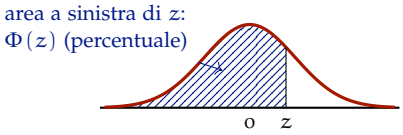


Questo grafico non sarà, probabilmente, molto accurato, però è chiaro che rappresenta correttamente l'andamento di f.

Nota importante
Quest'ultimo procedimento è meno facile di come sembra, e per avere buoni risultati è necessaria una certa esperienza.

§C Tavole statistiche

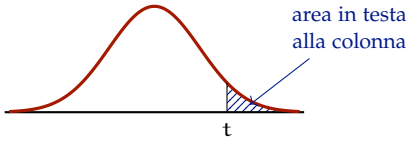
§C.1 La gaussiana standard



z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
−4.00	0.00317	−2.00	2.28	0.00	50.00	2.00	97.72
−3.95	0.00391	−1.95	2.56	0.05	51.99	2.05	97.98
−3.90	0.00481	−1.90	2.87	0.10	53.98	2.10	98.21
−3.85	0.00591	−1.85	3.22	0.15	55.96	2.15	98.42
−3.80	0.00723	−1.80	3.59	0.20	57.93	2.20	98.61
−3.75	0.00884	−1.75	4.01	0.25	59.87	2.25	98.78
−3.70	0.0108	−1.70	4.46	0.30	61.79	2.30	98.93
−3.65	0.0131	−1.65	4.95	0.35	63.68	2.35	99.061
−3.60	0.0159	−1.60	5.48	0.40	65.54	2.40	99.180
−3.55	0.0193	−1.55	6.06	0.45	67.36	2.45	99.286
−3.50	0.0233	−1.50	6.68	0.50	69.15	2.50	99.379
−3.45	0.0280	−1.45	7.35	0.55	70.88	2.55	99.461
−3.40	0.0337	−1.40	8.08	0.60	72.57	2.60	99.534
−3.35	0.0404	−1.35	8.85	0.65	74.22	2.65	99.598
−3.30	0.0483	−1.30	9.68	0.70	75.80	2.70	99.653
−3.25	0.0577	−1.25	10.56	0.75	77.34	2.75	99.702
−3.20	0.0687	−1.20	11.51	0.80	78.81	2.80	99.744
−3.15	0.0816	−1.15	12.51	0.85	80.23	2.85	99.781
−3.10	0.0968	−1.10	13.57	0.90	81.59	2.90	99.813
−3.05	0.114	−1.05	14.69	0.95	82.89	2.95	99.841
−3.00	0.135	−1.00	15.87	1.00	84.13	3.00	99.865
−2.95	0.159	−0.95	17.11	1.05	85.31	3.05	99.886
−2.90	0.187	−0.90	18.41	1.10	86.43	3.10	99.9032
−2.85	0.219	−0.85	19.77	1.15	87.49	3.15	99.9184
−2.80	0.256	−0.80	21.19	1.20	88.49	3.20	99.9313
−2.75	0.298	−0.75	22.66	1.25	89.44	3.25	99.9423
−2.70	0.347	−0.70	24.20	1.30	90.32	3.30	99.9517
−2.65	0.402	−0.65	25.78	1.35	91.15	3.35	99.9596
−2.60	0.466	−0.60	27.43	1.40	91.92	3.40	99.9663
−2.55	0.539	−0.55	29.12	1.45	92.65	3.45	99.9720
−2.50	0.621	−0.50	30.85	1.50	93.32	3.50	99.9767
−2.45	0.714	−0.45	32.64	1.55	93.94	3.55	99.9807
−2.40	0.820	−0.40	34.46	1.60	94.52	3.60	99.9841
−2.35	0.939	−0.35	36.32	1.65	95.05	3.65	99.9869
−2.30	1.07	−0.30	38.21	1.70	95.54	3.70	99.9892
−2.25	1.22	−0.25	40.13	1.75	95.99	3.75	99.99116
−2.20	1.39	−0.20	42.07	1.80	96.41	3.80	99.99277
−2.15	1.58	−0.15	44.04	1.85	96.78	3.85	99.99409
−2.10	1.79	−0.10	46.02	1.90	97.13	3.90	99.99519
−2.05	2.02	−0.05	48.01	1.95	97.44	3.95	99.99609
						4.00	99.99683

§C.2 La t di Student

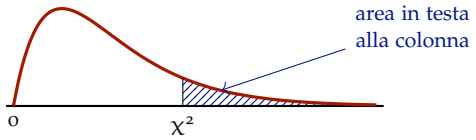
Per ciascun numero di gradi di libertà (riga) e ciascuna probabilità (colonna), la tavola riporta il valore t tale che la t di Student supera t con quella probabilità (area della coda destra). Nella notazione del testo, la colonna $\frac{\alpha}{2}$ e la riga con ν gradi di libertà danno la soglia $t_{\alpha/2,\nu}$ (per il test sulla media di un campione di n individui, $\nu = n - 1$). L'ultima riga, ∞, è la gaussiana standard.



gradi di libertà	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.00	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
2	0.82	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92
3	0.76	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
4	0.74	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60
5	0.73	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03
6	0.72	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
7	0.71	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50
8	0.71	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36
9	0.70	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
10	0.70	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
11	0.70	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11
12	0.70	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05
13	0.69	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01
14	0.69	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98
15	0.69	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95
16	0.69	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92
17	0.69	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90
18	0.69	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88
19	0.69	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86
20	0.69	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85
21	0.69	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83
22	0.69	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82
23	0.69	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81
24	0.68	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80
25	0.68	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79
26	0.68	1.31	1.71	2.06	2.48	2.78
27	0.68	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77
28	0.68	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76
29	0.68	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76
30	0.68	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75
40	0.68	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
60	0.68	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66
120	0.68	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62
∞	0.67	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

§C.3 Il χ^2

Per ciascun numero di gradi di libertà (riga) e ciascuna probabilità (colonna), la tavola riporta il valore di χ^2 che viene superato con quella probabilità (area della coda destra). Nella notazione del testo, la colonna α e la riga con ν gradi di libertà danno la soglia $\chi^2_{\alpha,\nu}$.



gradi di libertà	0.99	0.95	0.90	0.70	0.50	0.30	0.10	0.05	0.01	0.001
1	0.00016	0.0039	0.016	0.15	0.45	1.07	2.71	3.84	6.63	10.83
2	0.020	0.10	0.21	0.71	1.39	2.41	4.61	5.99	9.21	13.82
3	0.11	0.35	0.58	1.42	2.37	3.66	6.25	7.81	11.34	16.27
4	0.30	0.71	1.06	2.19	3.36	4.88	7.78	9.49	13.28	18.47
5	0.55	1.15	1.61	3.00	4.35	6.06	9.24	11.07	15.09	20.52
6	0.87	1.64	2.20	3.83	5.35	7.23	10.64	12.59	16.81	22.46
7	1.24	2.17	2.83	4.67	6.35	8.38	12.02	14.07	18.48	24.32
8	1.65	2.73	3.49	5.53	7.34	9.52	13.36	15.51	20.09	26.12
9	2.09	3.33	4.17	6.39	8.34	10.66	14.68	16.92	21.67	27.88
10	2.56	3.94	4.87	7.27	9.34	11.78	15.99	18.31	23.21	29.59
11	3.05	4.57	5.58	8.15	10.34	12.90	17.28	19.68	24.72	31.26
12	3.57	5.23	6.30	9.03	11.34	14.01	18.55	21.03	26.22	32.91
13	4.11	5.89	7.04	9.93	12.34	15.12	19.81	22.36	27.69	34.53
14	4.66	6.57	7.79	10.82	13.34	16.22	21.06	23.68	29.14	36.12
15	5.23	7.26	8.55	11.72	14.34	17.32	22.31	25.00	30.58	37.70
16	5.81	7.96	9.31	12.62	15.34	18.42	23.54	26.30	32.00	39.25
17	6.41	8.67	10.09	13.53	16.34	19.51	24.77	27.59	33.41	40.79
18	7.01	9.39	10.86	14.44	17.34	20.60	25.99	28.87	34.81	42.31
19	7.63	10.12	11.65	15.35	18.34	21.69	27.20	30.14	36.19	43.82
20	8.26	10.85	12.44	16.27	19.34	22.77	28.41	31.41	37.57	45.31
21	8.90	11.59	13.24	17.18	20.34	23.86	29.62	32.67	38.93	46.80
22	9.54	12.34	14.04	18.10	21.34	24.94	30.81	33.92	40.29	48.27
23	10.20	13.09	14.85	19.02	22.34	26.02	32.01	35.17	41.64	49.73
24	10.86	13.85	15.66	19.94	23.34	27.10	33.20	36.42	42.98	51.18
25	11.52	14.61	16.47	20.87	24.34	28.17	34.38	37.65	44.31	52.62
26	12.20	15.38	17.29	21.79	25.34	29.25	35.56	38.89	45.64	54.05
27	12.88	16.15	18.11	22.72	26.34	30.32	36.74	40.11	46.96	55.48
28	13.56	16.93	18.94	23.65	27.34	31.39	37.92	41.34	48.28	56.89
29	14.26	17.71	19.77	24.58	28.34	32.46	39.09	42.56	49.59	58.30
30	14.95	18.49	20.60	25.51	29.34	33.53	40.26	43.77	50.89	59.70

Parte V
Soluzioni

Test 1 (p. 17)
Risolvi la disequazione $1 + \frac{1}{x} < 0$.

Soluzione. Conviene scrivere il primo membro come una frazione sola:

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

La frazione è negativa quando numeratore e denominatore hanno segni opposti. Il numeratore $x+1$ è positivo per $x > -1$, il denominatore x per $x > 0$, quindi

$$-1 < x < 0$$

(per $x < -1$ sono entrambi negativi e la frazione è positiva; per $x > 0$ sono entrambi positivi).

Test 2 (p. 17)
Risolvi la disequazione $x^2 + 2x > 3$.

Soluzione. Portiamo tutto a primo membro e fattorizziamo:

$$x^2 + 2x - 3 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (x+3)(x-1) > 0$$

(le soluzioni di $x^2 + 2x - 3 = 0$ sono -3 e 1). Un prodotto di due fattori è positivo quando i fattori hanno lo stesso segno: entrambi positivi per $x > 1$, entrambi negativi per $x < -3$. Quindi

$$x < -3 \qquad \text{oppure} \qquad x > 1$$

Nota
La parabola $y = x^2 + 2x - 3$ ha la concavità verso l'alto e taglia l'asse in -3 e 1: sta sopra l'asse fuori dall'intervallo fra le due radici. Con il coefficiente di x^2 positivo, una disequazione > 0 dà sempre l'esterno, una < 0 sempre l'interno.

Test 3 (p. 17)
Scrivi un'equazione di secondo grado le cui soluzioni siano 2 e 7.

Soluzione. Basta osservare che il polinomio $(x-7)(x-2)$ si annulla per $x = 7$ e per $x = 2$, e per nessun altro valore. L'equazione

$$(x-7)(x-2) = 0 \qquad \text{ossia} \qquad x^2 - 9x + 14 = 0$$

ha quindi le soluzioni richieste. (Va bene anche qualunque suo multiplo: $2x^2 - 18x + 28 = 0$ ha le stesse soluzioni.)

Esercizio 4 (p. 18)
Semplifica l'espressione

$$(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2-(a+b+c)^2$$

Soluzione. Sviluppiamo tutti i quadrati:

$$\begin{aligned}
&(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2-(a+b+c)^2 = \\
&\quad = (a^2+2ab+b^2)+(a^2+2ac+c^2)+(b^2+2bc+c^2) \\
&\qquad -(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) \\
&\quad = \cancel{a^2}+\cancel{2ab}+\cancel{b^2}+a^2+\cancel{2ac}+\cancel{c^2}+b^2+\cancel{2bc}+c^2 \\
&\qquad -\cancel{a^2}-\cancel{b^2}-\cancel{c^2}-\cancel{2ab}-\cancel{2ac}-\cancel{2bc} \\
&\quad = a^2+b^2+c^2
\end{aligned}$$

Nota importante
Per controllare di non aver commesso errori conviene verificare il risultato con qualche sostituzione facile. Per esempio $a=b=c=1$ dà

$$2^2+2^2+2^2-3^2 = 1^2+1^2+1^2 \qquad \text{OK}$$

e $a=b=1$, $c=-1$ dà

$$2^2+0^2+0^2-1^2 = 1^2+1^2+1^2 \qquad \text{OK}$$

Due sostituzioni non fanno una dimostrazione, ma, se il conto fosse sbagliato, sarebbe molto probabile che almeno una delle due non tornasse.

Esercizio 5 (p. 18)
Semplifica l'espressione

$$(x+1)^3-\big((x+3)x+3\big)x$$

Soluzione. Conviene sviluppare separatamente i due addendi. Il primo è il cubo di un binomio; nel secondo si comincia dalla parentesi più interna:

$$(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$$
$$\big((x+3)x+3\big)x = (x^2+3x+3)x = x^3+3x^2+3x$$

La differenza è quindi

$$(x^3+3x^2+3x+1)-(x^3+3x^2+3x) = 1$$

Il risultato non dipende da x: si tratta di un'espressione costante. Come nell'esercizio precedente, conviene verificare sostituendo un numero qualunque, per esempio $x=2$:

$$3^3-(5\cdot 2+3)\cdot 2 = 27-26 = 1 \qquad \text{OK}$$

Esercizio 6 (p. 18)
Risolvi l'equazione

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3x^2+4x+1}$$

Soluzione. In questa equazione sono presenti dei denominatori, bisognerà quindi gestire il fatto che i due membri dell'equazione non sono definiti (vale a dire non hanno senso, non sono numeri) quando un denominatore si annulla. Provvisoriamente, ignoriamo questa difficoltà, e procediamo a risolvere l'equazione come se fosse ben definita per ogni valore della x.

Potremmo avere la tentazione di portare tutte le frazioni allo stesso membro

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3x^2+4x+1} = 0$$

e poi ridurle a comun denominatore, però il calcolo si prospetta complicato. Forse, conviene separare le due frazioni più semplici dalla terza:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3x^2+4x+1}$$
$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{3x^2+4x+1}$$

Eseguendo la medesima operazione su cose uguali si ottengono cose uguali: invertiamo ambo i membri.

$$x^2+x = 3x^2+4x+1$$
$$2x^2+3x+1 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

Ora abbiamo ottenuto le soluzioni $-\frac{1}{2}$ e -1, però dobbiamo assicurarci che l'equazione sia ben definita per questi valori di x. Possiamo procedere sostituendo i valori -1 e $-\frac{1}{2}$ nei denominatori; così scopriamo che $x+1$ si annulla in $x=-1$, mentre nessuno dei denominatori si annulla in $x=-\frac{1}{2}$, quindi

$$x = -\tfrac{1}{2}$$

è l'unica soluzione accettabile.

In alternativa, possiamo risolvere le equazioni $x=0$, $x+1=0$, $3x^2+4x+1=0$, quindi escluderemo quelle fra -1 e $-\frac{1}{2}$ che sono anche soluzioni di una di queste equazioni.

Esercizio 7 (p. 18)
Risolvi l'equazione

$$(x+1)^4 + (x-1)^4 - 2x^4 = 10x$$

Soluzione. Sviluppiamo le due potenze quarte. I termini di grado dispari hanno segni opposti nei due sviluppi e si cancellano:

$$\begin{aligned}(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) - 2x^4 &= 10x \\ 12x^2 + 2 &= 10x \\ 6x^2 - 5x + 1 &= 0\end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio si sono divisi ambo i membri per 2). Resta un'equazione di secondo grado, che si fattorizza:

$$6x^2 - 5x + 1 = (3x-1)(2x-1) = 0$$

Un prodotto è nullo quando lo è uno dei fattori, quindi

$$x = \frac{1}{3} \qquad \text{oppure} \qquad x = \frac{1}{2}$$

Nota importante
Conviene sempre controllare le soluzioni sostituendole nell'equazione di partenza. Per $x = \frac{1}{3}$:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 + \left(-\frac{2}{3}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} + \frac{16}{81} - \frac{2}{81} = \frac{270}{81} = \frac{10}{3} = 10 \cdot \frac{1}{3} \qquad \text{OK}$$

Esercizio 8 (p. 18)
Risolvi l'equazione

$$x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Soluzione. Osserviamo intanto che $x = 0$ non può essere una soluzione, perché sostituendolo si otterrebbe una divisione per zero, che non ha senso. Possiamo quindi assumere $x \neq 0$ e, siccome x non è nulla, moltiplicare ambo i membri per x^2 ottenendo un'equazione equivalente:

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{x}\right)x^2 &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)x^2 \\ x^3 + x &= x^4 + 1 \\ x^4 - x^3 - x + 1 &= 0\end{aligned}$$

Raccogliamo a due a due:

$$x^4 - x^3 - x + 1 = x^3(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^3-1) = (x-1)(x-1)(x^2+x+1)$$

Il fattore $x^2 + x + 1$ non si annulla mai, perché il suo discriminante

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

è negativo. L'unica soluzione è quindi

$$x = 1$$

(e in $x = 1$ l'equazione di partenza diventa $1 + 1 = 1 + 1$: la verifica è immediata).

Esercizio 9 (p. 18)
Risolvi la disequazione

$$x^4 < x^3 + 2x^2$$

Soluzione. Troviamo i valori critici risolvendo l'equazione corrispondente:

$$\begin{aligned} x^4 &= x^3 + 2x^2 \\ x^4 - x^3 - 2x^2 &= 0 \\ x^2(x+1)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

I valori critici sono dunque -1, 0 e 2. Restano da esaminare quei tre valori e i quattro intervalli in cui dividono la retta; in ciascun intervallo scegliamo un numero qualunque, per esempio -10, -0.1, 1 e 10.

INTERVALLO	PROVA	
$x < -1$	$10\,000 \not< -1\,000 + 2 \cdot 100$	✗
$-1 < x < 0$	$0.0001 < -0.001 + 2 \cdot 0.01$	✓
$0 < x < 2$	$1 < 1 + 2$	✓
$2 < x$	$10\,000 \not< 1\,000 + 2 \cdot 100$	✗

Nei tre valori critici la disequazione non è soddisfatta, perché lì i due membri sono uguali e il segno è stretto. In conclusione

$$-1 < x < 0 \qquad \text{oppure} \qquad 0 < x < 2$$

(attenzione: lo zero è escluso, quindi la soluzione *non* si scrive $-1 < x < 2$).

Esercizio 10 (p. 18)
Risolvi la disequazione

$$\frac{2}{x} \leqslant x + 1$$

Soluzione. Procediamo come nell'esercizio precedente, con un'avvertenza: siccome compare un denominatore, fra i valori critici vanno inclusi non solo le soluzioni dell'equazione, ma anche gli zeri del denominatore — qui il solo $x = 0$.

L'equazione corrispondente è

$$\frac{2}{x} = x + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 2 = x^2 + x \qquad \Longrightarrow \qquad (x+2)(x-1) = 0$$

(si è moltiplicato per x, lecito perché $x \neq 0$), quindi le soluzioni sono -2 e 1. I valori critici sono dunque -2, 0 e 1, e gli intervalli da esaminare quattro; proviamo con -10, -1, 0.1 e 10.

INTERVALLO	PROVA	
$x < -2$	$-0.2 \nleqslant -9$	✗
$-2 < x < 0$	$-2 \leqslant 0$	✓
$0 < x < 1$	$20 \nleqslant 1.1$	✗
$1 < x$	$0.2 \leqslant 11$	✓

In $x = -2$ e in $x = 1$ la disequazione è soddisfatta, perché la diseguaglianza è larga; in $x = 0$ non ha senso, perché si annulla il denominatore. In conclusione

$$-2 \leqslant x < 0 \qquad \text{oppure} \qquad 1 \leqslant x$$

Nota importante
Attenzione ai segni: $\leqslant$ in corrispondenza delle soluzioni -2 e 1, ma $<$ in corrispondenza del punto $x = 0$, dove si annulla il denominatore e la disequazione non è nemmeno definita.

Test 11 (p. 23)
A che percentuale corrisponde la frazione $\frac{7}{20}$?

Soluzione. Una percentuale è una frazione con denominatore 100. Siccome $20 \cdot 5 = 100$, basta moltiplicare numeratore e denominatore per 5:

$$\frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{35}{100} = 35\%$$

(in alternativa si divide: $7 \div 20 = 0.35$, e si sposta la virgola di due posti).

Test 12 (p. 23)
Calcola 40 aumentato del 15%.

Soluzione. Aumentare del 15% significa moltiplicare per $1 + \frac{15}{100} = 1.15$:

$$40 \cdot 1.15 = 46$$

(a mente: il 10% di 40 è 4, il 5% è la metà, cioè 2; in tutto $40 + 4 + 2 = 46$).

Esercizio 13 (p. 23)
In un collegio per studenti ci sono camere doppie e camere singole. Le doppie sono il doppio delle singole, il 10% delle doppie è al pian terreno, e il 20% delle singole è al pian terreno.

1. Quale percentuale delle camere del pian terreno è costituita da doppie?
2. Che percentuale degli studenti che abitano al pian terreno è in singola?
3. Le camere doppie non sono mai abitate da due studenti di sessi opposti. Inoltre, metà del totale delle camere è abitata da studentesse, e l'altra metà da studenti maschi. Diciamo che l'x% delle camere doppie è abitato da

> studentesse, e l'y% delle studentesse è in doppia. Che relazione (che formula) lega x e y?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Abbiamo due distinzioni: SINGOLA–DOPPIA e TERRENO–ALTO.

	singola	doppia
alto	AS	AD
terreno	TS	TD

$$\begin{aligned} \text{AS} &= \text{frazione di SINGOLE in ALTO} \\ \text{AD} &= \text{" DOPPIE in ALTO} \\ \text{TS} &= \text{" SINGOLE al p. TERRENO} \\ \text{TD} &= \text{" DOPPIE al p. TERRENO} \end{aligned}$$

Il testo dice che la colonna $\text{AD} + \text{TD}$ è il doppio di $\text{AS} + \text{TS}$. Scrivendo $\text{D} = \text{AD} + \text{TD}$ e $\text{S} = \text{AS} + \text{TS}$ abbiamo:

$$\begin{cases} \text{D} = 2\text{S} \\ \text{D} + \text{S} = 1 \end{cases} \implies \qquad \text{S} = \frac{1}{3} \qquad \text{D} = \frac{2}{3}$$

Inoltre il 10% delle doppie è al pian terreno

$$\text{TD} : \text{D} = 10 : 100 \qquad \implies \qquad \text{TD} = \frac{2}{30}$$

e il 20% delle singole è al pian terreno

$$\text{TS} : \text{S} = 20 : 100 \qquad \implies \qquad \text{TS} = \frac{2}{30}$$

È quindi facile completare la tabella:

	singola	doppia
alto	$\frac{8}{30}$	$\frac{18}{30}$
terreno	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$

La percentuale richiesta è definita da

$$\text{totale} = \text{TS} + \text{TD} = \frac{4}{30} \qquad \text{parte} = \text{TD} = \frac{2}{30}$$

La risposta è quindi 50%. □

Soluzione della domanda 2. Per rispondere a questa domanda, prestiamo attenzione al fatto che si parla di studenti e non di camere. Le camere singole sono abitate da uno studente, e le doppie da due. Se denotiamo con C il numero totale delle camere, vediamo che

$$\begin{aligned} \text{st. al p. terreno in SINGOLA} &= \text{C} \cdot \text{TS} \cdot 1 = \text{C} \cdot \tfrac{2}{30} \\ \text{st. al p. terreno in DOPPIA} &= \text{C} \cdot \text{TD} \cdot 2 = \text{C} \cdot \tfrac{4}{30} \end{aligned}$$

Quindi

$$\text{st. al p. terreno totali} = C \cdot TS \cdot 3 = C \cdot \tfrac{6}{30}$$

Da cui si ricava la percentuale richiesta

$$\frac{\text{st. al p. terreno in singola}}{\text{st. al p. terreno totali}} = \frac{\cancel{C} \cdot \frac{2}{30}}{\cancel{C} \cdot \frac{6}{30}} = \frac{2}{6} \approx 33\%$$

□

Soluzione della domanda 3. Ora il totale delle camere si divide lungo due nuovi assi: MASCHILE–FEMMINILE e SINGOLA–DOPPIA.

	singole	doppie	
femminili	SF	DF	$\frac{1}{2}$
maschili	SM	DM	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

SF = fraz. di singole femminili sul tot.
DF = " doppie femminili "
SM = " singole maschili "
DM = " doppie maschili "

I totali di colonna $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ sono quelli calcolati alla domanda 1.

Il testo ci dice che

$$x : 100 = DF : \underbrace{(DM + DF)}_{=\frac{2}{3}}$$

quindi

$$DF = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{100}$$

Per quanto riguarda y, indicando di nuovo con C il totale delle camere, abbiamo

$$\text{num. studentesse in doppia} = C \cdot DF \cdot 2$$
$$\text{num. studentesse} = C \cdot DF \cdot 2 + C \cdot SF = C \cdot (DF \cdot 2 + SF)$$

$$y : 100 = \cancel{C} \cdot DF \cdot 2 : \cancel{C} \cdot (DF \cdot 2 + SF) \qquad \Longrightarrow \qquad y = 100 \cdot \frac{DF \cdot 2}{DF \cdot 2 + SF}$$

Il nostro scopo è capire come si calcola y a partire da x. Ora sappiamo andare da x a DF, ma per poi ottenere y vediamo che serve anche SF. Occorre quindi un modo per calcolare SF o direttamente da x, o da DF. Per fortuna sappiamo che metà delle camere sono femminili:

$$SF + DF = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad SF = \frac{1}{2} - DF$$

Mettendo tutto insieme otteniamo

$$y = 100 \cdot \frac{DF \cdot 2}{DF \cdot 2 + SF} = 100 \cdot \frac{DF \cdot 2}{DF \cdot 2 + \frac{1}{2} - DF} = \cancel{100} \cdot \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{\cancel{100}} \cdot 2}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{100}} = \frac{8x}{3 + 4 \cdot \frac{x}{100}}$$

□

Nota importante
Per verificare i calcoli possiamo risolvere separatamente un caso particolare dell'esercizio, e controllare che, in questo caso almeno, la formula funzioni. Immaginiamo, per esempio, che tutte le studentesse siano in doppia: dovrà quindi venirci $y = 100$. La situazione è questa:

	singole	doppie	
femminili	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
maschili	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

Quindi

$$\frac{\text{DF}}{\text{tot. doppie}} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$$

ossia i $\frac{3}{4}$ delle doppie sono femminili, e $x = 75$. Se non abbiamo sbagliato, mettendo $x = 75$ nella nostra formula, dovremmo ottenere $y = 100$. Proviamo:

$$y = \frac{8x}{3 + 4\frac{x}{100}} = \frac{8 \cdot 75}{3 + 4 \cdot \frac{75}{100}} = \frac{600}{3 + \frac{300}{100}} = 100 \qquad \text{OK}$$

Esercizio 14 (p. 23)
A e B sono due elementi capaci di formare tanto il composto A_2B_3 quanto il composto AB_3. Se 0.20 mol di A_2B_3 corrispondono a una massa di 30.4 g, e 0.20 mol di AB_3 corrispondono a una massa di 20.0 g, quali sono le masse atomiche degli elementi A e B?

Soluzione. Scriviamo i due dati:

$$0.20\,\text{mol}\ A_2B_3 = 30.4\,\text{g}$$
$$0.20\,\text{mol}\ AB_3 = 20.0\,\text{g}$$

La differenza fra le due righe elimina la parte B_3, perché in entrambe ce n'è la medesima quantità:

$$0.20\,\text{mol}\ A = 30.4\,\text{g} - 20.0\,\text{g} = 10.4\,\text{g}$$

e, sostituendo nella seconda riga,

$$0.20\,\text{mol}\ B_3 = 20.0\,\text{g} - 10.4\,\text{g} = 9.6\,\text{g}$$

Ma 0.20 mol di B_3 contengono tre volte tanto ossia 0.60 mol di atomi di B. Le masse atomiche sono quindi

$$\text{A}: \quad \frac{10.4\,\text{g}}{0.20\,\text{mol}} = 52\,\frac{\text{g}}{\text{mol}} \qquad \text{B}: \quad \frac{9.6\,\text{g}}{0.60\,\text{mol}} = 16\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

Nota importante
Sulla tavola periodica si riconoscono il cromo (52.00 g/mol) e l'ossigeno (16.00 g/mol): i due composti sono l'ossido cromico Cr_2O_3 e il triossido di cromo CrO_3. Ritrovare due elementi esistenti è la verifica che il conto è giusto.

Esercizio 15 (p. 23)
Un certo elemento M forma un bromuro di formula MBr_3. Nel bromuro, il bromo è presente per l'82.17% in peso. Determina la massa atomica dell'elemento M, sapendo che quella del bromo è 79.90 g/mol.

Soluzione. Consideriamo una mole di bromuro: contiene una mole di atomi di M e tre moli di atomi di bromo, cioè $3 \cdot 79.90\,\mathrm{g} = 239.70\,\mathrm{g}$ di bromo. Se il bromo è l'82.17% del peso, M è il restante $100\% - 82.17\% = 17.83\%$, e le masse stanno nella stessa proporzione delle percentuali:

$$x : 239.70\,\mathrm{g} = 17.83 : 82.17$$

da cui

$$x = 239.70\,\mathrm{g} \cdot \frac{17.83}{82.17} = 52.01\,\mathrm{g}$$

Questa è la massa di una mole di atomi di M, quindi la massa atomica di M è circa 52.0 g/mol.

Sulla tavola periodica è il cromo (52.00 g/mol): il composto è il bromuro di cromo(III), $CrBr_3$.

Esercizio 16 (p. 23)
Un minerale contiene il 17% in peso di FeS_2 (pirite). Calcola la massa in grammi di minerale che contiene 135 g di ferro. Masse atomiche: ferro 55.85 g/mol, zolfo 32.06 g/mol.

Soluzione. Una mole di FeS_2 pesa

$$55.85\,\mathrm{g} + 2 \cdot 32.06\,\mathrm{g} = 119.97\,\mathrm{g}$$

e contiene 55.85 g di ferro. Nella pirite, quindi, massa di ferro e massa di pirite stanno sempre nella proporzione 55.85 : 119.97. La massa y di pirite che contiene 135 g di ferro è data da

$$135\,\mathrm{g} : y = 55.85 : 119.97 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 135\,\mathrm{g} \cdot \frac{119.97}{55.85} = 290.0\,\mathrm{g}$$

La pirite è il 17% del minerale, quindi la massa z di minerale è data da

$$290.0\,\mathrm{g} : z = 17 : 100 \qquad \Longrightarrow \qquad z = 290.0\,\mathrm{g} \cdot \frac{100}{17} = 1706\,\mathrm{g}$$

cioè circa 1.7 kg.

Il dato del 17% ha solo due cifre significative (capitolo 7), per cui un risultato onesto è "circa 1.7 kg" — d'altro canto, sembra irrealistico che la frazione di pirite in un minerale sia costante con quattro cifre di precisione. Il libro da cui è tratto l'esercizio riporta 1704 g, che è quello che si ottiene arrotondando la massa atomica dello zolfo a 32.00 g/mol.

Test 17 (p. 27)
Calcola in notazione scientifica $1.10 \cdot 10^4 - 1.4 \cdot 10^3$.

Soluzione. Per sommare o sottrarre conviene portare i due numeri allo stesso esponente, scegliendo il più grande dei due:

$$1.4 \cdot 10^3 = 0.14 \cdot 10^4$$

A questo punto

$$1.10 \cdot 10^4 - 0.14 \cdot 10^4 = (1.10 - 0.14) \cdot 10^4 = 0.96 \cdot 10^4 = 9.6 \cdot 10^3$$

(nell'ultimo passaggio si rimette la mantissa fra 1 e 10).

Test 18 (p. 27)
Calcola $\sqrt{4.9 \cdot 10^{-5}}$ scrivendo il risultato in notazione scientifica.

Soluzione. La radice quadrata di una potenza di dieci si calcola facilmente se l'esponente è pari. Riscriviamo quindi il numero spostando una unità dall'esponente alla mantissa:

$$4.9 \cdot 10^{-5} = 49 \cdot 10^{-6}$$

Ora

$$\sqrt{49 \cdot 10^{-6}} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{10^{-6}} = 7 \cdot 10^{-3}$$

Esercizio 19 (p. 29)
Semplifica $(x+y)^3 - (x-y)^3$. La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned}(x+y)^3 - (x-y)^3 &= \big((x+y)-(x-y)\big)\big((x+y)^2 + (x+y)(x-y) + (x-y)^2\big) \\ &= 2y(x^2 + y^2 + 2xy + x^2 - y^2 + x^2 + y^2 - 2xy) \\ &= 2y(2x^2 + y^2) \\ &= 4x^2y + 2y^3\end{aligned}$$

Soluzione. Sbagliata. Ce ne accorgiamo subito provando l'espressione con dei valori concreti, per esempio, prendendo $x = y = 1$ otteniamo

$$(1+1)^3 - (1-1)^3 = 8 \qquad \text{mentre} \qquad 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6$$

L'errore è nel terzo passaggio. Dentro la parentesi i termini x^2 sono tre, non due:

$$x^2 + y^2 + \cancel{2xy} + x^2 - \cancel{y^2} + x^2 + \cancel{y^2} - \cancel{2xy} = 3x^2 + y^2$$

quindi

$$(x+y)^3 - (x-y)^3 = 2y(3x^2 + y^2) = 6x^2y + 2y^3$$

(e con $x = y = 1$ viene $6 + 2 = 8$: ora torna).

Esercizio 20 (p. 30)
Se una spuma scontata del 20% costa la metà di un etto di cecina, al prezzo di un chilo di cecina quante spume compro senza sconti? La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA Mezzo etto di cecina costa quanto 0.8 spume, quindi un chilo di cecina, che sono venti *mezzi etti*, costa quanto $20 \cdot 0.8$ spume, ossia 16 spume.

Soluzione. Giusta. Una spuma scontata del 20% costa 0.8 volte una spuma a prezzo pieno, e costa quanto mezzo etto di cecina. Un chilo sono 10 etti, cioè 20 mezzi etti, quindi

$$1\,\text{kg di cecina} = 20 \cdot 0.8 \text{ spume} = 16 \text{ spume}$$

Esercizio 21 (p. 30)
Risolvi l'equazione $(x+2)^2 + x = 0$. La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned} (x+2)^2 + x &= 0 \\ x^2 + 2x + 4 + x &= 0 \\ x^2 + 3x + 4 &= 0 \\ \Delta = 9 - 16 &< 0 \end{aligned}$$

quindi l'equazione non ha soluzioni.

Soluzione. Sbagliata. Senza rifare il conto si vede che l'equazione *deve* avere soluzioni: il primo membro cambia segno fra $x = -2$ e $x = 0$,

$$(-2+2)^2 + (-2) = -2 \text{ negativo} \qquad (0+2)^2 + 0 = 4 \text{ positivo}$$

quindi, mentre x va da -2 a 0, il suo valore deve passare per zero.

L'errore è nel quadrato del binomio: $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$, non $x^2 + 2x + 4$. Rifacendo il conto:

$$x^2 + 5x + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+1)(x+4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -1 \text{ oppure } x = -4$$

(e infatti -1 sta fra -2 e 0, come avevamo previsto).

Esercizio 22 (p. 30)
Briga e Magonza si trovano a 500 km *di distanza. Un brigante parte da Briga a mezzogiorno e viaggia verso Magonza ai* 160 km/h. *Un mago parte da Magonza all'una in punto e viaggia verso Briga ai* 180 km/h. *A che ora si incontrano?* La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA All'una il brigante ha percorso 160 km, quindi restano altri 340 km di separazione fra i due personaggi. Ora, entrambi sono in moto, e si avvicinano alla velocità combinata di $(160 + 180)$ km/h, ossia 340 km/h. I due personaggi impiegano quindi un'ora per incontrarsi e, di conseguenza, si

incontrano alle due.

Soluzione. Giusta: si incontrano alle due. Per controllo, vediamo dove si trovano a quell'ora: il brigante viaggia da due ore e ha percorso 320 km, il mago da un'ora e ne ha percorsi 180. In tutto $320\,\text{km} + 180\,\text{km} = 500\,\text{km}$, cioè l'intera distanza fra le due città.

Esercizio 23 (p. 30)
All'una una colonia di batteri contiene un milione di individui, e il numero di individui raddoppia ogni ora. Quanti individui ci sono alle dieci? La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA Il numero di individui all'ora x è 2^x milioni. Quindi alle dieci ce ne sono 2^{10} milioni, ossia 1 024 000 000.

Soluzione. Sbagliata. La formula proposta non rispetta il dato del testo: all'ora $x = 1$ darebbe $2^1 = 2$ milioni di batteri, mentre il testo dice che all'una ce n'è *un* milione. (Un caso particolare — l'ora di partenza — basta a smascherarla.)

Dall'una alle dieci passano 9 ore, cioè 9 raddoppi: il numero di individui all'ora x è 2^{x-1} milioni, e alle dieci

$$2^9 \text{ milioni} = 512\,000\,000$$

Esercizio 24 (p. 30)
Risolvi la disequazione $x^3 > x$. La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned} x^3 &> x \\ x^2 &> 1 \\ x^2 - 1 &> 0 \\ (x+1)(x-1) &> 0 \end{aligned}$$

Quindi sono soluzioni tutte le x con $-1 < x < 1$.

Soluzione. Sbagliata. Che qualcosa non vada si vede con $x = 10$: soddisfa la disequazione, perché $10^3 = 1000 > 10$, ma non sta fra -1 e 1. Gli errori sono due.

1. Il passaggio da $x^3 > x$ a $x^2 > 1$ divide per x, e questo conserva il verso della disuguaglianza solo se $x > 0$.
2. Anche così, $(x+1)(x-1) > 0$ ha per soluzione $x < -1$ oppure $x > 1$ (i due fattori hanno lo stesso segno), non $-1 < x < 1$.

Il modo corretto è non dividere, ma portare tutto a primo membro e fattorizzare:

$$x^3 - x > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x(x+1)(x-1) > 0$$

I valori critici sono -1, 0, 1, e provando un valore per intervallo si trova

$$-1 < x < 0 \qquad \text{oppure} \qquad x > 1$$

Esercizio 25 (p. 31)
Risolvi l'equazione

$$\frac{x^2-1}{x-1} = 2x-2$$

La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned}\frac{x^2-1}{x-1} &= 2x-2\\ x^2-1 &= (2x-2)(x-1)\\ x^2-1 &= 2x^2-4x+2\\ 0 &= x^2-4x+3\\ x_{1,2} &= \frac{4\pm\sqrt{4}}{2}\end{aligned}$$

Le soluzioni sono quindi $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.

Soluzione. Sbagliata, anche se il procedimento algebrico è corretto: la soluzione $x_1 = 1$ non è accettabile, perché annulla il denominatore di $(x^2-1)/(x-1)$, e in $x = 1$ l'equazione non ha senso. L'unica soluzione è

$$x = 3$$

(verifica: $(9-1)/(3-1) = 4$ e $2\cdot 3 - 2 = 4$). Quando si moltiplica per un denominatore, i valori che lo annullano vanno esclusi alla fine: è uno dei motivi per cui conviene sempre verificare le soluzioni.

Esercizio 26 (p. 31)
Risolvi il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x+y+z=1\\ x+2y+3z=4\\ x+4y+9z=16\end{cases}$$

La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA Sottraendo la prima equazione dalle altre due, e poi il triplo della seconda dalla terza:

$$\begin{cases} x+y+z=1\\ y+2z=3\\ 3y+8z=15\end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=1\\ y+2z=3\\ 2z=6\end{cases}$$

Da cui $z = 3$, $y = -3$, $x = 1$.

Soluzione. Giusta. La verifica più rapida è sostituire nelle tre equazioni di partenza:

$$1-3+3=1 \qquad 1-6+9=4 \qquad 1-12+27=16 \qquad \text{OK}$$

Esercizio 27 (p. 32)
Risolvi l'equazione $\sqrt{x+\sqrt{2x}} = x$. La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+\sqrt{2x}} &= x \\
x+\sqrt{2x} &= x^2 \\
\sqrt{2x} &= x^2 - x \\
\sqrt{2x} &= x(x-1) \\
2x &= x^2(x^2-2x+1) \\
0 &= x(x^3-2x^2+x-2) \\
0 &= x(x^2+1)(x-2)
\end{aligned}$$

Quindi le soluzioni sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

Soluzione. Giusta. Elevare al quadrato può introdurre soluzioni in più, quindi qui la verifica è d'obbligo:

$$x = 0: \quad \sqrt{0+0} = 0 \qquad\qquad x = 2: \quad \sqrt{2+\sqrt{4}} = \sqrt{4} = 2 \qquad \text{OK}$$

Il fattore $x^2 + 1$ non si annulla mai, quindi non ci sono altre soluzioni.

Esercizio 28 (p. 32)
La velocità media lungo un tragitto è definita come la lunghezza del tragitto divisa per il tempo impiegato a percorrerlo. Un'auto viaggia ai 60 km/h *per* 100 km*, poi ai* 120 km/h *per altri* 100 km*, completando così un tragitto di* 200 km*. A che velocità media lo ha percorso?* La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA La velocità media è

$$\frac{60\,\text{km/h} + 120\,\text{km/h}}{2}$$

quindi 90 km/h.

Soluzione. Sbagliata. Il testo stesso dice come si calcola la velocità media: lunghezza del tragitto diviso tempo impiegato. Il primo tratto richiede $\frac{100}{60}$ h, il secondo $\frac{100}{120}$ h, quindi

$$\text{velocità media} = \frac{200\,\text{km}}{\frac{100}{60}\,\text{h} + \frac{100}{120}\,\text{h}} = \frac{200\,\text{km}}{2.5\,\text{h}} = 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

L'errore consiste nell'applicare un procedimento — la media delle due velocità — contrario alla definizione data nel testo dell'esercizio. (La media semplice andrebbe bene se i due tratti durassero lo stesso *tempo*; qui hanno la stessa *lunghezza*, e l'auto passa più tempo nel tratto lento.)

Test 29 (p. 37)
Converti $150\,\text{mm}^3$ in millilitri.

Soluzione. Ricordando che, per definizione, $1\,\text{L} = 1\,\text{dm}^3 = (0.1\,\text{m})^3$, abbiamo

$$\begin{aligned} 150\,\text{mm}^3 &= x\,\text{mL} \\ 150\,(10^{-3}\,\text{m})^3 &= x\,10^{-3}\,(0.1\,\text{m})^3 \\ 150\cdot 10^{-9}\,\cancel{\text{m}^3} &= x\,10^{-6}\,\cancel{\text{m}^3} \end{aligned}$$

Da cui $x = 150\cdot 10^{-3} = 0.15$, quindi $150\,\text{mm}^3 = 0.15\,\text{mL}$.

Esercizio 30 (p. 37)
Quanti psi (pound per square inch) sono 1 bar?

Dati:

$$\begin{aligned} 1\,\text{bar} &= 10^5\,\text{Pa} & 1\,\text{psi} &= 1\,\text{lbf/in}^2 & 1\,\text{lbf} &= g\cdot 1\,\text{lb} \\ g &= 9.81\,\text{m/s}^2 & 1\,\text{lb} &= 0.453\,\text{kg} & 1\,\text{in} &= 2.54\,\text{cm} \end{aligned}$$

Soluzione. Svolgimento:

$$1\,\underbrace{\text{bar}}_{1\,\text{bar}=10^5\,\text{Pa}\,=\,10^5\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}} = x\,\underbrace{\text{psi}}_{1\,\text{psi}=1\,\text{lbf/in}^2\,=\,9.81\,\text{m/s}^2\,\cdot\,0.453\,\text{kg}\,/\,(2.54\cdot 10^{-2}\,\text{m})^2}$$

$$10^5\,\frac{\cancel{\text{kg}}}{\cancel{\text{m}}\cdot\text{s}^2} = x\cdot 9.81\,\frac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}^2}\cdot\frac{0.453\,\cancel{\text{kg}}}{2.54^2\cdot 10^{-4}\,\cancel{\text{m}^2}}$$

$$10^5 = x\cdot 9.81\,\frac{0.453}{2.54^2\cdot 10^{-4}} \qquad\Longrightarrow\qquad x = \frac{10\cdot 2.54^2}{9.81\cdot 0.453}\approx 14.5$$

Quindi $1\,\text{bar} = 14.5\,\text{psi}$.

Esercizio 31 (p. 37)
Calcola la portata volumetrica, in m^3/h, di un fluido che scorre in una tubazione del diametro di 10.0 cm alla velocità di $1.50\,\text{m/s}$.

Soluzione. L'unità di misura, m^3/h, della *portata volumetrica* ci fa intuire che probabilmente questa è il volume di fluido che la tubazione trasporta nell'unità di tempo.

Proviamo a capire che cosa succede nel tubo. In un secondo, il fluido avanza di 1.50 m, quindi il volume che entra nel tubo ogni secondo è quello di un cilindro che ha per base un cerchio di diametro 10.0 cm e per altezza 1.50 m. La sezione è un cerchio di raggio 5.00 cm — la metà del diametro — e quindi

$$Q = 1.50\,\text{m/s}\cdot\pi\,(0.0500\,\text{m})^2 = 1.50\cdot\pi\cdot 0.00250\,\text{m}^3/\text{s} = 0.01178\,\text{m}^3/\text{s}$$

e, siccome in un'ora ci sono 3600 s,

$$Q = 0.01178\cdot 3600\,\text{m}^3/\text{h} = 42.4\,\text{m}^3/\text{h}$$

con tre cifre significative, come i dati.

Controlliamo ora il risultato con le unità di misura. Abbiamo moltiplicato una velocità, in m/s, per una superficie, in m^2, e abbiamo ottenuto dei m^3/s, ossia un volume diviso un tempo, che è proprio quello che l'esercizio chiede, e questo è un buon segno. Con una velocità e una lunghezza, l'unico modo di arrivare a un volume per unità di tempo è moltiplicare la velocità per il quadrato della lunghezza, quindi difficilmente la formula che abbiamo immaginato è sbagliata.

Attenzione: le unità di misura, però, ci dicono solo che Q è *proporzionale* a $v \cdot d^2$: il fattore $\frac{\pi}{4}$ viene dalla geometria (l'area del cerchio è $\pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2$), e l'analisi dimensionale non lo vede. Se usassimo il diametro al posto del raggio troveremmo un risultato quattro volte troppo grande, circa $170\,m^3/h$, con le medesime unità di misura!

Franco Battiato aveva previsto che ci avrebbero dato la velocità del fluido:

> *La portata di un condotto*
> *è il volume liquido*
> *che passa in una sua sezione*
> *nell'unità di tempo;*
> *e si ottiene moltiplicando*
> *la sezione perpendicolare*
> *per la velocità, che avrai, del liquido.*
> *A regime permanente*
> *la portata è costante*
> *attraverso una sezione del con-dot-to.*
>
> (*Pollution*, dall'album omonimo di Franco Battiato, Bla Bla, 1972)

Esercizio 32 (p. 37)
Una soluzione satura di un principio attivo viene fatta cristallizzare raffreddandola, a volume costante, da 60 °C a 25 °C. Se la solubilità diminuisce di otto volte, qual è la resa di cristallizzazione?

Soluzione. Anche se non conosciamo il campo specifico a cui fa riferimento l'esercizio, è ragionevole supporre che la resa sia la frazione del principio attivo disciolto che si trasforma in cristalli — generalmente, parole come *resa, rendimento, efficienza* fanno riferimento al rapporto fra il prodotto di un processo e il massimo prodotto teoricamente ottenibile: in questo caso il principio attivo cristallizzato e tutto quello disponibile. Chiamiamo s la solubilità a 60 °C — in g/L, per esempio — e V il volume. All'inizio la soluzione è satura, quindi contiene sV di principio attivo, mentre a 25 °C ne può restare disciolto solo $\frac{s}{8} V$ e il resto cristallizza. La resa è quindi

$$\frac{sV - \frac{s}{8}V}{sV} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 87.5\%$$

Non ci serve conoscere né s né V, che si semplificano: della solubilità ci interessa solo di quanto diminuisce, ossia il *rapporto* fra i due valori.

Esercizio 33 (p. 38)
Una soluzione satura di un principio attivo, con solubilità 20 g/L, viene fatta cristallizzare facendo evaporare il solvente a temperatura costante. Se il volume iniziale del solvente è di 1000 L e la resa di cristallizzazione è del 90%, quanto solvente è evaporato?

Soluzione. All'inizio sono disciolti $20 \frac{\text{g}}{\cancel{\text{L}}} \cdot 1000 \cancel{\text{L}} = 20\,000\,\text{g} = 20\,\text{kg}$ di principio attivo. Ne cristallizza il 90%, ossia 18 kg, e quindi ne restano disciolti 2 kg. Siccome la temperatura non cambia, la soluzione che resta è ancora satura, a 20 g/L, e i 2 kg rimasti occupano

$$\frac{2000\,\cancel{\text{g}}}{20\,\cancel{\text{g}}/\text{L}} = 100\,\text{L}$$

di solvente. Sono quindi evaporati $1000\,\text{L} - 100\,\text{L} = 900\,\text{L}$ di solvente ($= 0.9\,\text{m}^3$).

Anche qui la solubilità si semplifica: evapora il 90% del solvente perché cristallizza il 90% del soluto, e potremmo fare a meno del dato 20 g/L.

Test 34 (p. 43)
Quante sono le cifre significative di 0.0308?

Soluzione. Gli zeri all'inizio di un numero che comincia con 0. sono segna-posto: servono soltanto a dire in che posizione stanno le cifre diverse da zero.

$$0.0\underline{308} \quad \Longrightarrow \quad \text{3 cifre significative}$$

(si vede bene in notazione scientifica: $0.0308 = 3.08 \cdot 10^{-2}$, e in notazione scientifica tutte le cifre della mantissa sono significative).

Test 35 (p. 43)
Quante sono le cifre significative di 51 900?

Soluzione. Gli zeri finali di un numero intero, scritto senza cifre decimali, sono segna-posto.

$$\underline{51}900 \quad \Longrightarrow \quad \text{3 cifre significative}$$

(in notazione scientifica, $5.19 \cdot 10^4$).

Test 36 (p. 43)
Quante sono le cifre significative di 51 900.0?

Soluzione. Qui c'è uno .0 finale, che non serve a specificare il posto di nessun'altra cifra: toglierlo non cambierebbe il valore. Quindi è significativo, e con lui tutti gli zeri che lo precedono.

$$\underline{51\,900.0} \quad \Longrightarrow \quad \text{6 cifre significative}$$

(chi scrive 51 900.0 sta dichiarando di conoscere il dato al decimo di unità: un'informazione molto più precisa di quella contenuta in 51 900).

Test 37 (p. 43)
Scrivi 0.035792 arrotondato a tre cifre significative.

Soluzione. Gli zeri iniziali non sono cifre significative: sono segna-posto. Le cifre significative di 0.035792 sono dunque 3, 5, 7, 9, 2, e le prime tre sono 3, 5, 7. La prima cifra scartata è $9 \geqslant 5$, quindi si arrotonda per eccesso:

$$0.035792 \longrightarrow 0.0358$$

Esercizio 38 (p. 47)
Ciascuno dei numeri seguenti è il valore arrotondato di una frazione di interi piccoli. Trova la frazione, ridotta ai minimi termini, e verifica la risposta.

(a) $x = 4.2000$ (b) $x = 0.3750$ (c) $x = 3.1429$ (d) $x = 1.4783$

Soluzione.

Soluzione della domanda a. La parte frazionaria è $0.2 = \frac{1}{5}$, quindi

$$x = 4 + \frac{1}{5} = \frac{20}{5} + \frac{1}{5} = \frac{21}{5}$$

□

Soluzione della domanda b. Qui $x < 1$: conviene passare al reciproco.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{0.3750} = 2.6667 \approx 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{3}{8}$$

Verifica: $\frac{3}{8} = 0.375$ esattamente. □

Soluzione della domanda c. Non riconosco la parte frazionaria $x - 3 = 0.1429$, quindi applico il trucco del reciproco a questa parte frazionaria:

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{0.1429} = 6.9979 \approx 7$$

(l'errore sulla terza cifra è quello che ci aspettiamo), da cui

$$x = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

Verifica: $\frac{22}{7} = 3.142857\ldots$, compatibile con il dato. □

Soluzione della domanda d. Procedendo come nella domanda precedente, ottengo

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{0.4783} = 2.0907$$

Non riconoscendo la parte frazionaria 0.0907 di questo nuovo numero, applico nuovamente il procedimento, questa volta a partire da $x_1 = \frac{1}{x-1} = 2.0907$. Ottengo:

$$\frac{1}{x_1 - 2} = \frac{1}{0.0907} = 11.02$$

A questo punto, posso assumere che valga $\frac{1}{x_1 - 2} = 11$ e risalire:

$$x_1 = \frac{1}{11} + 2 = \frac{23}{11} \qquad x = \frac{1}{x_1} + 1 = \frac{1}{\frac{23}{11}} + 1 = \frac{11}{23} + 1 = \frac{34}{23}$$

Verifica: $\frac{34}{23} = 1.4782608\ldots$, compatibile con il dato. □

Esercizio 39 (p. 47)
239.6 mg di un ossido di ferro solido vengono integralmente decomposti, ad elevata temperatura, in ossigeno gassoso e ferro metallico solido. Di quest'ultimo si ottengono 167.7 mg. Stabilisci la formula dell'ossido di ferro.

Masse atomiche: Fe = 55.85 g/mol, O = 16.00 g/mol.

Soluzione. Chiamiamo Fe_aO_b la formula cercata: a e b sono interi piccoli e quello che dobbiamo trovare è il loro rapporto. La reazione è

$$Fe_aO_b \longrightarrow Fe + O_2$$

e la massa si conserva, quindi l'ossigeno prodotto pesa

$$239.6\,\text{mg} - 167.7\,\text{mg} = 71.9\,\text{mg}$$

In una molecola ci sono a atomi di ferro ogni b atomi di ossigeno; lo stesso vale per le quantità di sostanza, quindi

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{moli di Fe}}{\text{moli di O}}$$

(attenzione: moli di ossigeno atomico, non di O_2). Calcoliamo le due quantità:

$$n_{Fe} = \frac{167.7\,\text{mg}}{55.85\,\text{g/mol}} = 3.003\,\text{mmol} \qquad n_O = \frac{71.9\,\text{mg}}{16.00\,\text{g/mol}} = 4.494\,\text{mmol}$$

da cui

$$\frac{a}{b} = \frac{3.003}{4.494} = 0.6682$$

Ora si tratta di riconoscere la frazione. Siccome il numero è minore di 1 passo al reciproco:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{0.6682} = 1.4966 \approx 1.5 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(la terza cifra è già inaffidabile: la massa dell'ossigeno, ottenuta per differenza, ha solo tre cifre significative, e il ferro naturale, peraltro, è una miscela di isotopi). Quindi $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, ossia $a = 2$ e $b = 3$:

$$Fe_2O_3$$

(l'ossido ferrico, cioè la ruggine).

Esercizio 40 (p. 47)
Un elemento X forma due composti clorurati di formula, rispettivamente, XCl_a e XCl_b. Nel primo composto l'elemento X è contenuto per il 22.545% in peso; nel secondo, l'elemento Cl è contenuto per lo 85.132% in peso. Tenendo presente che a e b sono due numeri interi piccoli, e che la massa atomica del cloro è nota, determina la massa atomica di X e la formula dei due composti.

Massa atomica: Cl = 35.453 g/mol.

Soluzione. **Primo passo: il rapporto** a : b**.** Prendiamo 100 g di ciascun composto e vediamo come si ripartiscono:

$$\begin{aligned} 100\,\mathrm{g}\ XCl_a &\longrightarrow 22.545\,\mathrm{g}\ X + 77.455\,\mathrm{g}\ Cl \\ 100\,\mathrm{g}\ XCl_b &\longrightarrow 14.868\,\mathrm{g}\ X + 85.132\,\mathrm{g}\ Cl \end{aligned}$$

Le due righe non sono però confrontabili, perché contengono quantità diverse di X. Riscaliamole entrambe in modo da avere 100 g di X:

$$\begin{aligned} XCl_a &\longrightarrow 100\,\mathrm{g}\ X + \underbrace{77.455 \cdot \frac{100}{22.545}}_{343.5573}\ \mathrm{g}\ Cl \\ XCl_b &\longrightarrow 100\,\mathrm{g}\ X + \underbrace{85.132 \cdot \frac{100}{14.868}}_{572.5854}\ \mathrm{g}\ Cl \end{aligned}$$

Adesso, a parità di atomi di X, la massa di cloro è proporzionale al numero di atomi di cloro per molecola, cioè ad a e a b rispettivamente. Quindi

$$\frac{a}{b} = \frac{343.5573}{572.5854} = 0.6000$$

e questa è una frazione che riconosciamo subito:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad a = 3, \quad b = 5$$

Secondo passo: la massa atomica di X**.** Torniamo ai 100 g del primo composto, XCl_3. Il cloro presente è

$$n_{Cl} = \frac{77.455\,\mathrm{g}}{35.453\,\mathrm{g/mol}} = 2.1847\,\mathrm{mol}$$

e siccome ogni molecola contiene tre atomi di cloro e uno di X,

$$n_X = \frac{2.1847\,\mathrm{mol}}{3} = 0.72824\,\mathrm{mol}$$

La massa atomica cercata è quindi

$$\frac{22.545\,\mathrm{g}}{0.72824\,\mathrm{mol}} \approx 30.96\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$$

che sulla tavola periodica è il fosforo. I due composti sono il tricloruro e il pentacloruro di fosforo:

$$PCl_3 \qquad\qquad PCl_5$$

Esercizio 41 (p. 47)
Per un buon esercizio di matematica non c'è niente come cercare *sondaggi grande fratello* sul web. Il sito `www.tuttosulgossip.it`, alla domanda "chi è il tuo preferito?", riporta le percentuali seguenti:

Risposte	Statistiche
Anita Mazzotta	17.45%
Grazia Kendi	17.45%
Donatella Mercoledisanto	13.42%
Jonas Pepe	12.08%
Omer Elomari	7.38%
Giulia Soponariu	6.04%
Domenico D'Alterio	5.37%
Francesca Carrara e Simone De Bianchi	5.37%
Benedetta Stocchi	4.70%
Francesco Rana	4.70%
Matteo Azzali	3.36%
Giulio Carotenuto	2.68%

Se leggessi risultati del genere in uno studio serio avresti forti ragioni di sospetto: ci sono numerose percentuali identiche, e questo suggerisce che il numero degli individui coinvolti sia limitato.

Domanda: su quanti voti è basato questo sondaggio?

Suggerimento: parti dal 17.45%, cioè cerca $\frac{a}{b} = 0.1745$. Poi verifica che il denominatore b vada bene anche per le altre percentuali; se no correggilo, prova arrotondamenti diversi, e così via. Avrai finito quando potrai esprimere tutte le percentuali come frazioni con il medesimo denominatore: quello sarà la numerosità del campione.

Soluzione. Cerchiamo la frazione corrispondente a $x_0 = 0.1745$. Siccome $x_0 < 1$ cominciamo dal reciproco e poi proseguiamo con il metodo delle frazioni continue:

$$x_1 = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{0.1745} = 5.7307 \qquad x_0 = \frac{1}{x_1}$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - 5} = \frac{1}{0.7307} = 1.3686 \qquad x_1 = 5 + \frac{1}{x_2}$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{1}{0.3686} = 2.7128 \qquad x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}$$

$$x_4 = \frac{1}{x_3 - 2} = \frac{1}{0.7128} = 1.4030 \qquad x_3 = 2 + \frac{1}{x_4}$$

A questo punto riconosco $x_4 \approx 1.4 = \frac{7}{5}$ (l'errore sulla terza cifra decimale è atteso: abbiamo già fatto quattro passaggi). Risalgo:

$$x_3 = 2 + \frac{5}{7} = \frac{19}{7} \qquad x_2 = 1 + \frac{7}{19} = \frac{26}{19} \qquad x_1 = 5 + \frac{19}{26} = \frac{149}{26}$$

e quindi

$$x_0 = \frac{1}{x_1} = \frac{26}{149}$$

Il candidato è dunque $b = 149$ votanti. Prima di crederci, però, va verificato su tutte le percentuali: moltiplico ciascuna per 149 e controllo di ottenere, ogni volta, un numero intero a meno dell'arrotondamento.

$$\begin{array}{rrrcr} 0.1745 & \times 149 = & 26.00 & \approx & 26 \\ 0.1342 & \times 149 = & 20.00 & \approx & 20 \\ 0.1208 & \times 149 = & 18.00 & \approx & 18 \\ 0.0738 & \times 149 = & 11.00 & \approx & 11 \\ 0.0604 & \times 149 = & 9.00 & \approx & 9 \\ 0.0537 & \times 149 = & 8.00 & \approx & 8 \\ 0.0470 & \times 149 = & 7.00 & \approx & 7 \\ 0.0336 & \times 149 = & 5.01 & \approx & 5 \\ 0.0268 & \times 149 = & 3.99 & \approx & 4 \end{array}$$

Funziona. Contando anche i doppioni, i voti sono

$$26 + 26 + 20 + 18 + 11 + 9 + 8 + 8 + 7 + 7 + 5 + 4 = 149$$

e il totale torna esattamente, che è la controprova decisiva. (Il sondaggio, insomma, è basato su centoquarantanove voti: un campione del tutto inadeguato alla precisione con cui sono espresse le percentuali. L'autore di `www.tuttosulgossip.it` avrebbe fatto meglio ad arrotondare all'unità.)

> **Test 42** (p. 59)
> Converti in errore relativo 24 ± 1.

Soluzione.

$$\frac{1}{24} \cdot 100 \approx 4.17 \qquad \Longrightarrow \qquad 24 \pm \underbrace{1}_{\pm 4.17\%} = 24 \pm 4\%$$

(L'errore relativo è un'incertezza come le altre: si arrotonda a una cifra significativa.)

> **Test 43** (p. 59)
> Converti $60.0 \pm 2\%$ in errore assoluto.

Soluzione.

$$60.0 \pm \underbrace{2\%}_{60.0 \cdot \frac{2}{100}} = 60.0 \pm 1.2$$

L'errore comincia con la cifra 1: lo teniamo a due cifre significative, e il valore resta arrotondato ai decimi.

Test 44 (p. 59)
Calcola $(10.0 \pm 0.3) - (5.0 \pm 0.1)$ con l'errore assoluto.

Soluzione.

$$(10.0 \pm 0.3) - (5.0 \pm 0.1) = 5.0 \pm \underbrace{0.4}_{0.3+0.1}$$

Nella differenza gli errori assoluti si sommano.

Test 45 (p. 59)
Calcola $(20.0 \pm 0.4) \cdot (7.5 \pm 0.3)$ indicando l'errore assoluto.

Soluzione. Per risolvere questo esercizio con la regola per i prodotti è necessario prima convertire gli errori assoluti in errori relativi, calcolare l'errore relativo sul risultato, ed infine eseguire la conversione opposta.

$$\underbrace{(20.0 \pm 0.4)}_{\pm 2\%} \cdot \underbrace{(7.5 \pm 0.3)}_{\pm 4\%} = 150.0 \pm \underbrace{6}_{2+4}\,\% = 150.0 \pm \underbrace{9.0}_{150 \cdot \frac{6}{100}} = 150 \pm 9$$

L'ultimo passaggio è l'arrotondamento corretto.

Avremmo anche potuto seguire il metodo dell'intervallo di incertezza. Posto $y = (20.0 \pm 0.4) \cdot (7.5 \pm 0.3)$ otteniamo

$$\underbrace{141.12}_{19.6 \cdot 7.2} \leqslant y \leqslant \underbrace{159.12}_{20.4 \cdot 7.8} \qquad \Longrightarrow \qquad y = 150 \pm \frac{159.12 - 141.12}{2} = 150 \pm 9$$

Notiamo che anche usando la formula sconsigliata $y_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$ avremmo ottenuto $y_0 = \frac{159.12+141.12}{2} = 150.12$, che si arrotonda a 150.

Test 46 (p. 59)
Calcola $(10.0 \pm 0.2)/(5.0 \pm 0.1)$ con l'errore assoluto.

Soluzione.

$$\frac{10.0 \pm \overbrace{0.2}^{\pm 2\%}}{5.0 \pm \underbrace{0.1}_{\pm 2\%}} = 2.00 \pm \underbrace{4}_{2+2}\,\% = 2.00 \pm \underbrace{0.08}_{2.00 \cdot \frac{4}{100}} = 2.00 \pm 0.08$$

Verifica col metodo dell'intervallo: il quoziente va da $9.8/5.1 = 1.9216$ a $10.2/4.9 = 2.0816$, e la semidifferenza è 0.08.

Test 47 (p. 59)
Calcola $(2.00 \pm 0.02)^2$ indicando l'errore assoluto.

Soluzione.

$$\left(2.00 \pm \underbrace{0.02}_{\pm 1\%}\right)^2 = 4.00 \pm \underbrace{2}_{2 \cdot 1}\,\% = 4.00 \pm \underbrace{0.08}_{4.00 \cdot \frac{2}{100}}$$

Verifica col metodo dell'intervallo: $1.98^2 = 3.9204$ e $2.02^2 = 4.0804$, la semidifferenza è 0.08.

Esercizio 48 (p. 59)
La formula che lega il periodo di oscillazione T di un pendolo alla lunghezza L del medesimo è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

dove $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ rappresenta l'accelerazione di gravità. Calcola il periodo di oscillazione di un pendolo lungo $(100.0 \pm 1.0)\,\mathrm{cm}$. Scrivi il risultato in millisecondi, indicando l'errore assoluto.

Soluzione. L'unico dato incerto è la lunghezza, che compare una volta sola; 2π è esatto, e g è dato senza incertezza (lo trattiamo come esatto). Bastano quindi le regole per prodotti, quozienti e potenze.

Il valore centrale, con $L = 100.0\,\mathrm{cm} = 1.000\,\mathrm{m}$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1.000\,\mathrm{m}}{9.81\,\mathrm{m/s^2}}} = 2\pi\sqrt{0.101937\,\mathrm{s^2}} = 2\pi \cdot 0.319275\,\mathrm{s} = 2.00607\,\mathrm{s} = 2006.07\,\mathrm{ms}$$

(i metri si semplificano, e resta la radice di secondi al quadrato, cioè secondi.) Molti ricordano che il *pendolo che batte il secondo*, ossia quello che attraversa la verticale ogni secondo e ha quindi un periodo di due secondi, è lungo quasi esattamente un metro.

L'errore relativo della lunghezza è

$$L = 100.0\,\mathrm{cm} \pm \frac{1.0}{100.0} \cdot 100\% = 100.0\,\mathrm{cm} \pm 1.0\%$$

Dividere per g, che è esatto, non cambia l'errore relativo; la radice quadrata dimezza l'errore relativo; moltiplicare per 2π non lo cambia:

$$T = 2006.07\,\mathrm{ms} \pm \tfrac{1}{2} \cdot 1.0\% = 2006.07\,\mathrm{ms} \pm 0.50\% = (2006.07 \pm 10.03)\,\mathrm{ms}$$

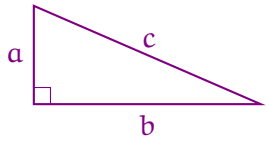
L'errore comincia con la cifra 1, quindi lo arrotondiamo a due cifre significative, 10 ms, e il valore alla stessa cifra, quella delle unità:

$$T = (2006 \pm 10)\,\mathrm{ms}$$

Verifica col metodo dell'intervallo: con $L = 99.0\,\mathrm{cm}$ si ha $T = 1996.01\,\mathrm{ms}$, con $L = 101.0\,\mathrm{cm}$ si ha $T = 2016.07\,\mathrm{ms}$; la semidifferenza è $10.03\,\mathrm{ms}$, come sopra.

Esercizio 49 (p. 59)
L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga 50 cm ± 2% e un cateto 30 cm ± 5%. Calcola il secondo cateto indicando l'errore percentuale.

Soluzione.



Denotando l'ipotenusa con c ed il cateto dato con a, calcoliamo il secondo cateto b usando il teorema di Pitagora.

$$
\begin{aligned}
b = \sqrt{c^2 - a^2} &= \sqrt{(50\,\text{cm} \pm 2\%)^2 - (30\,\text{cm} \pm 5\%)^2} \\
&= \sqrt{(2500\,\text{cm}^2 \pm \underbrace{4}_{2\cdot 2}\,\%) - (900\,\text{cm}^2 \pm \underbrace{10}_{2\cdot 5}\,\%)} && \text{regola per le potenze} \\
&= \sqrt{(2500 \pm \underbrace{100}_{2500\cdot\frac{4}{100}})\,\text{cm}^2 - (900 \pm \underbrace{90}_{900\cdot\frac{10}{100}})\,\text{cm}^2} && \text{passo a errore assoluto per poter fare la differenza} \\
&= \sqrt{(1600 \pm \underbrace{190}_{100+90})\,\text{cm}^2} && \text{regola per le somme alg.} \\
&= \sqrt{1600\,\text{cm}^2 \pm \underbrace{12}_{\frac{190}{1600}\cdot 100}\,\%} && \text{passo a e. rel. per applicare la regola per le radici} \\
&= 40\,\text{cm} \pm 6\% && \tfrac{12}{2}\text{: regola per le radici}
\end{aligned}
$$

Esercizio 50 (p. 59)
Un tecnico dispone di un cilindro graduato con l'accuratezza di ±0.5 mL e di una bilancia che ha un'accuratezza di ±100 mg. Egli determina la densità di un liquido misurandone 10 mL, che risultano pesare 9.2 g.

1. Determina la densità del liquido in kg/L, indicando l'errore percentuale.
2. Che volume di liquido dovrebbe misurare il tecnico per avere un errore di ±2% sulla densità?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. La densità è la massa divisa per il volume:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{9.2\,\text{g}}{10\,\text{mL}} = 0.92\,\frac{\text{g}}{\text{mL}} = 0.92\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}$$

($1\,\text{kg/L} = 10^3\,\text{g}/10^3\,\text{mL} = 1\,\text{g/mL}$.) È un quoziente, e ciascun dato compare una volta sola: gli errori relativi si sommano.

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{0.5\,\text{mL}}{10\,\text{mL}} = 5\% \qquad \frac{\delta m}{m} = \frac{0.1\,\text{g}}{9.2\,\text{g}} \approx 1.09\%$$

$$\rho = 0.92\,\text{kg/L} \pm (5\% + 1.09\%) = 0.92\,\text{kg/L} \pm 6.09\% = 0.92\,\text{kg/L} \pm 6\%$$

□

Soluzione della domanda 2. Se il tecnico misura un volume V, la massa sarà $m = \rho V$, cioè $m = 0.92\,\mathrm{g/mL} \cdot V$, e l'errore relativo sulla densità

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{0.5\,\mathrm{mL}}{V} + \frac{0.1\,\mathrm{g}}{0.92\,\mathrm{g/mL} \cdot V} = \frac{0.5\,\mathrm{mL} + 0.109\,\mathrm{mL}}{V} = \frac{0.609\,\mathrm{mL}}{V}$$

Vogliamo che non superi il 2%:

$$\frac{0.609\,\mathrm{mL}}{V} \leqslant 0.02 \qquad \Longrightarrow \qquad V \geqslant \frac{0.609\,\mathrm{mL}}{0.02} = 30.45\,\mathrm{mL}$$

Il tecnico deve misurare non meno di 30 mL di liquido.

Più grande è il volume, minore è l'incertezza sul risultato, quindi al tecnico converrebbe, potendo, tenersi un po' di margine: per esempio potrebbe misurare 50 mL di liquido, se li ha e il cilindro graduato non è troppo piccolo. Con 30 mL, assumendo la densità di 0.92 kg/L esatta — ma non lo è — otterrebbe un'incertezza di $1.67\% + 0.36\% = 2.03\%$: impercettibilmente superiore al 2%, e del tutto accettabile. □

> **Esercizio 51** (p. 60)
> Il coefficiente di dilatazione termica del rame è di 16.5 parti per milione per kelvin (ossia, scaldando un campione di rame lungo un metro di un grado, questo si allunga di 16.5 µm). Una barra di rame è lunga (2000.00 ± 0.05) mm alla temperatura di (25.0 ± 0.5) °C. Portata ad una certa temperatura T, misura (2001.45 ± 0.05) mm. Determina T, indicando l'errore assoluto.

Soluzione. Chiamiamo α il coefficiente di dilatazione, L_0 la lunghezza alla temperatura T_0, e L la lunghezza alla temperatura T:

$$\alpha = 16.5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}} \qquad L_0 = (2000.00 \pm 0.05)\,\mathrm{mm}$$
$$T_0 = (25.0 \pm 0.5)\,^\circ\mathrm{C} \qquad L = (2001.45 \pm 0.05)\,\mathrm{mm}$$

L'allungamento è proporzionale alla lunghezza e alla variazione di temperatura, quindi

$$L - L_0 = \alpha\, L_0\, (T - T_0) \qquad \Longrightarrow \qquad T = T_0 + \frac{L - L_0}{\alpha\, L_0}$$

(prendiamo α come esatto: il testo non ne dà l'incertezza). Con i valori centrali otteniamo

$$\alpha\, L_0 = 16.5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}} \cdot 2000.00\,\mathrm{mm} = 0.0330\,\mathrm{mm/K}$$
$$T = 25.0\,^\circ\mathrm{C} + \frac{1.45\,\mathrm{mm}}{0.0330\,\mathrm{mm/K}} = 25.0\,^\circ\mathrm{C} + 43.94\,\mathrm{K} = 68.94\,^\circ\mathrm{C}$$

Il risultato è plausibile: una barra di due metri si allunga di $2 \cdot 16.5\,\mu\mathrm{m} = 33\,\mu\mathrm{m}$ per grado, che è come dire 0.1 mm ogni tre gradi. L'allungamento misurato è 1.45 mm, cioè $14.5 \approx 15$ volte 0.1 mm: siccome $15 \cdot 3 = 45$, ci aspettiamo una differenza di temperatura di circa 45 gradi.

Quanto all'incertezza, T_0 è un addendo indipendente dal resto, e lo tratteremo alla fine con gli errori assoluti. Nella frazione $\Delta T = (L - L_0)/(\alpha L_0)$, invece, L_0 compare due volte, e le regole non sono garantite: vediamo quindi due strade.

Nella prima, il metodo dell'intervallo di incertezza, calcoliamo ΔT, in kelvin, in tutte le combinazioni degli estremi degli intervalli di incertezza di L_0 e L

	$L = 2001.40\,\text{mm}$	$L = 2001.50\,\text{mm}$
$L_0 = 1999.95\,\text{mm}$	$\dfrac{2001.40 - 1999.95}{\alpha \cdot 1999.95} = 43.940$	$\dfrac{2001.50 - 1999.95}{\alpha \cdot 1999.95} = 46.971$
$L_0 = 2000.05\,\text{mm}$	$\dfrac{2001.40 - 2000.05}{\alpha \cdot 2000.05} = 40.908$	$\dfrac{2001.50 - 2000.05}{\alpha \cdot 2000.05} = 43.938$

da cui

$$\Delta T = \left(43.94 \pm \frac{46.971 - 40.908}{2}\right) \text{K} = (43.94 \pm 3.03)\,\text{K}$$

La seconda strada è riscrivere la formula in modo che ogni dato vi compaia una volta sola,

$$\Delta T = \frac{L - L_0}{\alpha L_0} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{L}{L_0} - 1\right)$$

e applicare le regole. Per il quoziente sommiamo gli errori relativi

$$\frac{L}{L_0} = \frac{2001.45}{2000.00} \pm \left(\frac{0.05}{2001.45} + \frac{0.05}{2000.00}\right) = 1.000725 \pm (0.0025\% + 0.0025\%)$$

ossia

$$\frac{L}{L_0} = 1.000725 \pm 0.005\% = 1.000725 \pm 0.00005$$

Siccome il numero 1 è esatto, nella differenza l'errore assoluto resta lo stesso, e dividendo per α, anch'esso esatto, si divide anche l'errore:

$$\frac{L}{L_0} - 1 = 0.000725 \pm 0.00005$$

$$\Delta T = \frac{0.000725 \pm 0.00005}{16.5 \cdot 10^{-6}}\,\text{K} = (43.94 \pm 3.03)\,\text{K}$$

che è il risultato della prima strada.

Infine aggiungiamo T_0, sommando gli errori assoluti:

$$T = (25.0 \pm 0.5)\,^\circ\text{C} + (43.94 \pm 3.03)\,\text{K} = (68.94 \pm 3.53)\,^\circ\text{C}$$

e, arrotondando l'errore a una cifra significativa e il valore alla stessa cifra,

$$T = (69 \pm 4)\,^\circ\text{C}$$

Se avessimo calcolato l'incertezza direttamente usando le formule di propagazione, avremmo ottenuto il medesimo risultato. Questo perché l'errore relativo di L_0 al denominatore è appena 0.0025%, quindi, nel calcolo, può essere trascurato. Se trattiamo il denominatore L_0 come costante, allora ogni parametro compare una volta sola nella formula, quindi è giustificato usare le formule di propagazione. Usarle, però, senza esplicitare questa osservazione, sarebbe un procedimento scorretto.

Esercizio 52 (p. 60)
Uno sperimentatore dispone di un cilindro graduato avente l'accuratezza di $\pm 0.5\,\text{mL}$. Con questo strumento, misura 40.0 mL di una soluzione (0.450 ± 0.005) molare di NaOH. Egli aggiunge, poi, acqua distillata fino a portare il livello della soluzione nel cilindro a 60.0 mL. Determina la molarità della soluzione risultante,

indicando l'errore assoluto su questo risultato.

Soluzione. La diluizione non cambia le moli di NaOH, ma solo il volume in cui sono sciolte. Indichiamo con c_0 la molarità di partenza, con V_1 il volume di soluzione misurato e con V_f il volume finale: le moli di NaOH sono $c_0 V_1$, e quindi la molarità finale è

$$c = \frac{c_0 V_1}{V_f} = \frac{0.450\,\text{mol/L} \cdot 40.0\,\text{mL}}{60.0\,\text{mL}} = 0.300\,\frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

(i millilitri si semplificano).

Ciascuno dei tre dati compare una volta sola, e c è ottenuto mediante un prodotto e un quoziente, quindi possiamo sommare gli errori relativi

$$\frac{0.005}{0.450} \approx 1.11\% \qquad \frac{0.5}{40.0} = 1.25\% \qquad \frac{0.5}{60.0} \approx 0.83\%$$

da cui

$$c = 0.300\,\text{mol/L} \pm (1.11\% + 1.25\% + 0.83\%) = 0.300\,\text{mol/L} \pm 3.19\%$$

Moltiplicando per il valore centrale otteniamo l'errore assoluto

$$0.300 \cdot 0.03194 \approx 0.00958\,\text{mol/L}$$

Arrotondato a una cifra significativa questo diventa 0.01, e siccome la cifra è un 1 ne teniamo due, 0.010, e arrotondiamo il valore alla stessa cifra, i millesimi:

$$c = (0.300 \pm 0.010)\,\text{mol/L}$$

Esercizio 53 (p. 60)
Partendo da (33.0 ± 0.5) mL di una soluzione (0.050 ± 0.001) molare di NaCl, aggiungiamo acqua distillata fino a ottenere (100.0 ± 0.5) mL di soluzione. Calcolane la molarità indicando l'errore assoluto. Il risultato cambierebbe se partissimo da (67.0 ± 0.5) mL di acqua distillata e aggiungessimo la soluzione (0.050 ± 0.001) molare di NaCl fino a raggiungere (100.0 ± 0.5) mL?

Soluzione. Aggiungendo acqua la quantità di NaCl resta la stessa, e cambia solo il volume in cui è sciolta. Chiamiamo c_0 la molarità di partenza, V_1 il volume di soluzione di partenza e V_f il volume finale: le moli di NaCl sono $c_0 V_1$, quindi la molarità finale è

$$c = \frac{c_0 V_1}{V_f} = \frac{0.050\,\text{mol/L} \cdot 33.0\,\text{mL}}{100.0\,\text{mL}} = 0.0165\,\frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

(i millilitri si semplificano: non serve convertirli in litri).

Per l'incertezza osserviamo che c è un prodotto e un quoziente di tre dati misurati indipendentemente l'uno dall'altro, quindi ci basta sommare gli errori relativi

$$\frac{0.001}{0.050} = 2.0\% \qquad \frac{0.5}{33.0} \approx 1.52\% \qquad \frac{0.5}{100.0} = 0.50\%$$

da cui

$$c = 0.0165\,\text{mol/L} \pm (2.0\% + 1.52\% + 0.50\%) = 0.0165\,\text{mol/L} \pm 4.02\%$$

L'errore assoluto è $0.0165 \cdot 0.0402 \approx 0.00066\,\text{mol/L}$. Arrotondando l'errore a una cifra significativa, e il valore alla stessa cifra decimale, otteniamo

$$c = (0.0165 \pm 0.0007)\,\text{mol/L}$$

Nel secondo procedimento il volume di soluzione di partenza non è misurato direttamente, ma è la differenza fra il volume finale e quello dell'acqua, $V_1 = V_f - V_a$, con $V_a = (67.0 \pm 0.5)\,\text{mL}$ — supponiamo che i volumi si sommino: per una soluzione così diluita la contrazione è di qualche decimo di microlitro (con acqua e alcol etilico, per esempio, non sarebbe così: 50 mL più 50 mL fanno circa 97 mL). Il valore centrale è lo stesso, perché $100.0 - 67.0 = 33.0$, ma adesso

$$c = c_0 \cdot \frac{V_f - V_a}{V_f}$$

e V_f compare due volte: numeratore e denominatore non sono indipendenti, e le regole per somme e prodotti non sono garantite. Procediamo quindi in due modi.

Il primo è quello dell'intervallo di incertezza. Il dato c_0 è un fattore indipendente dagli altri, e lo tratteremo alla fine con gli errori relativi, mentre per la frazione $\varphi = (V_f - V_a)/V_f$ usiamo la regola generale: calcoliamo φ in tutte le combinazioni degli estremi degli intervalli di incertezza di V_a e V_f, e prendiamo il minimo e il massimo.

	$V_f = 99.5\,\text{mL}$	$V_f = 100.5\,\text{mL}$
$V_a = 66.5\,\text{mL}$	$\frac{99.5 - 66.5}{99.5} = 0.33166$	$\frac{100.5 - 66.5}{100.5} = 0.33831$
$V_a = 67.5\,\text{mL}$	$\frac{99.5 - 67.5}{99.5} = 0.32161$	$\frac{100.5 - 67.5}{100.5} = 0.32836$

Quindi

$$\varphi = 0.33000 \pm \frac{0.33831 - 0.32161}{2} = 0.33000 \pm 0.00835 = 0.33000 \pm 2.53\%$$

Nel secondo modo trasformiamo la formula con una piccola manipolazione,

$$c = c_0 \cdot \frac{V_f - V_a}{V_f} = c_0 \left(1 - \frac{V_a}{V_f}\right)$$

e così ciascun dato compare una volta sola, e possiamo applicare le regole. Per il quoziente abbiamo

$$\frac{V_a}{V_f} = \frac{67.0}{100.0} \pm \left(\frac{0.5}{67.0} + \frac{0.5}{100.0}\right) = 0.670 \pm (0.75\% + 0.50\%)$$

ossia

$$\frac{V_a}{V_f} = 0.670 \pm 1.25\% = 0.670 \pm 0.00835$$

Il numero 1 è esatto, quindi nella differenza l'errore assoluto resta lo stesso

$$1 - \frac{V_a}{V_f} = 0.330 \pm 0.00835 = 0.330 \pm 2.53\%$$

come col primo modo.

In entrambi i casi resta da moltiplicare per c_0, e sommando gli errori relativi troviamo

$$c = 0.0165\,\text{mol/L} \pm (2.0\% + 2.53\%) = 0.0165\,\text{mol/L} \pm 4.53\%$$

ossia $c = (0.0165 \pm 0.00075)\,\text{mol/L}$ (l'errore assoluto, con più cifre, è 0.000747), che arrotondato dà di nuovo

$$c = (0.0165 \pm 0.0007)\,\text{mol/L}$$

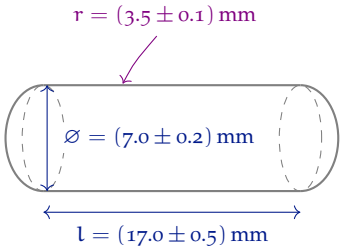
Il risultato arrotondato, quindi, non cambia: il valore centrale è lo stesso, e l'errore cresce di poco, dal 4.0% al 4.5%, troppo poco perché l'arrotondamento lo mostri.

L'errore cresce così poco, anche se V_1 viene da una differenza e ha quindi un errore doppio, $\pm 1.0\,\text{mL}$, perché gli errori in parte si compensano: se V_f è un po' più grande del previsto, abbiamo aggiunto un po' più di soluzione, ma l'abbiamo anche diluita in un volume un po' più grande. Se applicassimo le regole per somme e prodotti senza badare al fatto che V_f compare due volte, con $V_1 = (33.0 \pm 1.0)\,\text{mL}$ ($\pm 3.03\%$), troveremmo $\pm 5.5\%$, ossia $\pm 0.0009\,\text{mol/L}$: una stima pessimistica, non assurda, ma più grande del necessario.

Esercizio 54 (p. 60)
Una capsula ha la forma di un corpo centrale cilindrico terminato, su ciascuna delle basi, da una semisfera. Il diametro del cilindretto, e, di conseguenza, delle due semisfere, è $(7.0 \pm 0.2)\,\text{mm}$, mentre la sua lunghezza è $(17.0 \pm 0.5)\,\text{mm}$. Determina il volume della capsula in mL indicando l'errore relativo.

Soluzione.

La capsula è costituita da un cilindro e due semisfere. Chiamando l la lunghezza del cilindro e r il raggio, che è lo stesso per il cilindro e le due semisfere, abbiamo la seguente formula per il volume



$$V = \underbrace{\pi r^2 l}_{\text{cilindro}} + \underbrace{\tfrac{4}{3}\pi r^3}_{\text{sfera = due semisfere}} = \pi r^2 \left(l + \tfrac{4}{3} r\right)$$

Da cui

$$V = 833.83\,\text{mm}^3 = 0.83383\,\text{mL}$$

$$\left(\; 1\,\text{mL} = 10^{-3}\,\text{L} = 10^{-3}\,\text{dm}^3 = 10^{-3}(10^2\,\text{mm})^3 = 10^3\,\text{mm}^3 \; \right)$$

Per stimare l'incertezza, calcoliamo il massimo e il minimo volume dell'intervallo di incertezza, che corrispondono a $r_{max} = 3.6\,\text{mm}$, $l_{max} = 17.5\,\text{mm}$ e $r_{min} = 3.4\,\text{mm}$, $l_{min} = 16.5\,\text{mm}$ rispettivamente.

$$V_{max} = 0.90795\,\text{mL} \qquad V_{min} = 0.76386\,\text{mL}$$

$$\frac{V_{max} - V_{min}}{2} = 0.07204\,\text{mL} \qquad \text{la seconda cifra non è nulla}$$

L'approssimazione corretta del volume è quindi alla seconda cifra decimale, e l'errore percentuale vale

$$\frac{0.07204}{0.83383} \cdot 100\% \approx 9\%$$

di conseguenza

$$V = 0.83\,\text{mL} \pm 9\%$$

Esercizio 55 (p. 60)
Si vuole preparare una soluzione di NaOH con la concentrazione di 0.2000 moli per litro di soluzione. Per farlo, si riempie un matraccio tarato da $(100.00 \pm 0.08)\,\text{mL}$ con l'opportuna quantità di NaOH, pesata usando una bilancia che ha l'accuratezza di $\pm 0.01\,\text{g}$, e acqua distillata. Una mole di NaOH pesa 39.9971 g.

1. Quanti grammi di soluto è necessario pesare?
2. Che errore assoluto abbiamo sulla concentrazione della soluzione?
3. Usando una bilancia più precisa, sarebbe possibile ottenere un errore di ± 0.0001 moli al litro?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Per ottenere la concentrazione richiesta, nel matraccio ci servono

$$n = 0.2000\,\text{mol/L} \cdot 0.10000\,\text{L} = 0.02000\,\text{mol}$$

di NaOH, che corrispondono a

$$m = 0.02000\,\text{mol} \cdot 39.9971\,\text{g/mol} = 0.79994\,\text{g}$$

Siccome la bilancia legge i centesimi di grammo, pesiamo 0.80 g. □

Soluzione della domanda 2. La concentrazione è il quoziente $c = m/(M\,V)$, dove la massa molare M è esatta — per quanto ci riguarda — e ogni dato compare una volta sola, quindi gli errori relativi si sommano.

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{0.01\,\text{g}}{0.80\,\text{g}} = 1.25\% \qquad \frac{\delta V}{V} = \frac{0.08\,\text{mL}}{100.00\,\text{mL}} = 0.08\%$$

$$c = 0.2000\,\text{mol/L} \pm (1.25\% + 0.08\%) = 0.2000\,\text{mol/L} \pm 1.33\%$$

In assoluto l'errore è $0.2000 \cdot 0.0133 = 0.00266\,\text{mol/L}$, e quindi

$$c = (0.200 \pm 0.003)\,\text{mol/L}$$

□

Soluzione della domanda 3. Non è possibile, perché anche con una bilancia perfetta resterebbe l'errore del matraccio, lo 0.08%, ossia

$$0.2000\,\text{mol/L} \cdot 0.0008 = 0.00016\,\text{mol/L}$$

che è già più di 0.0001 mol/L. □

> **Esercizio 56** (p. 61)
> Si desidera preparare una soluzione di NaCl alla concentrazione di 9 g/L, con un errore non superiore a ±0.2 g/L. Allo scopo, si scioglie l'opportuna quantità di sale per formare 100 mL di soluzione, misurati con un cilindro graduato avente l'accuratezza di ±0.5 mL. Determina il massimo errore assoluto tollerabile sul peso del soluto.

Soluzione. La concentrazione è la massa di sale divisa per il volume di soluzione, $c = m/V$, quindi il valore centrale della massa da sciogliere è

$$m = c\,V = 9\,\text{g/L} \cdot 0.100\,\text{L} = 0.90\,\text{g}$$

Nella formula $c = m/V$ i due dati m e V compaiono una volta sola ciascuno, e per l'incertezza possiamo usare la regola dei quozienti, ossia sommare gli errori relativi

$$\frac{\delta c}{c} = \frac{\delta m}{m} + \frac{\delta V}{V}$$

Vogliamo che l'errore su c non superi ±0.2 g/L, che, espresso come errore relativo, è

$$\frac{\delta c}{c} \leqslant \frac{0.2}{9} \approx 2.22\%$$

Il volume è misurato con accuratezza ±0.5 mL su 100 mL, e quindi

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{0.5}{100} = 0.50\%$$

Sottraendo troviamo il massimo errore relativo che possiamo permetterci sulla massa

$$\frac{\delta m}{m} \leqslant 2.22\% - 0.50\% = 1.72\%$$

che corrisponde a un errore assoluto di

$$\delta m \leqslant 1.72\% \cdot 0.90\,\text{g} \approx 0.0155\,\text{g}$$

Il massimo errore assoluto tollerabile sul peso del soluto è dunque circa

$$\delta m = 0.015\,\text{g}$$

ossia una quindicina di milligrammi (per prudenza, arrotondiamo per difetto: con 0.015 g si resta dentro la tolleranza, con 0.016 la si supererebbe).

Esercizio 57 (p. 61)
Si possiede una soluzione (0.1000 ± 0.0005) molare di NaCl. Si vorrebbero preparare $3.50 \cdot 10^{-2}$ moli di NaCl con una tolleranza massima di 0.5 millimoli. Che volume di soluzione è necessario misurare, e qual è la massima tolleranza ammessa su questa misura?

Soluzione. In un volume V di soluzione di molarità c ci sono $n = c\,V$ moli di NaCl. Noi vogliamo $n = 3.50 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol}$, quindi il volume da misurare è

$$V = \frac{n}{c} = \frac{3.50 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol}}{0.1000\,\mathrm{mol/L}} = 0.350\,\mathrm{L} = 350\,\mathrm{mL}$$

Passiamo alla tolleranza. La formula $n = c\,V$ è il prodotto di due quantità indipendenti — c, nota, e V, che misuriamo — ciascuna delle quali compare una volta sola, quindi gli errori relativi si sommano:

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta c}{c} + \frac{\delta V}{V}$$

La tolleranza richiesta su n è di 0.5 millimoli su 35 millimoli, ossia

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{0.5\,\mathrm{mmol}}{35\,\mathrm{mmol}} \approx 1.43\%$$

mentre la molarità di partenza porta già un errore relativo

$$\frac{\delta c}{c} = \frac{0.0005}{0.1000} = 0.50\%$$

Per il volume ci rimane quindi la differenza

$$\frac{\delta V}{V} = 1.43\% - 0.50\% = 0.93\%$$

che su $V = 350\,\mathrm{mL}$, in termini assoluti, vale

$$\delta V = 0.93\% \cdot 350\,\mathrm{mL} \approx 3.25\,\mathrm{mL}$$

Arrotondando per difetto a una cifra significativa, la massima tolleranza ammessa sulla misura del volume è dunque $\pm 3\,\mathrm{mL}$.

Per controllare che i numeri siano ragionevoli, notiamo che 3 mL su 350 mL sono un po' meno dell'1%, e la tolleranza richiesta è di 0.5 mmol su 35 mmol, cioè una parte su settanta: un po' più dell'1%. Questo è atteso, perché l'incertezza sulla concentrazione della soluzione aggiunge uno 0.5%.

Esercizio 58 (p. 71)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x - 0.01 \cdot x^3$$

per $0 \leqslant x \leqslant 15$.

Soluzione.

1. Comincio col calcolare

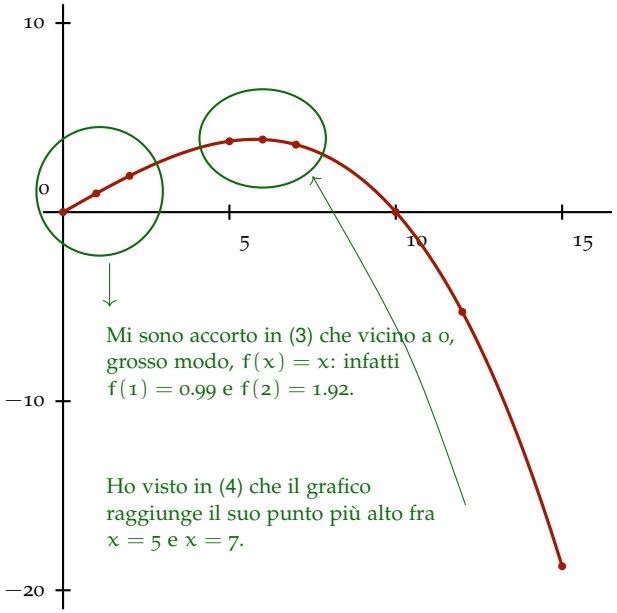
$$f(0) = 0 \qquad f(5) = 3.75 \qquad f(10) = 0 \qquad f(15) = -18.75$$

2. Imposto il grafico e riporto i punti.
3. Desidero indagare meglio l'andamento di f vicino a 0: $f(1) = 0.99$, $f(2) = 1.92$.
4. f toccherà il massimo valore prima o dopo 5? $f(6) = 3.84$, $f(7) = 3.57 \Rightarrow$ probabilmente fra 5 e 7 perché $f(6) > f(5), f(7)$.
5. Per capire meglio il comportamento fra 10 e 15 calcolo $f(12) = -5.28$.

Riassumendo, i valori calcolati sono

x	0	1	2	5	6	7	10	12	15
$f(x)$	0	0.99	1.92	3.75	3.84	3.57	0	-5.28	-18.75

Le ordinate vanno da circa -19 a circa 4, le ascisse da 0 a 15: le due scale possono essere diverse, e conviene scegliere quella delle ordinate in modo che il grafico occupi tutto lo spazio in altezza.



Esercizio 59 (p. 71)
Traccia il grafico della funzione

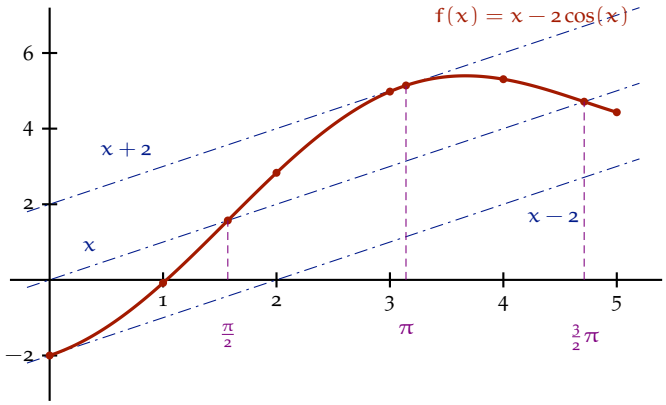
$$f(x) = x - 2\cos(x)$$

per $0 \leqslant x \leqslant 5$. Attenzione: il coseno è in radianti!

Soluzione. Calcolo una tabella di valori:

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-2	-0.08	2.83	4.98	5.31	4.43

Aiuta anche ricordare dove il coseno vale 0 o -1: in $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3}{2}\pi$ si ha $f(x) = x$, in $x = \pi$ si ha $f(x) = x + 2$. Il grafico sale, e verso la fine dell'intervallo ridiscende un poco.



Osservazione: siccome $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, $x - 2\cos(x)$ oscilla attorno a x, fra $x - 2$ e $x + 2$ (le rette tratteggiate).

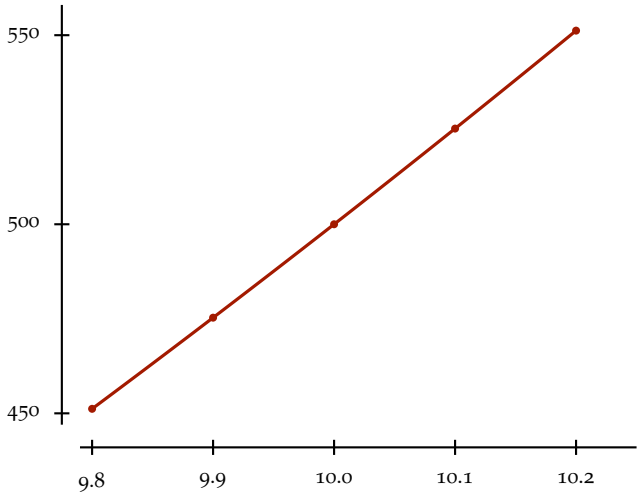
Esercizio 60 (p. 71)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x^3 - 50 \cdot x$$

per $9.8 \leqslant x \leqslant 10.2$.

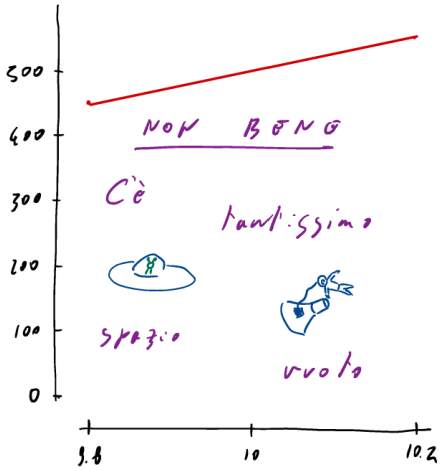
Soluzione.

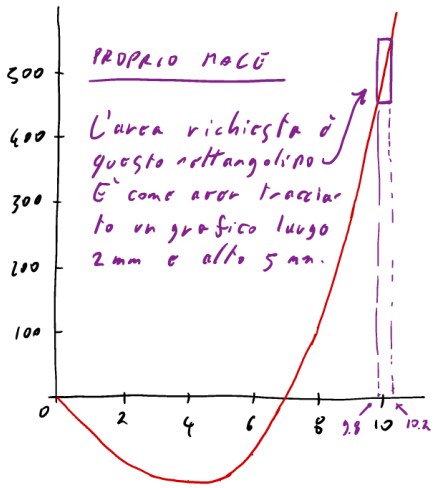
x	f(x)
9.8	451
9.9	475
10	500
10.1	525
10.2	551



Osservazione: sebbene $f(x) = x^3 - 50x$ non sia esattamente l'equazione di una retta, in pratica, questo grafico appare quasi rettilineo.

Nota (Modi per sbagliare questo esercizio)





Esercizio 61 (p. 71)
Traccia il grafico della funzione

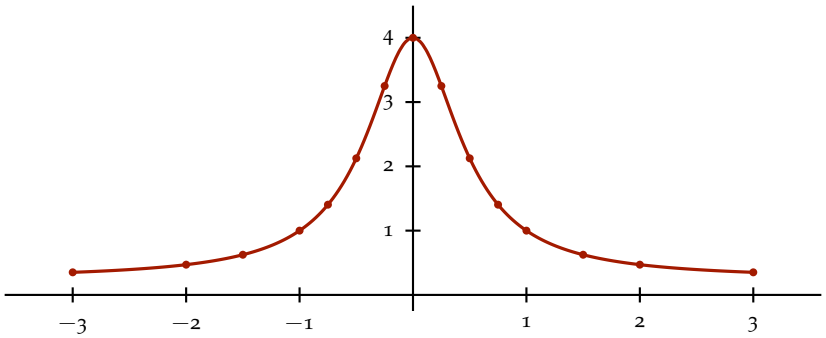
$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{4x^2 + 1}$$

per $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

Soluzione. La funzione è pari, $f(-x) = f(x)$, perché x vi compare solo al quadrato: basta calcolare i valori per $x \geqslant 0$, e il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

x	0	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2	3
$f(x)$	4	3.25	2.13	1.40	1	0.63	0.47	0.35

Fra 0 e 1 la funzione scende rapidamente da 4 a 1: lì conviene infittire i punti. Poi cala sempre più lentamente (per x grande i termini 4 e 1 contano poco, e $f(x)$ si avvicina a $\frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$).



Esercizio 62 (p. 71)
Traccia il grafico della funzione

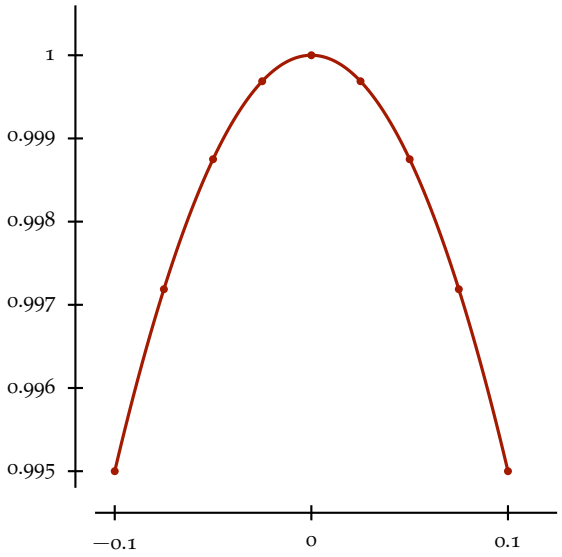
$$f(x) = \cos(x)$$

per $-0.1 \leqslant x \leqslant 0.1$.

Soluzione. Il coseno è pari, $\cos(-x) = \cos(x)$: basta calcolare i valori per $x \geqslant 0$.

x	0	0.025	0.05	0.075	0.1
$\cos(x)$	1	0.99969	0.99875	0.99719	0.99500

Tutti i valori stanno fra 0.995 e 1. Se l'asse delle ordinate partisse da 0, il grafico sarebbe indistinguibile da una retta orizzontale, e non comunicherebbe nulla. Facciamo quindi cominciare le ordinate da 0.995: ora si vede che il grafico è un arco, col punto più alto in $x = 0$.



Quando l'asse delle ordinate non parte da 0, bisogna numerarlo con cura, come qui, perché chi legge il grafico se ne accorga.

Esercizio 63 (p. 72)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

per $-0.1 \leqslant x \leqslant 0.1$.

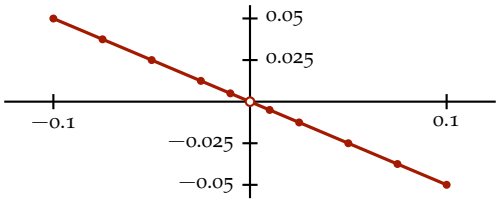
Soluzione. La funzione non è definita in $x = 0$, perché si annulla il denominatore x. Calcolo i valori a sinistra e a destra di 0:

x	0.01	0.025	0.05	0.075	0.1
$f(x)$	−0.00500	−0.01250	−0.02499	−0.03748	−0.04996

x	-0.01	-0.025	-0.05	-0.075	-0.1
$f(x)$	0.00500	0.01250	0.02499	0.03748	0.04996

(Prendo il coseno con almeno otto cifre decimali — $\cos(0.01) = 0.99995000$, e $\cos(0.01) - 1$ è una differenza fra numeri quasi uguali, di cui voglio tre cifre significative.)

Riportati sul grafico, i punti stanno quasi su una retta con pendenza circa $-\frac{1}{2}$. Siccome però la funzione non è definita in $x = 0$, nel grafico c'è un buco, che si indica con un pallino vuoto.



Nota importante
$\frac{\cos(0) - 1}{0} = \frac{0}{0}$: non è definito.

Esercizio 64 (p. 72)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$$

per $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Soluzione. I valori di f sono piccolissimi, perché sono differenze fra numeri molto più grandi che si cancellano quasi del tutto. Per esempio (con il seno in radianti, come sempre)

$$f(0.4) = 0.38941834 - 0.4 + 0.01066667 = 0.00008501$$

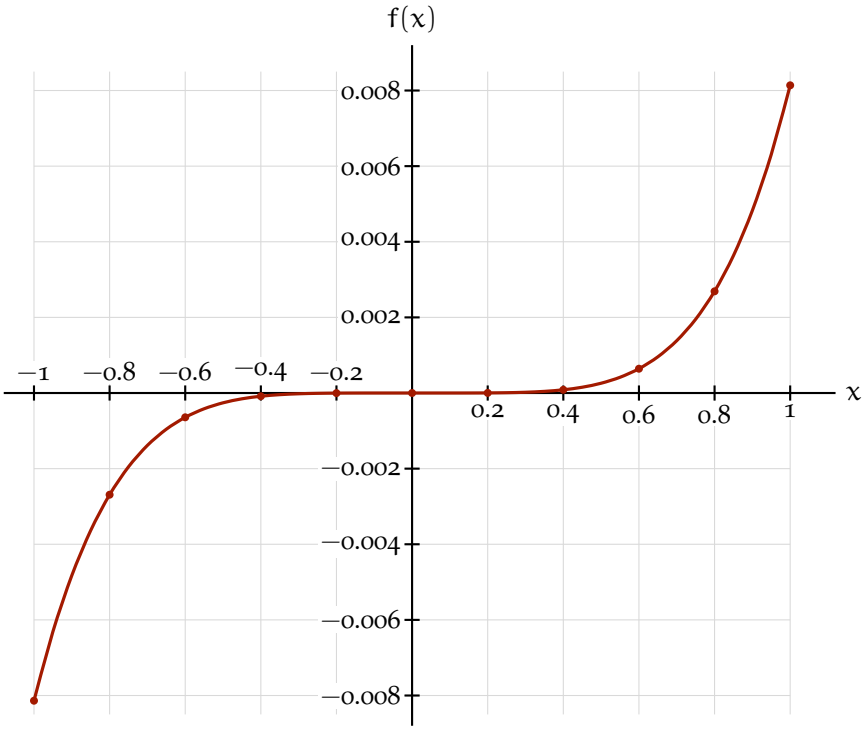
Per comodità, mi calcolo i valori di $1000\, f(x)$

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$1000\, f(x)$	0	0.003	0.085	0.642	2.689	8.138

x		-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-1
$1000\, f(x)$		-0.003	-0.085	-0.642	-2.689	-8.138

(Per calcolare questi valori devi lavorare con almeno sette cifre decimali di precisione: se, per esempio, usassi $\sin(0.4) \approx 0.389$ ti verrebbe $f(0.4) \approx -0.0003$, che ha addirittura il segno sbagliato!)

Per i due assi scelgo scale molto diverse, perché le ascisse coprono un intervallo ampio 2, mentre le ordinate coprono appena 0.016.



Vicino a 0 la funzione è molto piatta — fino a $x = 0.4$ non si stacca visibilmente dall'asse — e poi cresce sempre più in fretta.

Esercizio 65 (p. 72)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$$

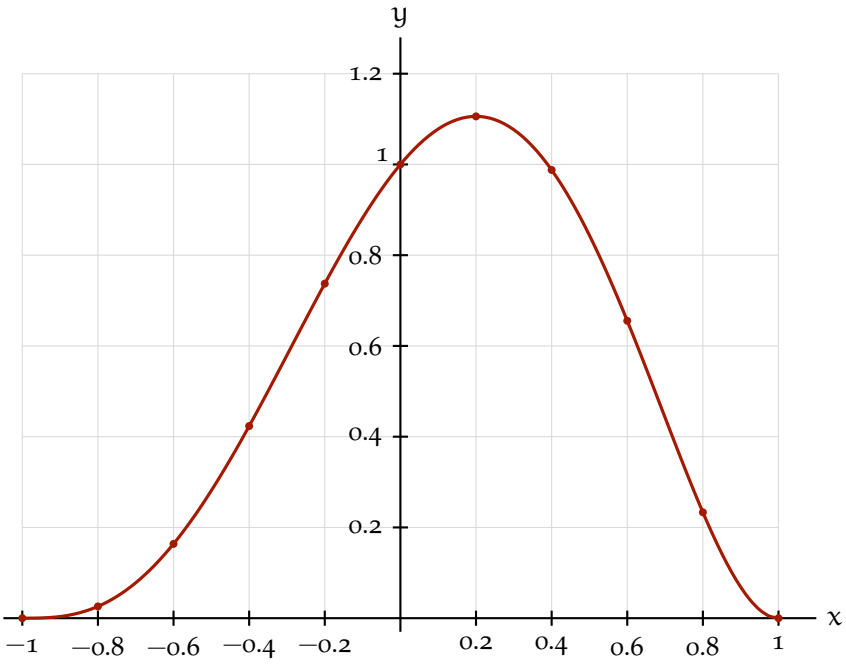
per $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Soluzione. Prima di fare i conti guardo la forma fattorizzata, dalla quale si capiscono già parecchie cose. La funzione si annulla agli estremi dell'intervallo, $f(-1) = f(1) = 0$, e nell'intervallo $(x-1)^2 \geqslant 0$ e $(x+1)^3 \geqslant 0$, quindi il grafico sta tutto sopra l'asse delle ascisse. Vicino a $x = -1$ il fattore $(x+1)^3$ è piccolissimo — in $x = -0.9$ vale 0.001 — quindi la curva parte molto piatta; il fattore $(x-1)^2$ è una parabola con vertice in $x = 1$, per cui la curva si appiattisce anche all'estremo destro del grafico.

Calcolo poi i valori di f con passo 0.2:

x	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$f(x)$	0	0.026	0.164	0.423	0.737	1	1.106	0.988	0.655	0.233	0

Il valore più alto della tabella è $f(0.2) = 1.106$, quindi il grafico ha una gobba un po' spostata a destra.



Test 66 (p. 76)
Risolvi la disequazione $2^x < 5^x$.

Soluzione. Dividendo ambo i membri per la quantità positiva 2^x:

$$\underbrace{\frac{2^x}{2^x}}_{=1} < \underbrace{\frac{5^x}{2^x}}_{=\left(\frac{5}{2}\right)^x} \iff \underbrace{1}_{\left(\frac{5}{2}\right)^0} < \left(\frac{5}{2}\right)^x \iff \left(\frac{5}{2}\right)^0 < \left(\frac{5}{2}\right)^x \underset{\text{poiché } \frac{5}{2}>1}{\iff} 0 < x$$

Test 67 (p. 76)
Sapendo che $10^{3x} = 64$, quanto vale 100^x?

Soluzione. Analizziamo prima la quantità cercata

$$100^x = \left(10^2\right)^x = 10^{2\cdot x} = 10^{x\cdot 2} = \left(10^x\right)^2$$

Si usa due volte la proprietà $\left(b^{\square}\right)^{\triangle} = b^{\square\cdot\triangle}$.

Ci basta quindi capire quanto valga 10^x. Ripetendo il procedimento su 10^{3x} vediamo che

$$64 = 10^{3\cdot x} = 10^{x\cdot 3} = \left(10^x\right)^3 \qquad \Longrightarrow \qquad 10^x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Quindi, sostituendo,

$$100^x = \ldots = \left(10^x\right)^2 = 4^2 = 16$$

Test 68 (p. 76)
Sapendo che $8^x = 2.7 \cdot 10^4$, quanto vale 2^x?

Soluzione. Procedendo come nell'esercizio precedente

$$2.7 \cdot 10^4 = 8^x = \left(2^3\right)^x = \left(2^x\right)^3 \qquad \Longrightarrow \qquad 2^x = \sqrt[3]{2.7 \cdot 10^4}$$

Resta da calcolare $\sqrt[3]{2.7 \cdot 10^4}$:

$$\sqrt[3]{\underbrace{2.7 \cdot 10^4}_{27\cdot 10^3}} = \sqrt[3]{27 \cdot 10^3} = \left(27 \cdot 10^3\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{3\cdot\frac{1}{3}} = 30$$

Si usano $\sqrt[n]{\square} = \square^{\frac{1}{n}}$ e $(\square \cdot \triangle)^x = \square^x \cdot \triangle^x$; poi $\sqrt[3]{27} = 3$ e $10^1 = 10$.

Test 69 (p. 76)
Metti in ordine crescente $4^{1.5}$, $10^{0.5}$, 5.

Soluzione. Possiamo intanto calcolare

$$4^{1.5} = 4^1 \cdot 4^{0.5} = 4 \cdot \sqrt{4} = 8$$

Inoltre $10^{0.5} = \sqrt{10} \approx 3.2$. Quindi l'ordine crescente corretto è

$$10^{0.5} \;<\; 5 \;<\; 4^{1.5}$$

Test 70 (p. 76)
Risolvi $1000 \cdot 10^x = 100^{x-7}$.

Soluzione.

$$10^{3+x} = \underbrace{1000}_{10^3} \cdot 10^x = 100^{x-7} = \left(10^2\right)^{x-7} = 10^{2\cdot(x-7)}$$

Confrontando i due estremi della catena,

$$10^{3+x} = 10^{2\cdot(x-7)} \qquad \Longrightarrow \qquad 3 + x = 2 \cdot (x-7) \qquad \Longrightarrow \qquad x = 17$$

Test 71 (p. 77)
Risolvi $10^{2x} + 10^x - 2 = 0$.

Soluzione. Usando l'identità $10^{2x} = \left(10^x\right)^2$, l'equazione diventa

$$\left(10^x\right)^2 + 10^x - 2 = 0$$

che è un'equazione di secondo grado nell'indeterminata 10^x. Riscriviamo quindi l'equazione ponendo $y = 10^x$:

$$y^2 + y - 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Se $y = 1$, allora $10^x = 1$, quindi $x = 0$. D'altro canto $y = -2$ è impossibile, perché avremmo $10^x = -2$, e l'esponenziale 10^x è necessariamente positivo. In conclusione, c'è la sola soluzione $x = 0$.

Test 72 (p. 82)
Sapendo che $\log_e(x) = 10$, quanto vale $\log_e\left(x \cdot \sqrt{x}\right)$?

Soluzione. Applicando le proprietà dei logaritmi

$$\log_e\left(x \cdot \sqrt{x}\right) = \log_e(x) + \log_e\left(\sqrt{x}\right) = \underbrace{\log_e(x)}_{10} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\log_e(x)}_{5} = 15$$

Test 73 (p. 82)
Sapendo che $\log_{10}(x) = 12.4$, quanto vale $\log_{100}(x)$?

Soluzione. Applicando la formula di cambiamento di base

$$\log_{100}(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(100)} = \frac{12.4}{2} = 6.2$$

Test 74 (p. 82)

Calcola $\log_2\left(\frac{8^{3.7}}{4}\right)$.

Soluzione. Metodo 1 (proprietà dell'esponenziale). Siccome è richiesto il logaritmo in base 2, iniziamo con lo scrivere l'argomento del logaritmo, $8^{3.7}/4$, come potenza di 2:

$$\frac{8^{3.7}}{4} = \frac{\left(2^3\right)^{3.7}}{2^2} = \frac{2^{3\cdot 3.7}}{2^2} = 2^{3\cdot 3.7-2} = 2^{9.1}$$

ora, usando l'identità $\log_b\left(b^y\right) = y$,

$$\log_2\left(\frac{8^{3.7}}{4}\right) = \log_2\left(2^{9.1}\right) = 9.1$$

Metodo 2 (proprietà dei logaritmi).

$$\log_2\left(\frac{8^{3.7}}{4}\right) = \log_2\left(8^{3.7}\right) - \log_2(4) = 3.7 \cdot \underbrace{\log_2(8)}_{=3} - \underbrace{\log_2(4)}_{=2} = 3.7 \cdot 3 - 2 = 9.1$$

$$\log_2(8) = 3 \text{ siccome } 2^3 = 8; \quad \log_2(4) = 2 \text{ siccome } 2^2 = 4.$$

Osservazione
In pratica, i due approcci a questo esercizio sono due maniere diverse di scrivere precisamente i medesimi calcoli.

Esercizio 75 (p. 82)
Il numero dei batteri in una coltura cresce del 50% ogni sei ore.

- Di quanto cresce, in percentuale, in dodici ore? E in tre?
- Quanto tempo, in ore e minuti, impiegano i batteri per crescere del 10%? E per raddoppiare?

Soluzione. Sappiamo che incrementare una quantità dello x% significa moltiplicarla per $1 + \frac{x}{100}$. Il numero dei batteri si moltiplica quindi per 1.5 ogni sei ore. Di conseguenza il numero di batteri N_t al tempo t vale

$$N_t = N_0 \cdot 1.5^{\frac{t}{6\,h}}$$

Possiamo dunque scrivere il numero dei batteri dopo dodici ore dall'inizio della crescita:

$$N_{12\,h} = N_0 \cdot 1.5^{\frac{12\,h}{6\,h}} = N_0 \cdot 1.5^2 = N_0 \cdot 2.25$$

Detto $x_{12\,h}$% l'incremento percentuale della popolazione in 12 ore abbiamo altresì $N_{12\,h} = N_0 \cdot \left(1 + \frac{x_{12\,h}}{100}\right)$. Di conseguenza

$$\cancel{N_0} \cdot 2.25 = \cancel{N_0} \cdot \left(1 + \frac{x_{12\,h}}{100}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad x_{12\,h} = 125$$

Procedendo alla stessa maniera per $x_{3\,h}$

$$N_{3\,h} = N_0 \cdot 1.5^{\frac{3\,h}{6\,h}} = N_0 \cdot \sqrt{1.5} \qquad N_{3\,h} = N_0 \left(1 + \frac{x_{3\,h}}{100}\right)$$

$$x_{3\,h} = 100 \cdot \left(\sqrt{1.5} - 1\right) \approx 22.5$$

Gli incrementi percentuali cercati sono quindi 125% e $\approx 22.5\%$.

Per la seconda domanda è necessario procedere in senso inverso. Dobbiamo trovare a che tempo $t_{10\%}$ la coltura è cresciuta del 10%, ossia $N_{t_{10\%}} = N_0 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)$. Abbiamo quindi l'equazione

$$\cancel{N_0} \cdot 1.5^{\frac{t_{10\%}}{6\,h}} = \cancel{N_0} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{10}{100}\right)}_{1.1} \qquad \Longrightarrow \qquad t_{10\%} = 6\,h \cdot \log_{1.5}(1.1) = 1.4104\,h$$

Similmente, detto $t_{.2}$ il secondo tempo richiesto,

$$\cancel{N_0} \cdot 1.5^{\frac{t_{.2}}{6\,h}} = \cancel{N_0} \cdot 2 \qquad \Longrightarrow \qquad t_{.2} = 6\,h \cdot \log_{1.5}(2) = 10.2571\,h$$

I tempi richiesti sono quindi $\approx 1\,h\,25\,min$ e $\approx 10\,h\,15\,min$.

Esercizio 76 (p. 82)
Il numero di batteri nella coltura X raddoppia ogni 18 ore. Quello della coltura Y ogni 24 ore. Inizialmente, il numero di individui nella coltura X è un decimo di quello di Y.

1. Dopo quanto tempo le due colture contengono il medesimo numero di batteri?
2. Quanto vale il rapporto fra questo numero e il numero di individui inizialmente in X?
3. Si è misurato che al tempo $t = 0$ una terza coltura Z contiene $(1.5 \pm 0.1) \cdot 10^7$ individui. Al tempo $t = 10\,h \pm 20\,min$, la stessa coltura ne contiene $(2.5 \pm 0.2) \cdot 10^7$. Calcola quanto tempo impiega Z per raddoppiare indicando l'errore relativo.

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Chiamiamo X_0 il numero iniziale di individui in X; quello iniziale in Y è allora $10X_0$. Le due colture raddoppiano ogni 18 e ogni 24 ore, quindi

$$X_t = X_0 \cdot 2^{\frac{t}{18\,h}} \qquad Y_t = 10X_0 \cdot 2^{\frac{t}{24\,h}}$$

Le due quantità coincidono quando

$$\cancel{X_0} \cdot 2^{\frac{t}{18}} = 10\cancel{X_0} \cdot 2^{\frac{t}{24}} \qquad \Longrightarrow \qquad 2^{\frac{t}{18} - \frac{t}{24}} = 10$$

(si sono divisi ambo i membri per $X_0 \cdot 2^{t/24}$). L'esponente si semplifica:

$$\frac{t}{18} - \frac{t}{24} = t \cdot \frac{4-3}{72} = \frac{t}{72}$$

quindi $2^{\frac{t}{72}} = 10$, ossia

$$\frac{t}{72\,\mathrm{h}} = \log_2(10) = 3.3219 \qquad \Longrightarrow \qquad t = 72\log_2(10)\,\mathrm{h} \approx 239\,\mathrm{h}$$

(poco meno di dieci giorni). □

Soluzione della domanda 2. Il rapporto cercato è

$$\frac{X_t}{X_0} = 2^{\frac{t}{18\,\mathrm{h}}} = 2^{\frac{72\log_2(10)}{18}} = 2^{4\log_2(10)} = \left(2^{\log_2(10)}\right)^4 = 10^4$$

— un risultato esatto: la X deve moltiplicarsi per diecimila. □

Soluzione della domanda 3. Per la coltura Z scriviamo $N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{\tau}}$, dove τ è il tempo di raddoppio cercato. Allora

$$2^{\frac{t}{\tau}} = \frac{N_t}{N_0} = \frac{2.5 \pm 0.2}{1.5 \pm 0.1} = 1.6667 \pm \underbrace{14.7\%}_{8\%+6.7\%}$$

e quindi

$$\tau = \frac{t}{\underbrace{\log_2(N_t/N_0)}_{D}}$$

Come sempre con i logaritmi, l'incertezza su D si trova calcolando gli estremi dell'intervallo:

$$\underbrace{\log_2\left(\frac{2.5-0.2}{1.5+0.1}\right)}_{0.524} \leqslant D \leqslant \underbrace{\log_2\left(\frac{2.5+0.2}{1.5-0.1}\right)}_{0.948}$$

da cui $D = 0.737 \pm 0.212$, ossia $\pm 28.8\%$ (il valore centrale è $\log_2(1.6667)$, la semiampiezza $(0.948 - 0.524)/2$). L'errore su $t = 10\,\mathrm{h} \pm 20\,\mathrm{min}$ è $\pm 3.3\%$, e nel quoziente gli errori relativi si sommano:

$$\tau = \frac{10\,\mathrm{h}}{0.737 \pm 28.8\%} = 13.57\,\mathrm{h} \pm 32.1\% = 14\,\mathrm{h} \pm 30\%$$

(ossia $\tau = (14 \pm 4)\,\mathrm{h}$: il risultato è poco preciso perché si tratta di un'estrapolazione, in quanto la coltura, nelle dieci ore in cui è stata osservata, non ha fatto in tempo a raddoppiare neppure una volta). □

Esercizio 77 (p. 83)
In una soluzione acquosa un principio attivo si decompone, e la sua concentrazione decresce esponenzialmente nel tempo. A un certo istante la concentrazione è $(7.9 \pm 0.1) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol/L}$. Esattamente sei ore dopo è scesa a $(9.6 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol/L}$. Qual è il tempo di dimezzamento del principio attivo? Che errore relativo hai su questo risultato?

Soluzione. La concentrazione al tempo t è $c_t = c_0 \cdot 2^{-\frac{t}{\tau}}$, dove $c_0 = (7.9 \pm 0.1) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol/L}$ e τ è il tempo di dimezzamento richiesto. Quindi:

$$(9.6 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol/L} = (7.9 \pm 0.1) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol/L} \cdot 2^{-\frac{6\,\mathrm{h}}{\tau}}$$

e, moltiplicando ambo i membri per $2^{\frac{6\,\mathrm{h}}{\tau}}$ e dividendo per c_t,

$$2^{\frac{6\,\mathrm{h}}{\tau}} = \frac{7.9 \pm 0.1}{0.96 \pm 0.01} = 8.229 \pm 2.31\% = 8.229 \pm 0.190$$

(l'errore relativo del numeratore è $\pm 1.27\%$, quello del denominatore $\pm 1.04\%$: si sommano). Dunque

$$\tau = \frac{6\,\mathrm{h}}{\underbrace{\log_2(8.229 \pm 0.190)}_{\text{chiamiamo questo D}}}$$

Ora calcoliamo l'intervallo di incertezza del denominatore D.

$$\underbrace{\log_2(8.229 - 0.190)}_{3.007} \leqslant \mathrm{D} \leqslant \underbrace{\log_2(8.229 + 0.190)}_{3.074}$$

Di conseguenza

$$\mathrm{D} = \underbrace{3.041}_{\log_2(8.229)} \pm 0.033 \qquad \text{ossia } \pm 1.1\% \text{ in termini relativi}$$

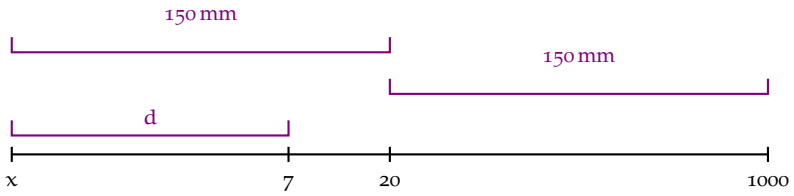
e quindi, con $6\,\mathrm{h} = 360\,\mathrm{min}$ esatti,

$$\tau = \frac{360\,\mathrm{min}}{3.041 \pm 1.1\%} = 118.4\,\mathrm{min} \pm 1.1\% = (118.4 \pm 1.3)\,\mathrm{min}$$

(l'errore comincia con la cifra 1: lo teniamo a due cifre significative). Poco meno di due ore: in sei ore il principio attivo si è dimezzato circa tre volte, come dice D. Notiamo che il logaritmo ha ridotto a circa la metà l'errore relativo del rapporto, dal 2.3% all'1.1%: più dimezzamenti si osservano, più preciso è il risultato.

Esercizio 78 (p. 92)
Vogliamo costruire una scala logaritmica lunga 30 cm. Abbiamo stabilito che il numero 20 si trovi esattamente nel mezzo della scala, mentre il numero 1000 deve trovarsi all'estremo destro. Che numero è indicato sull'estremo sinistro della scala? A che distanza, in millimetri, dall'estremo sinistro si trova il numero 7?

Soluzione. La situazione è come rappresentata in figura.



L'esercizio chiede il numero x e la distanza d. Per x abbiamo la seguente proporzione

$$\log_{10}(1000) - \log_{10}(20) : 150\,\text{mm} = \log_{10}(20) - \log_{10}(x) : 150\,\text{mm}$$

da cui calcoliamo

$$\underbrace{\left(\log_{10}(1000) - \log_{10}(20)\right)}_{\log_{10}\left(\frac{1000}{20}\right)} \cdot \cancel{150\,\text{mm}} = \underbrace{\left(\log_{10}(20) - \log_{10}(x)\right)}_{\log_{10}\left(\frac{20}{x}\right)} \cdot \cancel{150\,\text{mm}}$$

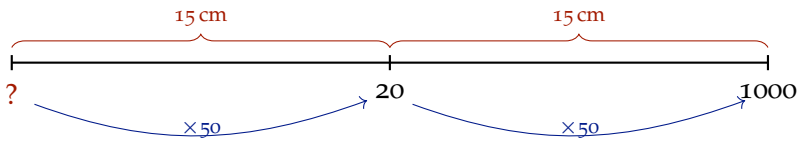
$$\log_{10}\left(\frac{1000}{20}\right) = \log_{10}\left(\frac{20}{x}\right) \implies \frac{1000}{20} = \frac{20}{x} \implies x = \frac{20 \cdot 20}{1000} = 0.4$$

Per d abbiamo

$$\log_{10}(7) - \log_{10}(x) : d = \log_{10}(20) - \log_{10}(x) : 150\,\text{mm}$$

$$d = \frac{\log_{10}(7) - \log_{10}(0.4)}{\log_{10}(20) - \log_{10}(0.4)} \cdot 150\,\text{mm} \approx 110\,\text{mm}$$

Un ragionamento più rapido, che però permette di rispondere solo alla prima domanda, è come segue.



Siccome lo spostamento di 15 cm che porta dal 20 centrale al 1000 all'estremo destro corrisponde ad una moltiplicazione per 50, l'identico spostamento che porta dall'estremo sinistro al centro deve corrispondere ad una moltiplicazione per lo stesso fattore. A sinistra abbiamo quindi

$$? = \frac{\text{valore centrale}}{50} = \frac{20}{50} = 0.4$$

Esercizio 79 (p. 92)

1. Su una scala logaritmica, è segnato il numero 100 000. Alla distanza di 10 cm dal 100 000 è segnato 10 000 000. A che distanza dal 100 000 si trovano, su questa scala, i punti 1 000 000, 5 000 000 e 200 000?
2. Costruisci un grafico semi-logaritmico che rappresenti la crescita esponenziale di una popolazione costituita, al tempo 0, da 200 000 individui, e dopo 24 ore da 5 000 000 di individui. Quanti individui ci sono dopo 12 ore?
3. Se il numero iniziale di individui alla domanda 2 è stato misurato con un errore assoluto stimato in $\pm 10\,000$, e il numero finale con un errore di $\pm 250\,000$, come puoi stimare l'errore sulla risposta?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Facciamo i calcoli per il 200 000, gli altri casi sono analoghi. Chiamiamo d la distanza fra il punto che rappresenta 100 000 e quello del 200 000. Abbiamo la proporzione

$$d : \underbrace{\log_{10}(200\,000)}_{2\cdot 10^5} - \underbrace{\log_{10}(100\,000)}_{10^5} = 10\,\text{cm} : \underbrace{\log_{10}(10\,000\,000)}_{10^7} - \underbrace{\log_{10}(100\,000)}_{10^5}$$

dove il primo membro della proporzione vale $\log_{10}\left(\frac{2\cdot 10^5}{10^5}\right) = \log_{10}(2)$ e il secondo $\log_{10}\left(\frac{10^7}{10^5}\right) = 2$. Quindi

$$d = \frac{\log_{10}(2)\cdot 10\,\text{cm}}{2} \approx 1.5\,\text{cm}$$

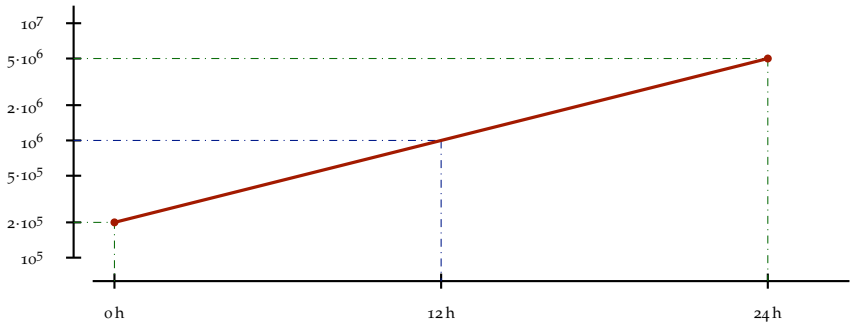
Ripetendo calcoli analoghi per gli altri dati otteniamo

valore	distanza
1 000 000	$\frac{\log_{10}(10)\cdot 10\,\text{cm}}{2} = 5\,\text{cm}$
5 000 000	$\frac{\log_{10}(50)\cdot 10\,\text{cm}}{2} \approx 8.5\,\text{cm}$
200 000	$\frac{\log_{10}(2)\cdot 10\,\text{cm}}{2} \approx 1.5\,\text{cm}$

□

Nota
In queste situazioni sentiti libero di scrivere "ripetendo calcoli analoghi". Un esercizio di matematica non deve essere un esercizio di bella scrittura.

Soluzione della domanda 2. Sappiamo dalla teoria che questo grafico è una retta. Basta quindi impostare il diagramma (per esempio sfruttando la scala logaritmica della domanda 1), individuare i punti $(0, 200\,000)$ e $(24\,\text{h}, 5\,000\,000)$, quindi connetterli con un segmento di retta.



Non è difficile stimare, leggendo il grafico, che a 12 h ci sono 10^6 individui. Per ottenere questo risultato analiticamente, determiniamo i parametri della funzione esponenziale $\text{individui} = a \cdot 10^{k \cdot \text{tempo}}$.

$$\begin{cases} 2 \cdot 10^5 = a \cdot 10^{k \cdot 0\,h} & \implies \quad a = 2 \cdot 10^5 \\ 5 \cdot 10^6 = a \cdot 10^{k \cdot 24\,h} & \implies \quad 5 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{k \cdot 24\,h} \end{cases}$$

$$10^{k \cdot 24\,h} = 25 \qquad \implies \qquad k = \frac{\log_{10}(25)}{24}\,h^{-1}$$

Sostituendo ora tempo $= 12\,h$,

$$\text{individui} = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{\frac{\log_{10}(25)}{24}\cancel{h^{-1}} \cdot 12\cancel{h}} = 2 \cdot 10^5 \cdot 5 = 10^6$$

All'esponente resta $\frac{\log_{10}(25)}{2} = \log_{10}(\sqrt{25}) = \log_{10}(5)$, e $10^{\log_{10}(5)} = 5$. □

> **Nota**
> In una soluzione scritta per l'esame, i calcoli riportati qui in verde non sono necessari: li aggiungo per maggior chiarezza.

Soluzione della domanda 3. Dobbiamo risolvere la domanda 2 con $n_0 = 200\,000 \pm 10\,000$ individui al tempo 0 e $n_{24\,h} = 5\,000\,000 \pm 250\,000$ individui al tempo 24 h. Cominciamo col ricavare una formula per il valore cercato $n_{12\,h}$.

$$\begin{cases} n_0 = a \cdot 10^{k \cdot 0\,h} & \implies \quad a = n_0 \\ n_{24\,h} = a \cdot 10^{k \cdot 24\,h} & \implies \quad n_{24\,h} = n_0 \cdot 10^{k \cdot 24\,h} \quad \implies \quad k = \dfrac{\log_{10}\left(\frac{n_{24\,h}}{n_0}\right)}{24\,h} \end{cases}$$

$$n_{12\,h} = a \cdot 10^{k \cdot 12\,h} = n_0 \cdot 10^{\frac{\log_{10}\left(\frac{n_{24\,h}}{n_0}\right)}{\cancel{24\,h}} \cdot 12\cancel{h}} = n_0 \left(\frac{n_{24\,h}}{n_0}\right)^{\overbrace{0.5}^{\frac{12}{24}}} = \sqrt{n_0 n_{24\,h}}$$

Sostituendo i dati, abbiamo

$$\begin{aligned} n_{12\,h} = \sqrt{n_0 n_{24\,h}} &= \sqrt{(2.0 \pm 0.1) \cdot 10^5\ (5.0 \pm 0.25) \cdot 10^6} \\ &= \sqrt{(2.0 \pm 5\%) \cdot 10^5\ (5.0 \pm 5\%) \cdot 10^6} \\ &= \sqrt{(1 \pm 10\%) \cdot 10^{12}} = (1.00 \pm \underbrace{5\%}_{\frac{1}{2}10\%}) \cdot 10^6 \end{aligned}$$ □

Esercizio 80 (p. 92)
La concentrazione di un farmaco nel plasma di un paziente è di $50\,\mu mol/mL$ al tempo t_0, e decresce esponenzialmente con un tempo di dimezzamento di 16 ore. Rappresenta l'andamento di questa concentrazione nelle 72 ore successive a t_0, sia per mezzo di un diagramma cartesiano, sia per mezzo di un diagramma semilogaritmico.

Soluzione. Misuriamo il tempo t in ore a partire da t_0. Ogni 16 ore la concentrazione si dimezza, quindi

$$c(t) = 50\,\mu mol/mL \cdot 2^{-\frac{t}{16\,h}}$$

Alla fine del periodo, $t = 72\,h$, i dimezzamenti sono $72/16 = 4.5$, e

$$c(72\,h) = \frac{50\,\mu mol/mL}{2^{4.5}} = \frac{50}{22.63}\,\frac{\mu mol}{mL} \approx 2.21\,\frac{\mu mol}{mL}$$

Tabella dei valori, con t in ore e c in $\mu mol/mL$:

t	0	16	32	48	64	72
c	50.0	25.0	12.5	6.25	3.13	2.21

Diagramma cartesiano.

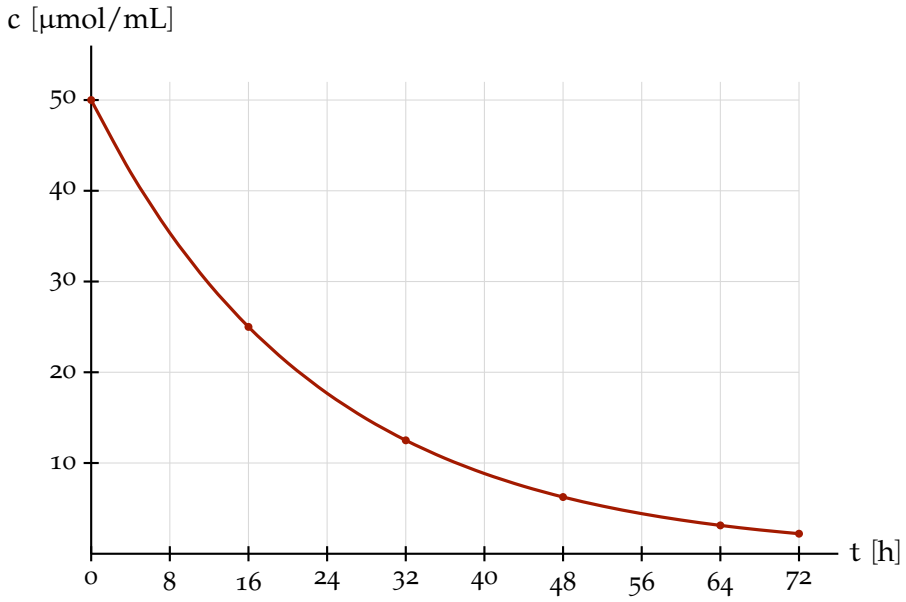
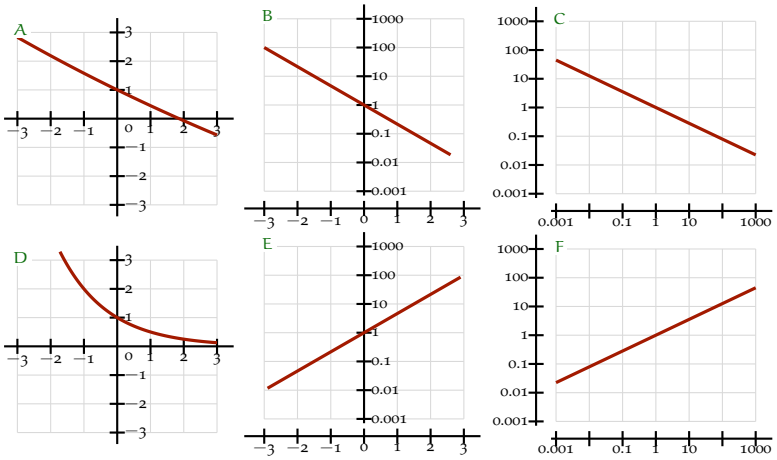


Diagramma semilogaritmico (ordinate in scala logaritmica). Le ordinate vanno da 2.21 a 50: bastano due decadi, da 1 a 100. La concentrazione decresce esponenzialmente, quindi il grafico è una retta: basta congiungere i punti (0, 50) e (72, 2.21). Riportiamo comunque anche i punti della tabella.



Verifica di buon senso: sulla retta la concentrazione scende di una decade, cioè di un fattore 10, in $16\,\text{h} \cdot \log_2(10) \approx 16 \cdot 3.32\,\text{h} \approx 53.2\,\text{h}$: infatti la retta parte da 50 e passa per 5 poco dopo $t = 52$. E in 72 ore, 4.5 dimezzamenti, la concentrazione si riduce di un fattore 22.6, meno di un fattore 100: il grafico scende di meno di due decadi.

Esercizio 81 (p. 92)
Determina quali dei grafici seguenti rappresentano un decadimento esponenziale, e, per ciascuno di questi, trova il tempo di dimezzamento. In tutti i grafici le ascisse sono indicate in secondi.



Soluzione.

A — NO perché assume anche valori negativi.

B — sì retta su grafico semi-log → esponenziale, e decrescente.

C — NO retta su grafico log-log → potenza.

D — sì, o almeno non c'è ragione di escluderlo.

E — NO retta su grafico semi-log → esponenziale, ma crescente (non è un decadimento).

F — NO retta su grafico log-log → potenza, inoltre crescente.

Per i tempi di dimezzamento si usa la forma

$$f(t) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = \text{tempo di dimezzamento}$$

Per B si legge dal grafico $f(0\,s) = 1$ e $f(3\,s) = 0.01$, quindi

$$\begin{cases} f(0\,s) = 1 & \implies \quad A = 1 \\ f(3\,s) = 0.01 & \implies \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3\,s}{\tau}} = 0.01 \quad \implies \quad \tau = \dfrac{3\,s}{\log_{\frac{1}{2}}(0.01)} \approx 0.45\,s \end{cases}$$

Per D si legge dal grafico $f(-1\,s) \approx 2$, $f(0\,s) \approx 1$, $f(1\,s) \approx \frac{1}{2}$: quindi il valore di f si dimezza grosso modo nel tempo di 1 s.

Esercizio 82 (p. 93)
La concentrazione di un farmaco nel plasma di un paziente, dopo la somministrazione per via endovenosa, decresce esponenzialmente con un tempo di dimezzamento di 8.0 ore.

1. Quanto tempo occorre perché una concentrazione iniziale di 5.0 mg/L scenda a 0.10 mg/L?
2. A ogni somministrazione di una dose, la concentrazione plasmatica aumenta, molto rapidamente, di 5.0 mg/L, poi riprende a decrescere esponenzialmente. Il paziente riceve la prima dose al tempo $t = 0$, e poi una dose ogni 12.0 ore. Rappresenta con un diagramma cartesiano l'andamento della concentrazione plasmatica nelle 48 ore successive alla prima somministrazione.
3. A lungo andare, fra quali valori oscilla la concentrazione plasmatica del paziente?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Ogni 8.0 ore la concentrazione si dimezza:

$$c(t) = 5.0\,\text{mg/L} \cdot 2^{-\frac{t}{8.0\,h}}$$

Imponiamo $c(t) = 0.10\,\text{mg/L}$:

$$2^{\frac{t}{8.0\,h}} = \frac{5.0}{0.10} = 50 \qquad \implies \qquad t = 8.0\,h \cdot \log_2(50) \approx 8.0\,h \cdot 5.64 \approx 45.2\,h$$

cioè circa 45 ore. (Verifica: 50 sta fra $2^5 = 32$ e $2^6 = 64$, quindi servono fra 5 e 6 dimezzamenti, cioè fra 40 e 48 ore.) □

Soluzione della domanda 2. Fra una dose e la successiva passano 12.0 ore, cioè 1.5 tempi di dimezzamento: in questo intervallo la concentrazione si moltiplica per

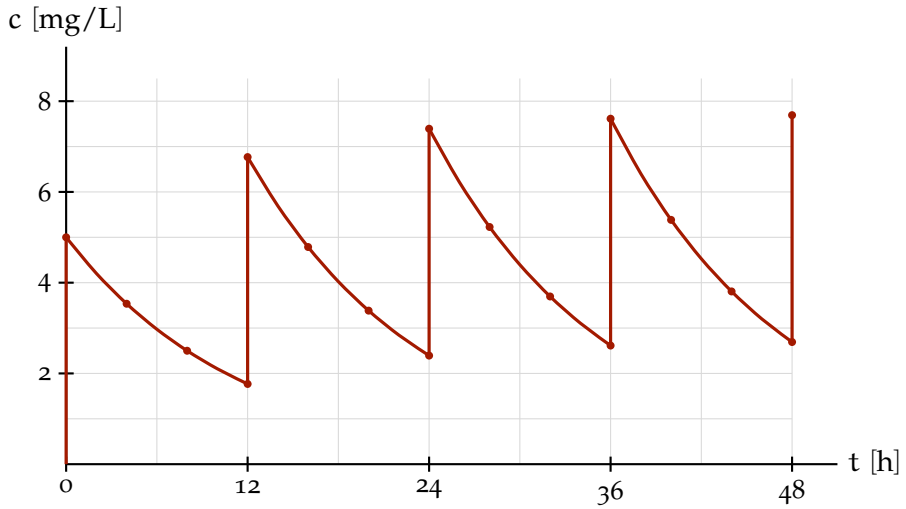
$$r = 2^{-\frac{12.0}{8.0}} = 2^{-1.5} \approx 0.354$$

Subito dopo ogni dose la concentrazione è quella appena prima, più 5.0 mg/L. Tabella dei valori, in mg/L:

t [h]	0	12	24	36	48
prima della dose	0	1.77	2.39	2.61	2.69
dopo la dose	5.00	6.77	7.39	7.61	7.69

(Per esempio: $5.00 \cdot 0.354 = 1.77$, poi $1.77 + 5.00 = 6.77$, poi $6.77 \cdot 0.354 \approx 2.39$, e così via. Per tracciare le curve fra una dose e l'altra conviene calcolare anche qualche valore intermedio: dopo 4 ore la concentrazione è moltiplicata per $2^{-0.5} \approx 0.707$, dopo 8 ore per 0.5.) I valori intermedi, in mg/L:

t [h]	4	8	16	20	28	32	40	44
c	3.54	2.50	4.79	3.38	5.23	3.70	5.38	3.81



□

Soluzione della domanda 3. I valori subito dopo le dosi, 5.00, 6.77, 7.39, 7.61, 7.69, ... crescono, ma sempre di meno: si avvicinano a un valore di regime c_{max}. A regime, fra una dose e la successiva la concentrazione scende da c_{max} a $c_{min} = r\, c_{max}$, e la dose la riporta a c_{max}. Abbiamo quindi l'equazione

$$c_{max} = c_{min} + 5.0\,\text{mg/L} = r\, c_{max} + 5.0\,\text{mg/L}$$

Da cui

$$c_{max} = \frac{5.0\,\mathrm{mg/L}}{1-r} = \frac{5.0\,\mathrm{mg/L}}{0.646} \approx 7.7\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{L}}$$

e $c_{min} = 0.354 \cdot 7.73\,\mathrm{mg/L} \approx 2.7\,\mathrm{mg/L}$. A lungo andare la concentrazione oscilla quindi fra 2.7 mg/L e 7.7 mg/L. □

Esercizio 83 (p. 93)
La crescita di una popolazione di microorganismi segue la curva logistica

$$P(t) = \frac{P_0\,K\,e^{t/\tau}}{K - P_0 + P_0\,e^{t/\tau}}$$

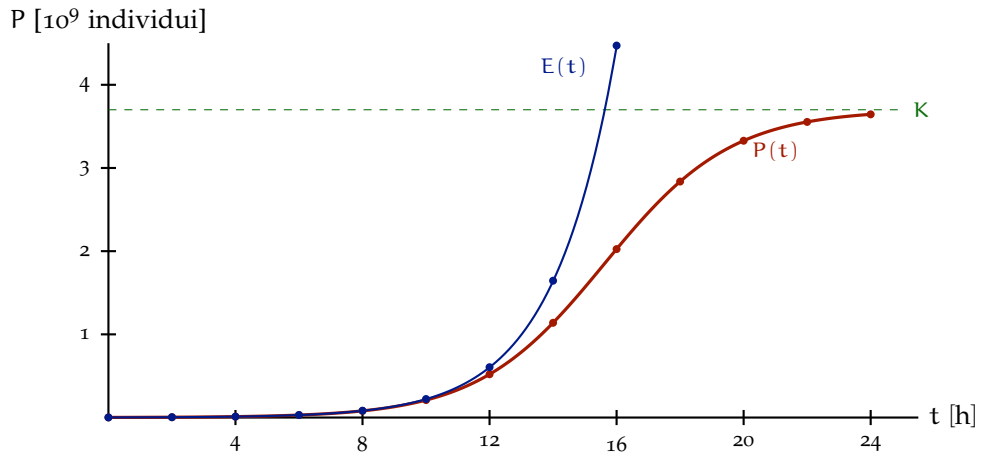
con $P_0 = 1.50 \cdot 10^6$, $K = 3.70 \cdot 10^9$ e $\tau = 2.00\,\mathrm{h}$.

1. Rappresenta l'andamento della popolazione, per tempi compresi fra 0 e 24 ore, in un diagramma cartesiano.
2. Rappresenta la medesima funzione mettendo la popolazione in scala logaritmica.
3. Nelle prime ore, la crescita è approssimativamente esponenziale: rappresenta questa funzione per mezzo di un'espressione analitica, e aggiungi il grafico dell'esponenziale ai due diagrammi precedenti.

Soluzione. Cominciamo con una tabella dei valori, ogni due ore. Nell'ultima colonna c'è già l'esponenziale della domanda 3, $E(t) = P_0\,e^{t/\tau}$, per confronto.

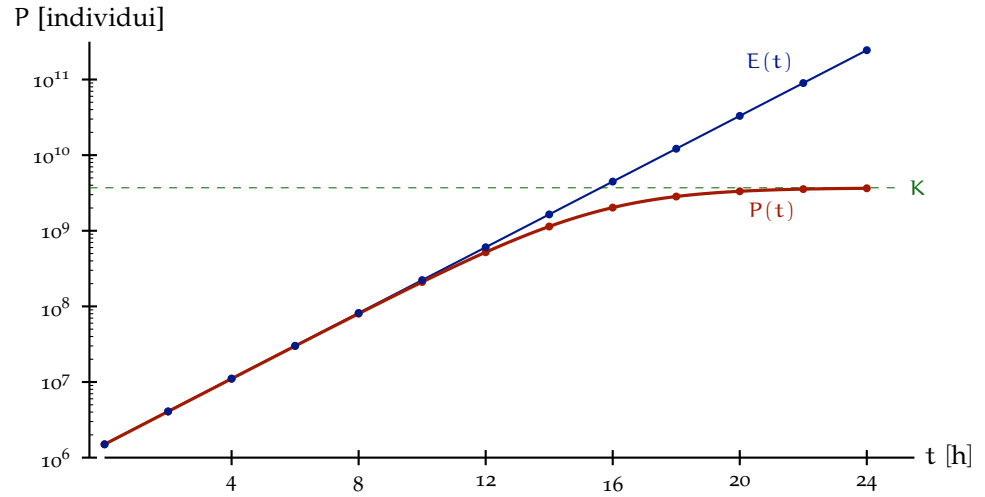
t	P(t)	E(t)
0 h	$1.50 \cdot 10^6$	$1.50 \cdot 10^6$
2 h	$4.07 \cdot 10^6$	$4.08 \cdot 10^6$
4 h	$1.11 \cdot 10^7$	$1.11 \cdot 10^7$
6 h	$2.99 \cdot 10^7$	$3.01 \cdot 10^7$
8 h	$8.02 \cdot 10^7$	$8.19 \cdot 10^7$
10 h	$2.10 \cdot 10^8$	$2.23 \cdot 10^8$
12 h	$5.20 \cdot 10^8$	$6.05 \cdot 10^8$
14 h	$1.14 \cdot 10^9$	$1.64 \cdot 10^9$
16 h	$2.03 \cdot 10^9$	$4.47 \cdot 10^9$
18 h	$2.84 \cdot 10^9$	$1.22 \cdot 10^{10}$
20 h	$3.33 \cdot 10^9$	$3.30 \cdot 10^{10}$
22 h	$3.55 \cdot 10^9$	$8.98 \cdot 10^{10}$
24 h	$3.64 \cdot 10^9$	$2.44 \cdot 10^{11}$

Soluzione della domanda 1. In un diagramma cartesiano conviene misurare la popolazione in miliardi (unità di 10^9). Per tempi grandi $e^{t/\tau}$ diventa enorme, il denominatore è dominato da $P_0\,e^{t/\tau}$ e $P(t)$ si avvicina a K: la curva ha l'asintoto orizzontale $P = K = 3.70 \cdot 10^9$ (tratteggiato). Nelle prime ore, invece, la popolazione è così piccola, rispetto alla scala del grafico, che la curva è schiacciata sull'asse delle ascisse.



(La curva blu $E(t)$ è l'esponenziale della domanda 3.) □

Soluzione della domanda 2.



Il grafico mostra bene le due fasi della crescita: nelle prime ore la curva è una retta (crescita esponenziale), poi piega e si appiattisce sull'asintoto K (la popolazione satura). Nel diagramma cartesiano la prima fase era invisibile. □

Soluzione della domanda 3. Finché $P_0\, e^{t/\tau}$ è piccolo rispetto a K, al denominatore $K - P_0 + P_0\, e^{t/\tau} \approx K$ (anche P_0 è trascurabile rispetto a K), e quindi

$$P(t) \approx \frac{P_0\, K\, e^{t/\tau}}{K} = P_0\, e^{t/\tau} = 1.50 \cdot 10^6 \cdot e^{\frac{t}{2.00\,\mathrm{h}}}$$

In scala logaritmica questa è una retta: passa per $1.50 \cdot 10^6$ al tempo 0 e cresce di un fattore e ogni 2 ore, cioè di un fattore 10 ogni $2\,\mathrm{h} \cdot \log_e(10) \approx 4.6\,\mathrm{h}$ (nel grafico, una decade ogni 4.6 ore). I grafici di $E(t)$ sono le curve blu nei due diagrammi: la tabella e il diagramma logaritmico mostrano che l'approssimazione è buona per le prime 8–10 ore (errore del 2% a 8 ore, del 6% a 10), e poi le due curve si separano. □

Esercizio 84 (p. 98)
Determina, con tre cifre significative, la soluzione dell'equazione

$$e^{-x} = x$$

Soluzione. Poniamo $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = x$. La prima è decrescente e vale 1 in $x = 0$; la seconda è crescente e parte da 0: si incontrano una volta sola. Con due tentativi restringiamo il campo:

$$f(0.5) \approx 0.607 > 0.5 \qquad f(0.6) \approx 0.549 < 0.6$$

quindi la soluzione è fra 0.5 e 0.6, e partiamo da $\underline{x}_0 = 0.5$, $\overline{x}_0 = 0.6$. (Siamo nel *secondo* caso: f sta sopra a sinistra e sotto a destra, quindi $f(z) > g(z)$ vuol dire che la soluzione sta a destra di z.)

			passo					
$f(x)$	$g(x)$	x	0	1	2	3	4	5
$0.6065 > 0.5$		0.5	$\underline{x}_0$					
$0.5769 > 0.55$		0.55	z	$\underline{x}_1$	$\underline{x}_2$			
$0.5712 > 0.56$		0.56			z	$\underline{x}_3$		
$0.5672 > 0.567$		0.567				z	$\underline{x}_4$	$\underline{x}_5$
$0.5669 < 0.5675$		0.5675					z	$\overline{x}_5$
$0.5655 < 0.57$		0.57		z	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_4$	
$0.5488 < 0.6$		0.6	$\overline{x}_0$	$\overline{x}_1$				

Al passo 5 la soluzione è intrappolata fra 0.567 e 0.5675: con tre cifre significative

$$x = 0.567$$

(il valore esatto è 0.56714…, la cosiddetta costante omega).

Esercizio 85 (p. 99)
La funzione $f(x)$ assume i valori seguenti.

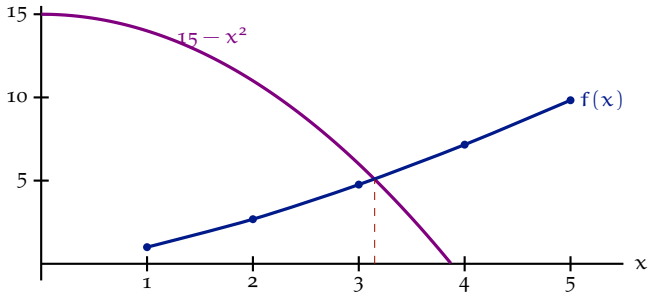
x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1.00	2.68	4.76	7.16	9.83

Determina, usando il metodo dell'interpolazione lineare, un'approssimazione del valore di $f(3.7)$ ed una della soluzione dell'equazione $f(x) = 15 - x^2$. Esprimi i risultati arrotondati al centesimo.

Soluzione. **Il valore di** $f(3.7)$**.** Il numero 3.7 è compreso fra le ascisse tabulate $x_0 = 3$ e $x_1 = 4$, quindi

$$f(3.7) \approx (3.7 - 3) \cdot \frac{7.16 - 4.76}{4 - 3} + 4.76 = 0.7 \cdot 2.40 + 4.76 = 6.44$$

La soluzione di $f(x) = 15 - x^2$**.** Un grafico approssimativo, con i punti della tabella e la parabola $15 - x^2$, mostra dove cercare.



La soluzione x è compresa fra 3 e 4: in $x = 3$ la parabola sta sopra ($6 > 4.76$), in $x = 4$ sotto ($-1 < 7.16$). Fra 3 e 4 approssimiamo $f(x)$ con l'interpolazione lineare, come sopra:

$$f(x) \approx (x-3) \cdot 2.40 + 4.76 = 2.40\,x - 2.44$$

e l'equazione diventa di secondo grado:

$$2.40\,x - 2.44 = 15 - x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 + 2.40\,x - 17.44 = 0$$

$$x = \frac{-2.40 \pm \sqrt{2.40^2 + 4 \cdot 17.44}}{2} = \frac{-2.40 \pm \sqrt{75.52}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad x \approx 3.15 \quad \text{oppure} \quad x \approx -5.55$$

Soltanto la prima ha senso, perché l'approssimazione di $f(x)$ che stiamo usando vale solo per x compreso fra 3 e 4. La soluzione cercata è

$$x = 3.15$$

Esercizio 86 (p. 99)
Trova tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sin(x) = 1 - 0.2\,x$$

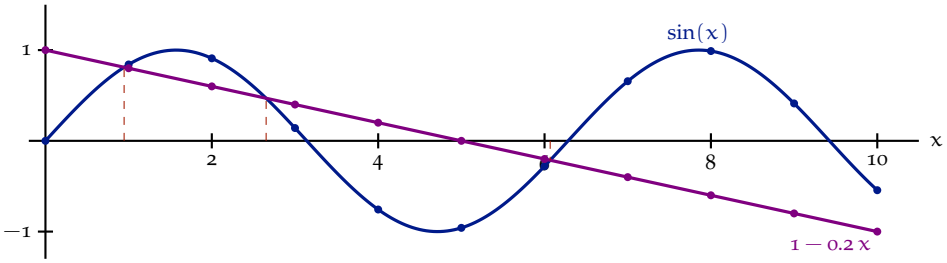
arrotondate alla seconda cifra decimale.

Soluzione. Il seno sta fra -1 e 1, quindi le soluzioni devono avere

$$-1 \leqslant 1 - 0.2\,x \leqslant 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \leqslant x \leqslant 10$$

Tracciamo i due grafici in questo intervallo (il seno in radianti). Per disegnarli calcolo alcuni valori.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sin(x)$	0.00	0.84	0.91	0.14	−0.76	−0.96	−0.28	0.66	0.99	0.41	−0.54
$1 - 0.2\,x$	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0.0	−0.2	−0.4	−0.6	−0.8	−1.0



I grafici si incontrano tre volte: vicino a 1, fra 2.5 e 3, e fra 6 e 6.5. Calcoliamo ciascuna soluzione per bisezione. Vicino a 1 partiamo da $\underline{x}_0 = 0.5$ e $\overline{x}_0 = 1$ (primo caso: a sinistra il seno sta sotto la retta):

			passo					
$\sin(x)$	$1 - 0.2\,x$	x	0	1	2	3	4	5
$0.479 < 0.900$		0.5	$\underline{x}_0$					
$0.783 < 0.820$		0.9	z	$\underline{x}_1$	$\underline{x}_2$			
$0.796 < 0.816$		0.92			z	$\underline{x}_3$		
$0.808 < 0.812$		0.94				z	$\underline{x}_4$	
$0.810 < 0.811$		0.945					z	$\underline{x}_5$
$0.813 > 0.810$		0.95		z	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$
$0.841 > 0.800$		1	$\overline{x}_0$	$\overline{x}_1$				

La prima soluzione è fra 0.945 e 0.95: arrotondata ai centesimi, $x_1 = 0.95$. Allo stesso modo, fra 2.5 e 3 (secondo caso)

			passo					
$\sin(x)$	$1 - 0.2\,x$	x	0	1	2	3	4	5
$0.598 > 0.500$		2.5	$\underline{x}_0$	$\underline{x}_1$				
$0.516 > 0.480$		2.6		z	$\underline{x}_2$			
$0.472 > 0.470$		2.65			z	$\underline{x}_3$	$\underline{x}_4$	$\underline{x}_5$
$0.468 < 0.469$		2.655					z	$\overline{x}_5$
$0.463 < 0.468$		2.66				z	$\overline{x}_4$	
$0.427 < 0.460$		2.7	z	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$		
$0.141 < 0.400$		3	$\overline{x}_0$					

quindi $x_2 = 2.65$, e fra 6 e 6.5 (di nuovo primo caso)

			passo					
$\sin(x)$	$1 - 0.2\,x$	x	0	1	2	3	4	5
$-0.279 < -0.200$		6	$\underline{x}_0$	$\underline{x}_1$				
$-0.231 < -0.210$		6.05		z	$\underline{x}_2$	$\underline{x}_3$		
$-0.221 < -0.212$		6.06				z	$\underline{x}_4$	
$-0.216 < -0.213$		6.065					z	$\underline{x}_5$
$-0.212 > -0.214$		6.07			z	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$
$-0.182 > -0.220$		6.1	z	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$			
$0.215 > -0.300$		6.5	$\overline{x}_0$					

quindi $x_3 = 6.07$.

L'ultimo passo, con z a metà fra due centesimi consecutivi, serve a decidere l'arrotondamento: per esempio la prima soluzione è fra 0.945 e 0.95, e quindi si arrotonda a 0.95 e non a 0.94.

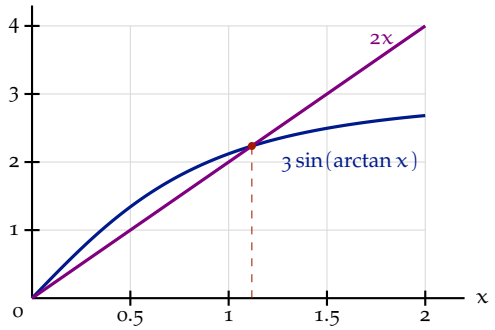
Esercizio 87 (p. 99)
Trova la soluzione positiva dell'equazione

$$2x = 3\sin\big(\arctan(x)\big)$$

con almeno tre cifre significative: in modo esatto se puoi, altrimenti in maniera approssimata.

Soluzione. Localizziamo la soluzione con un grafico. Il seno non supera 1, quindi il membro di destra non supera 3, mentre $2x > 3$ per $x > 1.5$: basta disegnare i due membri fra 0 e 2. Per tracciare la curva calcolo alcuni valori.

x	0	0.5	1	1.5	2
$3\sin(\arctan x)$	0	1.342	2.121	2.496	2.683



Oltre che in $x = 0$, i grafici si incontrano una sola volta, fra 1 e 1.5. Procediamo per bisezione da $\underline{x}_0 = 1$ e $\overline{x}_0 = 1.5$ (primo caso: a sinistra la retta sta sotto la curva).

$2x$	$3\sin(\arctan x)$	x	passo 0	1	2	3	4	5
2.000	< 2.121	1	$\underline{x}_0$	$\underline{x}_1$				
2.200	< 2.220	1.1		z	$\underline{x}_2$	$\underline{x}_3$	$\underline{x}_4$	
2.230	< 2.233	1.115					z	$\underline{x}_5$
2.240	> 2.238	1.12				z	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$
2.300	> 2.264	1.15			z	$\overline{x}_3$		
2.400	> 2.305	1.2		z	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$		
3.000	> 2.496	1.5	$\overline{x}_0$					

La soluzione è compresa fra 1.115 e 1.12: con tre cifre significative

$$x = 1.12$$

Si poteva fare esattamente. In un triangolo rettangolo con i cateti lunghi 1 e x, l'angolo opposto al cateto x è $\arctan(x)$, e l'ipotenusa è $\sqrt{1+x^2}$. Quindi

$$\sin\big(\arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

e l'equazione diventa

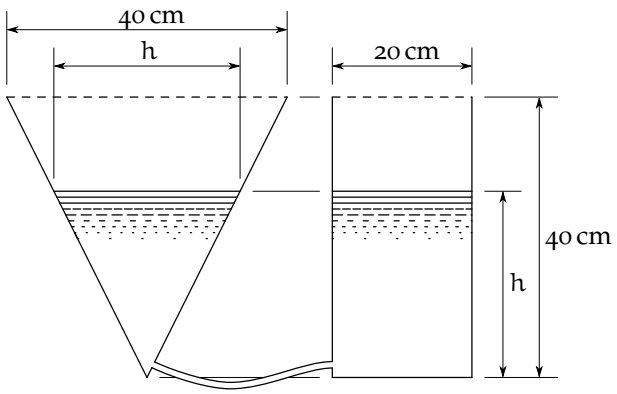
$$2x = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{1+x^2} = \frac{3}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$

La soluzione positiva è

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.1180\ldots$$

che conferma il risultato numerico.

Esercizio 88 (p. 99)
L'apparato rappresentato in figura è costituito da due contenitori, uno conico ed uno cilindrico, disposti con il loro asse in posizione verticale. In essi si introduce un certo volume V di acqua. Un tubicino di volume trascurabile connette i due contenitori, così che, per la legge dei vasi comunicanti, il livello h raggiunto dal liquido nei due contenitori coincide.



1. Determina l'espressione analitica della funzione che associa al livello h il corrispondente volume $V(h)$; traccia quindi un grafico cartesiano di questa funzione.
2. Calcola, con la precisione di tre cifre significative, a che livello bisogna riempire l'apparecchio affinché esso contenga 15.0 litri d'acqua.
3. Supponendo che il volume della domanda precedente sia noto con un errore di $\pm 2\%$, che errore assoluto abbiamo sulla risposta?

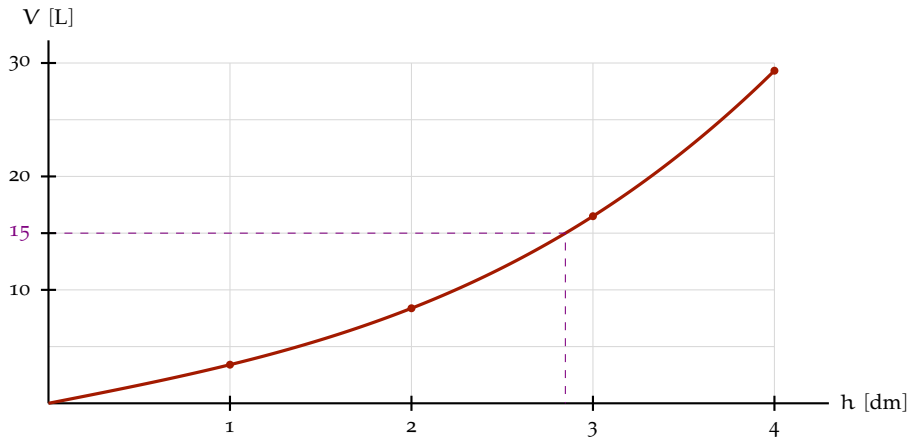
Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Conviene misurare le lunghezze in decimetri, così i volumi vengono in dm^3, cioè in litri. L'acqua forma un cono di altezza h e, come dice la figura, di diametro h, quindi di raggio $\frac{h}{2}$; e un cilindro di altezza h e raggio 1 dm. Quindi

$$V(h) = \underbrace{\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h}_{\text{cono}} + \underbrace{\pi \cdot (1\,\mathrm{dm})^2 \cdot h}_{\text{cilindro}} = \pi\left(\frac{h^3}{12} + h \cdot 1\,\mathrm{dm}^2\right)$$

I contenitori sono alti 4 dm, quindi tracciamo il grafico per h fra 0 e 4 dm.

h [dm]	0	1	2	3	4
V [L]	0	3.40	8.38	16.49	29.32



□

Soluzione della domanda 2. Il grafico mostra che il volume di 15.0 litri si raggiunge per h fra 2.7 e 2.9 dm. Procediamo per bisezione, confrontando $V(h)$, in litri, con il valore costante 15.0 (primo caso: V cresce).

			passo					
$V(h)$	15.0	h	0	1	2	3	4	5
$13.64 < 15.00$		2.7	$\underline{x}_0$					
$14.54 < 15.00$		2.8	z	$\underline{x}_1$	$\underline{x}_2$			
$14.82 < 15.00$		2.83			z	$\underline{x}_3$		
$14.92 < 15.00$		2.84				z	$\underline{x}_4$	
$14.97 < 15.00$		2.845					z	$\underline{x}_5$
$15.01 > 15.00$		2.85		z	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$
$15.50 > 15.00$		2.9	$\overline{x}_0$	$\overline{x}_1$				

La soluzione è fra 2.845 e 2.85 dm, quindi con tre cifre significative

$$h = 2.85\,\text{dm} = 28.5\,\text{cm}$$

□

Soluzione della domanda 3. Il volume è $(15.0 \pm 2\%)\,\text{L} = (15.0 \pm 0.3)\,\text{L}$, cioè l'intervallo di incertezza va da 14.7 a 15.3 L. Siccome $V(h)$ cresce con h, gli estremi dell'intervallo di incertezza di h corrispondono a quelli di V. Procedendo per bisezione come sopra si trova che 14.7 L corrisponde a $h \approx 28.2$ cm, e 15.3 L a $h \approx 28.8$ cm. Quindi

$$\delta h = \frac{28.8\,\text{cm} - 28.2\,\text{cm}}{2} = 0.3\,\text{cm} \qquad h = (28.5 \pm 0.3)\,\text{cm}$$

□

Test 89 (p. 124)
Calcola la deviazione standard di 0, 1, 1.5, 2, 3.

Soluzione. Le formule che si possono usare sono due, entrambe conducono alla risposta corretta:

$$\sigma = \sqrt{\text{media dei quadrati degli scarti}} \qquad \sigma = \sqrt{\text{media dei quadrati} - \text{media}^2}$$

Con la prima: la media è $\mu = \frac{0+1+1.5+2+3}{5} = 1.5$, gli scarti sono -1.5, -0.5, 0, 0.5, 1.5, quindi

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-1.5)^2 + (-0.5)^2 + 0^2 + 0.5^2 + 1.5^2}{5}} = \sqrt{1} = 1$$

Con la seconda:

$$\sigma = \sqrt{\frac{0^2 + 1^2 + 1.5^2 + 2^2 + 3^2}{5} - 1.5^2} = \sqrt{3.25 - 2.25} = 1$$

Test 90 (p. 124)
Calcola la deviazione standard di 3, 3, 6, 6, 6, 12.

Soluzione. Direttamente: $\mu = \frac{3+3+6+6+6+12}{6} = 6$ e

$$\sigma = \sqrt{\frac{(3-6)^2 \cdot 2 + (6-6)^2 \cdot 3 + (12-6)^2}{6}} = \sqrt{\frac{18+0+36}{6}} = 3$$

(il $\cdot 2$ e il $\cdot 3$ contano le ripetizioni).

A volte, calcoli come questi possono essere abbreviati dalle seguenti osservazioni.

- Sommando una costante A a tutti i numeri di un certo insieme, si somma A alla loro media, mentre la deviazione standard non cambia.
- Moltiplicando tutti i numeri di un certo insieme per la medesima costante positiva B, sia la loro media sia la loro deviazione standard si moltiplicano per B.

Sommiamo -6 ai numeri dati, ottenendo -3, -3, 0, 0, 0, 6: la deviazione standard non cambia. Ora moltiplichiamo per $\frac{1}{3}$, ottenendo -1, -1, 0, 0, 0, 2: la deviazione standard si divide per 3. Quindi

$$\frac{\sigma}{3} = \sqrt{\frac{(-1)^2 \cdot 2 + 0^2 \cdot 3 + 2^2}{6} - \left(\frac{(-1) \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 2}{6}\right)^2} = \sqrt{1 - 0} = 1$$

da cui $\sigma = 3$.

Test 91 (p. 124)
Quanto vale la mediana dei numeri 7, −7, 1, 2, −8, 15, 0?

Soluzione. Basta mettere i numeri in ordine e prendere quello centrale:

$$-8 \quad -7 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 7 \quad 15$$

Test 92 (p. 124)
A che percentile equivale il primo quartile?

Soluzione. Il primo quartile di una variabile statistica è il valore di quella variabile al di sotto del quale cade un quarto della popolazione. Quindi è il 25-esimo percentile, ossia il valore sotto cui cade il 25% della popolazione. (Con le definizioni del capitolo 17: $Q_1 = q_{0.25} = P_{25}$.)

Test 93 (p. 125)
A che percentile equivale la mediana?

Soluzione. Sotto la mediana cade metà della popolazione. Quindi la mediana è il 50-esimo percentile. (Con le definizioni del capitolo 17: $\tilde{X} = q_{0.5} = P_{50}$.)

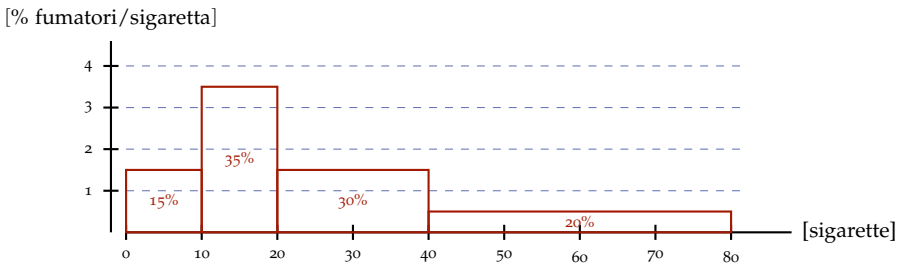
Esercizio 94 (p. 125)
In un campione di fumatori, il numero di sigarette consumate al giorno si distribuisce come segue.

sigarette	fumatori
$0 \leqslant \ldots < 10$	225
$10 \leqslant \ldots < 20$	525
$20 \leqslant \ldots < 40$	450
$40 \leqslant \ldots < 80$	300
$80 \leqslant \ldots$	0

Traccia l'istogramma, con in ordinata la percentuale di fumatori per sigaretta. Qual è il numero mediano di sigarette fumate al giorno? Approssimativamente, che percentuale del totale dei fumatori consuma più di 30 sigarette al giorno? Dai una stima del numero medio di sigarette al giorno spiegando il tuo ragionamento.

Soluzione. L'asse delle ordinate è in percentuale di fumatori per sigaretta, quindi le aree delle colonne rappresentano percentuali di fumatori. Il totale è $225 + 525 + 450 + 300$, cioè 1500 individui, e le percentuali sono

sigarette	fumatori	% fumatori	altezza
0–10	225	15%	$\frac{15\%}{10\text{ sig.}} = 1.5\,\%/\text{sig.}$
10–20	525	35%	$\frac{35\%}{10\text{ sig.}} = 3.5\,\%/\text{sig.}$
20–40	450	30%	$\frac{30\%}{20\text{ sig.}} = 1.5\,\%/\text{sig.}$
40–80	300	20%	$\frac{20\%}{40\text{ sig.}} = 0.5\,\%/\text{sig.}$



La mediana è la soglia che divide a metà l'area dell'istogramma: il $15\% + 35\% = 50\%$ dei fumatori sta sotto le 20 sigarette al giorno, quindi la mediana è 20 sigarette.

Più di 30 sigarette: è l'area a destra di 30, cioè metà della colonna del 30% più tutta quella del 20%: $\frac{1}{2} \cdot 30\% + 20\% = 35\%$.

Per la media, il meglio che possiamo fare è supporre che i fumatori di ciascuna colonna siano equidistribuiti, quindi fumino in media quanto il centro della colonna. Su 100 fumatori:

$$15 \cdot \frac{0+10}{2} + 35 \cdot \frac{10+20}{2} + 30 \cdot \frac{20+40}{2} + 20 \cdot \frac{40+80}{2} = 2700$$

sigarette al giorno, quindi in media $\frac{2700}{100} = 27$ sigarette al giorno a testa.

Nota: la media, 27, è maggiore della mediana, 20. Questo era atteso, perché l'istogramma ha una *coda* verso destra.

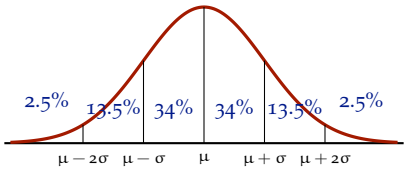
Test 95 (p. 133)
In una distribuzione gaussiana, che percentuale della popolazione ricade

1. entro una deviazione standard dalla media?
2. entro due deviazioni standard dalla media?
3. fra la media e la media più una deviazione standard?
4. fra la media meno due deviazioni standard e la media?

Soluzione. A queste domande possiamo rispondere ricordando due fatti mnemonici: il 68% della popolazione ricade entro una deviazione standard dalla media, il 95% entro due. Questi due numeri rispondono alle prime due domande: 68% e 95%. Sottraendo le due aree fra loro, e dal totale del 100%, otteniamo

$$95\% - 68\% = 27\% \qquad 100\% - 95\% = 5\%$$

e sfruttando la simmetria della gaussiana

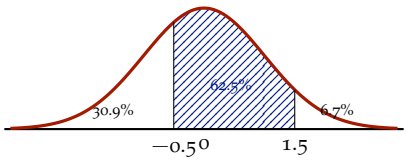


Questa figura permette di rispondere immediatamente alle domande rimanenti: fra la media e la media più una deviazione standard cade il 34%; fra la media meno due deviazioni standard e la media il $13.5\% + 34\% = 47.5\%$. (Non conviene memorizzare le cifre di questa figura: si ricavano dal 68% e dal 95%, che invece conviene sapere.)

Esercizio 96 (p. 133)
Usando la tavola della gaussiana (appendice C), trova la percentuale di una popolazione distribuita in maniera gaussiana che ha coordinata standard

1. $z < 1.5$;
2. $z > -0.5$;
3. $-0.5 < z < 1.5$.

Soluzione. Dalla tavola, $\Phi(1.5) = 93.32\%$ e $\Phi(-0.5) = 30.85\%$.



1. $z < 1.5$: è l'area a sinistra di 1.5, cioè $\Phi(1.5) = 93.32\%$.
2. $z > -0.5$: è l'area a destra di -0.5, cioè

$$100\% - \Phi(-0.5) = 100\% - 30.85\% = 69.15\%$$

   (Per simmetria è anche $\Phi(0.5)$.)
3. $-0.5 < z < 1.5$: l'area tratteggiata, $\Phi(1.5) - \Phi(-0.5) = 93.32\% - 30.85\% = 62.47\%$.

Esercizio 97 (p. 133)
Il peso delle compresse prodotte da una macchina è distribuito in maniera gaussiana, con media 500 mg e deviazione standard 8 mg.

1. Che percentuale delle compresse pesa meno di 490 mg?
2. Che percentuale pesa fra 490 mg e 512 mg?
3. Si vogliono scartare le compresse troppo leggere, e soltanto quelle: il 5% più leggero della produzione. Sotto quale peso si scarta una compressa?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Calcoliamo la coordinata standard di 490 mg,

$$z = \frac{490\,\text{mg} - 500\,\text{mg}}{8\,\text{mg}} = -1.25$$

e leggiamo nella tavola che sotto 490 mg c'è il $\Phi(-1.25) = 10.56\% \approx 10.6\%$ delle compresse. □

Soluzione della domanda 2. Per 512 mg otteniamo

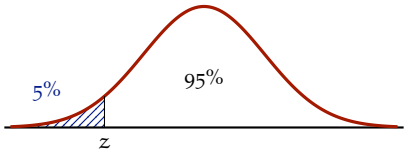
$$z = \frac{512\,\text{mg} - 500\,\text{mg}}{8\,\text{mg}} = 1.5$$

quindi fra 490 mg e 512 mg c'è

$$\Phi(1.5) - \Phi(-1.25) = 93.32\% - 10.56\% \approx 82.8\%$$

□

Soluzione della domanda 3. Cerchiamo la coordinata standard z che ha a sinistra il 5% delle compresse, ossia quella per cui $\Phi(z) = 5\%$.



Interpolando nella tavola fra le righe -1.65 (4.95%) e -1.60 (5.48%) troviamo

$$z = -1.65 + \frac{-1.60 - (-1.65)}{5.48 - 4.95}\,(5.00 - 4.95) = -1.645$$

e quindi dobbiamo scartare le compresse che pesano meno di

$$500\,\text{mg} - 1.645 \cdot 8\,\text{mg} \approx 486.8\,\text{mg}$$

(Il coefficiente non è 1.96: con 1.96 lasceremmo fuori il 5% *in tutto*, ossia il 2.5% per parte, mentre a noi interessa una coda sola.) □

Esercizio 98 (p. 133)
Supponiamo che, in una certa popolazione, la pressione arteriosa sistolica sia distribuita in maniera gaussiana, con media 125 mmHg e deviazione standard 15 mmHg.

1. Che percentuale della popolazione ha una pressione sistolica di almeno 140 mmHg?
2. Una persona ha una pressione sistolica di 110 mmHg. A che percentile si colloca, approssimativamente?
3. Quanto vale il 90-esimo percentile della pressione sistolica?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. La coordinata standard di 140 mmHg è

$$z = \frac{140\,\text{mmHg} - 125\,\text{mmHg}}{15\,\text{mmHg}} = 1$$

quindi oltre 1 c'è il

$$100\% - \Phi(1) = 100\% - 84.13\% \approx 15.9\%$$

della popolazione. □

Soluzione della domanda 2. La coordinata standard di 110 mmHg è

$$z = \frac{110\,\text{mmHg} - 125\,\text{mmHg}}{15\,\text{mmHg}} = -1$$

e sotto -1 c'è il $\Phi(-1) = 15.87\%$ (lo stesso 15.9% che sta sopra 1, per simmetria). La persona si colloca quindi circa al 16-esimo percentile. □

Soluzione della domanda 3. Il 90-esimo percentile è il valore sotto cui sta il 90% della popolazione: $\Phi(z) = 90\%$. Interpolando fra le righe 1.25 (89.44%) e 1.30 (90.32%),

$$z = 1.25 + \frac{1.30 - 1.25}{90.32 - 89.44}(90.00 - 89.44) = 1.282$$

quindi il 90-esimo percentile è

$$125\,\text{mmHg} + 1.282 \cdot 15\,\text{mmHg} \approx 144\,\text{mmHg}$$

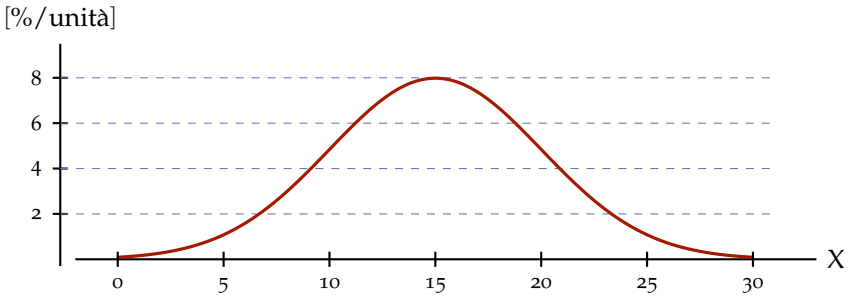
□

Esercizio 99 (p. 134)
Una variabile statistica X si distribuisce in maniera gaussiana con media 15 e deviazione standard 5.

1. Rappresenta graficamente questa distribuzione indicando, in ascissa, il valore di X e, in ordinata, la densità di probabilità.
2. Che percentuale della popolazione ha un valore di X compreso fra 12 e 13?
3. Determina k in modo tale che il 50% della popolazione abbia un valore di X compreso fra 12 e k.

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Il massimo, in $x = 15$, vale $\frac{39.89\%}{5} \approx 8\%$ per unità di X; in 15 ± 5, ossia in 10 e 20, la curva vale $\frac{24.20\%}{5} \approx 4.8\%$ per unità.



□

Soluzione della domanda 2. In coordinate standard 12 e 13 diventano

$$z_{12} = \frac{12-15}{5} = -0.6 \qquad z_{13} = \frac{13-15}{5} = -0.4$$

La percentuale fra -0.6 e -0.4 è

$$\Phi(-0.4) - \Phi(-0.6) = 34.46\% - 27.43\% \approx 7.0\%$$

□

Soluzione della domanda 3. Sotto 12 (cioè sotto $z = -0.6$) c'è il $\Phi(-0.6) = 27.43\%$ della popolazione. Vogliamo che sotto k ci sia il $27.43\% + 50\% = 77.43\%$, cioè $\Phi(z_k) = 77.43\%$. Dalla tavola, interpolando fra $\Phi(0.75) = 77.34\%$ e $\Phi(0.80) = 78.81\%$, $z_k \approx 0.753$, per cui

$$k = 15 + 0.753 \cdot 5 \approx 18.8$$

□

Esercizio 100 (p. 134)
Supponiamo che i volumi dei globuli rossi di un paziente siano distribuiti in maniera approssimativamente gaussiana. Il volume medio di un globulo rosso è di 85 femtolitri, e il 20% dei globuli rossi è più grande di 100 femtolitri. Quanto vale la deviazione standard della distribuzione dei volumi? Quanto vale il volume mediano dei globuli rossi più grandi di 100 femtolitri? Rappresenta graficamente la distribuzione dei volumi.

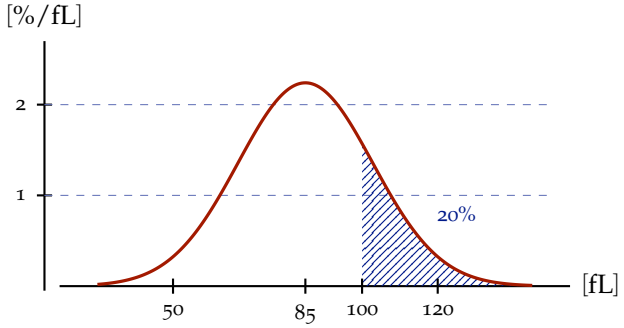
Soluzione. Se il 20% dei globuli sta oltre 100 fL, sotto 100 fL c'è l'80%, quindi la coordinata standard z di 100 fL è quella con $\Phi(z) = 80\%$. Interpolando nella tavola fra $\Phi(0.80) = 78.81\%$ e $\Phi(0.85) = 80.23\%$ troviamo $z = 0.842$, da cui

$$\frac{100\,\text{fL} - 85\,\text{fL}}{\sigma} = 0.842 \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma = \frac{15\,\text{fL}}{0.842} \approx 17.8\,\text{fL}$$

Il volume mediano dei globuli più grandi di 100 fL ne lascia sopra di sé la metà, e quindi, dato che questi globuli sono il 20% del totale, il 10% di tutti i globuli rossi. Cerchiamo allora la z che ha oltre di sé il 10%, ossia quella con $\Phi(z) = 90\%$. Fra $\Phi(1.25) = 89.44\%$ e $\Phi(1.30) = 90.32\%$ la tavola dà $z = 1.282$, e otteniamo

$$V = 85\,\text{fL} + 1.282 \cdot 17.8\,\text{fL} \approx 108\,\text{fL}$$

Per il grafico ci serve ancora l'altezza del massimo, $\frac{39.89\%}{17.8\,\text{fL}} \approx 2.2\,\%/\text{fL}$.



Esercizio 101 (p. 142)
I valori assunti da una variabile statistica su un campione di sei individui sono

$$14.1 \quad 7.5 \quad 17.9 \quad 12.2 \quad 12.9 \quad 15.8$$

1. Calcola media, varianza (σ^2) e varianza campionaria (s^2) di questi valori.
2. Con che intervallo di confidenza al 95% possiamo stimare la media della popolazione?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Calcoliamo prima la media,

$$\hat{\mu} = \frac{14.1 + 7.5 + 17.9 + 12.2 + 12.9 + 15.8}{6} = \frac{80.4}{6} = 13.4$$

e poi, per le due varianze, gli scarti dalla media e i loro quadrati.

x_i	14.1	7.5	17.9	12.2	12.9	15.8
$x_i - \hat{\mu}$	0.7	−5.9	4.5	−1.2	−0.5	2.4
$(x_i - \hat{\mu})^2$	0.49	34.81	20.25	1.44	0.25	5.76

I quadrati degli scarti hanno somma 63.00, che dividiamo per $n = 6$ per avere la varianza e per $n - 1 = 5$ per la varianza campionaria:

$$\sigma^2 = \frac{63.00}{6} = 10.5 \qquad s^2 = \frac{63.00}{5} = 12.6$$

Gli scarti si controllano facilmente, perché la loro somma deve essere nulla, e infatti $0.7 - 5.9 + 4.5 - 1.2 - 0.5 + 2.4 = 0$. □

Soluzione della domanda 2. Con sei individui usiamo il metodo più generale, con la t di Student, e calcoliamo la deviazione standard campionaria e l'errore standard della media:

$$s = \sqrt{12.6} = 3.550 \qquad \widehat{\mathrm{SEM}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{3.550}{\sqrt{6}} = 1.449$$

La soglia è $t_{0.025,5} = 2.57$ (tavola in appendice, riga dei $6 - 1 = 5$ gradi di libertà, colonna 0.025), e quindi

$$\mu = \hat{\mu} \pm 2.57 \cdot \widehat{\mathrm{SEM}} = 13.4 \pm 3.7 \qquad \text{cioè fra 9.7 e 17.1, al 95\% di confidenza}$$

Se usassimo il metodo per campioni grandi, con 1.96 al posto di 2.57 e la deviazione standard con n al denominatore, $\sqrt{10.5} = 3.240$, otterremmo 13.4 ± 2.6. L'intervallo sarebbe troppo stretto, perché con sei soli individui la t di Student è ben diversa dalla gaussiana. □

Esercizio 102 (p. 142)
Si estrae un campione casuale di dieci individui da una popolazione molto vasta. La variabile statistica X assume, su questi dieci individui, i seguenti valori.

$$28.6 \quad 33.1 \quad 36.5 \quad 36.9 \quad 37.6 \quad 41.7 \quad 43.0 \quad 44.7 \quad 45.9 \quad 51.6$$

1. Calcola media, mediana e differenza interquartile di X sul campione.
2. Se stimiamo la media di X su tutta la popolazione con la media del campione, che intervallo di confidenza al 95% abbiamo?
3. Usando un campione più grande, potremmo determinare la media della popolazione con un intervallo di confidenza al 95% di ± 1.0: quanto dovrebbe essere grande questo campione?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Sommando i dieci valori otteniamo la media

$$\hat{\mu} = \frac{28.6 + 33.1 + \ldots + 51.6}{10} = \frac{399.6}{10} = 39.96$$

I dati sono già in ordine crescente, e dato che sono dieci la mediana è la media dei due centrali,

$$\tilde{X} = \frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \frac{37.6 + 41.7}{2} = 39.65$$

Per i quartili la regola dà $k = 1 + 0.25 \cdot 9 = 3.25$ e $k = 1 + 0.75 \cdot 9 = 7.75$, da cui

$$Q_1 = x_{(3)} + 0.25\,(x_{(4)} - x_{(3)}) = 36.5 + 0.25 \cdot 0.4 = 36.6$$
$$Q_3 = x_{(7)} + 0.75\,(x_{(8)} - x_{(7)}) = 43.0 + 0.75 \cdot 1.7 = 44.275$$

e la differenza interquartile è $IQR = 44.275 - 36.6 = 7.675 \approx 7.7$. □

Soluzione della domanda 2. Dieci individui sono pochi, e ci serve il metodo più generale. Cominciamo dagli scarti dalla media e dai loro quadrati,

$x_i - \hat{\mu}$	−11.36	−6.86	−3.46	−3.06	−2.36	1.74	3.04	4.74	5.94	11.64
$(x_i - \hat{\mu})^2$	129.05	47.06	11.97	9.36	5.57	3.03	9.24	22.47	35.28	135.49

e la somma dei quadrati è 408.52, da cui

$$s = \sqrt{\frac{408.52}{9}} = 6.737 \qquad \widehat{\mathrm{SEM}} = \frac{6.737}{\sqrt{10}} = 2.131$$

Con 9 gradi di libertà la soglia della t di Student è $t_{0.025,9} = 2.26$ (tavola in appendice, riga 9, colonna 0.025), per cui

$$\mu = \hat{\mu} \pm 2.26 \cdot \widehat{\mathrm{SEM}} = 40.0 \pm 4.8 \qquad \text{cioè fra } 35.1 \text{ e } 44.8$$

□

Soluzione della domanda 3. Il campione che cerchiamo sarà grande, quindi l'intervallo di confidenza al 95% sarà $\hat{\mu} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, e vogliamo che

$$1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.0 \qquad \Longrightarrow \qquad n = (1.96\,\sigma)^2$$

La deviazione standard σ della popolazione non la conosciamo, ma possiamo usare al suo posto la stima migliore che abbiamo, $s = 6.737$, e otteniamo

$$n = (1.96 \cdot 6.737)^2 = 13.20^2 \approx 174$$

quindi servono circa 200 individui. È una stima grossolana, perché s viene da soli dieci individui, per cui possiamo arrotondare a una sola cifra significativa. Inoltre s è solo una stima: al variare del campione oscilla attorno alla σ vera e, grosso modo, metà delle volte sarà sopra e metà sotto. Per questo, con un campione di 200 individui ci aspettiamo solo una probabilità del 50%, più o meno, di ottenere un intervallo di ± 1.0 o meno. Per avere una ragionevole certezza, invece, sceglierei un campione almeno due volte più grande (per esempio 500 individui). □

Esercizio 103 (p. 142)
Il seguente diagramma ramo-foglia rappresenta i valori assunti da una variabile statistica X su un campione di 100 individui, estratto casualmente da una vasta popolazione.

10	5
11	26
12	268
13	0014555889
14	000122233333344567777888
15	000112234447888899
16	000113333555677788889
17	223455578899
18	112489
19	58

Questi valori sono quindi

$$x_1 = 105 \quad x_2 = 112 \quad x_3 = 116 \quad \dots \quad x_{99} = 195 \quad x_{100} = 198$$

e, per convenienza, sono già state calcolate le somme

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = 15\,482 \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{100}^2 = 2\,428\,902$$

1. Determina media μ(campione), deviazione standard σ(campione), mediana $\tilde{X}$ e differenza interquartile IQR di X sul campione.
2. Rappresenta i dati per mezzo di un istogramma, dividendo l'asse delle ascisse in classi di ampiezza 10, e indicando sull'asse delle ordinate la densità di probabilità.

3. Rappresenta sul medesimo diagramma una distribuzione gaussiana con media μ(campione) e deviazione standard σ(campione).
4. Calcola un intervallo di confidenza al 95% per la media μ di X sulla popolazione.

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Dalle due somme otteniamo media e deviazione standard, usando l'identità $\sigma^2 = \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n} - \mu^2$ (qui applicata al campione):

$$\mu(\text{campione}) = \frac{15\,482}{100} = 154.82$$
$$\sigma^2(\text{campione}) = \frac{2\,428\,902}{100} - 154.82^2 = 319.79 \qquad \sigma(\text{campione}) = \sqrt{319.79} = 17.88$$

Per mediana e quartili contiamo le foglie di ciascuna riga, e i totali progressivi:

riga	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
foglie	1	2	3	10	25	19	20	12	6	2
fino a qui	1	3	6	16	41	60	80	92	98	100

La mediana è la media di $x_{(50)}$ e $x_{(51)}$, che stanno nella riga 15 (posti dal 42 al 60) e ne sono la nona e la decima foglia, entrambe 4, quindi $\tilde{X} = 154$.

Per i quartili calcoliamo $k = 1 + 0.25 \cdot 99 = 25.75$ e $k = 1 + 0.75 \cdot 99 = 75.25$. I valori $x_{(25)}$ e $x_{(26)}$ sono la nona e la decima foglia della riga 14, entrambe 3, e $x_{(75)}$ e $x_{(76)}$ la quindicesima e la sedicesima foglia della riga 16, entrambe 7, quindi non abbiamo nulla da interpolare e

$$Q_1 = 143 \qquad Q_3 = 167 \qquad \text{IQR} = 167 - 143 = 24$$

□

Soluzione della domanda 2. Le classi di ampiezza 10 sono le righe del diagramma: 100–110, 110–120, &c. In ciascuna cade un numero di individui pari al numero delle foglie, che su 100 individui è anche la percentuale. La densità di probabilità è questa percentuale divisa per l'ampiezza della classe: per esempio, nella riga 14, $\frac{25\%}{10} = 2.5\,\%/\text{unità}$.

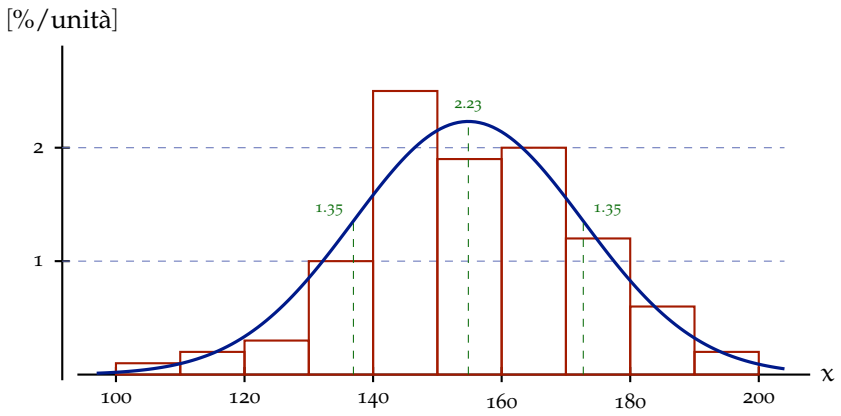
classe da	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
%/unità	0.1	0.2	0.3	1.0	2.5	1.9	2.0	1.2	0.6	0.2

Disegneremo l'istogramma nella figura della domanda seguente, insieme alla gaussiana.

□

Soluzione della domanda 3. La gaussiana ha il massimo in 154.8 e i flessi a una deviazione standard di distanza, in 154.8 ± 17.9, ossia in 136.9 e 172.7, e le quote corrispondenti sono

$$\frac{39.89\%}{17.88} = 2.23\,\frac{\%}{\text{unità}} \qquad \frac{24.20\%}{17.88} = 1.35\,\frac{\%}{\text{unità}}$$



La gaussiana segue abbastanza bene l'istogramma, e possiamo verificarlo contando gli individui. Entro una deviazione standard dalla media, fra 136.9 e 172.7, ne cadono 69 su 100, ed entro due deviazioni standard, fra 119.1 e 190.6, ne cadono 95, in buon accordo con la regola del 68–95–99.7. □

Soluzione della domanda 4. Con 100 individui il campione è grande, e possiamo usare il metodo per campioni grandi, in cui la stima di σ è $\hat{\sigma} = \sigma(\text{campione})$:

$$\widehat{\text{SEM}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{17.88}{\sqrt{100}} = 1.788 \qquad 1.96 \cdot 1.788 \approx 3.50$$

$$\mu = 154.8 \pm 3.5 \qquad \text{cioè fra 151.3 e 158.3, al 95\% di confidenza}$$

Con il metodo più generale non cambierebbe quasi nulla. La deviazione standard campionaria è $s = 17.88 \cdot \sqrt{100/99} = 17.97$, la soglia $t_{0.025,99} \approx 1.98$ prende il posto di 1.96, e otterremmo l'intervallo 154.8 ± 3.6. □

Esercizio 104 (p. 143)
Su un campione di compresse di un lotto si stima il contenuto medio di principio attivo, con l'intervallo di confidenza al 95% da 249 mg a 253 mg. Quali delle affermazioni seguenti sono corrette?

1. Il 95% delle compresse del lotto contiene fra 249 mg e 253 mg di principio attivo.
2. Intervalli costruiti nello stesso modo, a partire da campioni diversi, contengono il contenuto medio vero del lotto nel 95% dei casi.
3. Se si ripetesse il campionamento, il 95% delle nuove medie campionarie cadrebbe fra 249 mg e 253 mg.
4. Con un campione più grande l'intervallo sarebbe, di regola, più stretto.

Soluzione.

1. L'affermazione è falsa, perché l'intervallo che abbiamo calcolato riguarda la *media* del lotto e non le singole compresse, che sono molto più disperse: la loro deviazione standard è $\sqrt{n}$ volte l'errore standard della media.

2. È corretta, ed è proprio il significato del livello di confidenza — a cambiare per caso è il campione che scegliamo, e con lui l'intervallo.
3. Anche questa è falsa: il livello di confidenza del 95% ci garantisce semplicemente che il 95% degli intervalli di confidenza contengono la media vera, ma, sul singolo intervallo — in questo caso (251 ± 2) mg — non ci offre alcuna garanzia. Inoltre, se ripetessimo il campionamento, le nuove medie campionarie si distribuirebbero attorno alla media vera μ, non attorno alla nostra stima $\hat{\mu} = 251$ mg, che è a sua volta spostata da μ di una quantità casuale che non conosciamo.
4. È corretta, perché l'errore standard della media è $\sigma/\sqrt{n}$ e diminuisce al crescere di n.

L'errore del primo punto — confondere la media con i singoli individui — è di gran lunga il più grossolano e il più comune.

Esercizio 105 (p. 143)
Da un campione grande si ottiene, per la media di una variabile, l'intervallo di confidenza al 95% $\mu = 12.0 \pm 1.0$. Senza rifare i conti sui dati, trova gli intervalli di confidenza al 99% e al 68%.

Soluzione. Per un campione grande l'intervallo al 95% è $\hat{\mu} \pm 1.96\,\widehat{\mathrm{SEM}}$, quindi

$$\widehat{\mathrm{SEM}} = \frac{1.0}{1.96} \approx 0.51$$

Al 99% il coefficiente è 2.58, al 68% è 1:

$$\mu = 12.0 \pm 1.3 \quad \text{al } 99\% \qquad\qquad \mu = 12.0 \pm 0.5 \quad \text{al } 68\%$$

Più confidenza vuol dire meno precisione: un intervallo più sicuro è anche più largo.

Esercizio 106 (p. 143)
Con 25 misure ripetute di una concentrazione si ottiene l'intervallo di confidenza al 95% (6.4 ± 0.8) mg/L. Circa quante misure servirebbero, con lo stesso strumento, per ottenere un intervallo di ± 0.4 mg/L?

Soluzione. L'ampiezza dell'intervallo è proporzionale all'errore standard della media, $\sigma/\sqrt{n}$, e con lo stesso strumento σ non cambia. Per dimezzare l'intervallo dobbiamo quindi raddoppiare $\sqrt{n}$, ossia quadruplicare n, e ci servono circa $4 \cdot 25 = 100$ misure. Il conto è approssimato, perché la s del nuovo campione non sarà esattamente quella del primo, e anche il coefficiente della t di Student cambia un poco ($t_{0.025,\,24} = 2.06$, $t_{0.025,\,99} \approx 1.98$), ma l'ordine di grandezza resta quello.

Esercizio 107 (p. 143)
Un articolo riporta, per 100 pazienti, "peso medio 72 ± 3 kg", senza precisare che cosa sia il ± 3 kg. Fra quali valori sta, grosso modo, il peso del 95% dei pazienti, se

1. 3 kg è la deviazione standard dei pesi;
2. 72 ± 3 kg è l'intervallo di confidenza al 95% della media?

Supponi che i pesi siano distribuiti in modo circa gaussiano.

Soluzione.

1. Il 95% dei pazienti sta entro due deviazioni standard dalla media, quindi fra

$$72\,\text{kg} - 6\,\text{kg} = 66\,\text{kg} \qquad \text{e} \qquad 72\,\text{kg} + 6\,\text{kg} = 78\,\text{kg}$$

2. In questo caso $1.96\,\widehat{\text{SEM}} = 3\,\text{kg}$, da cui ricaviamo $\widehat{\text{SEM}} \approx 1.53\,\text{kg}$ e la deviazione standard dei pesi,

$$\hat{\sigma} = \sqrt{n} \cdot \widehat{\text{SEM}} = 10 \cdot 1.53\,\text{kg} = 15.3\,\text{kg}$$

   Il 95% dei pazienti sta allora fra circa $72 - 30 = 42\,\text{kg}$ e $72 + 30 = 102\,\text{kg}$.

Questo ipotetico articolo sarebbe quindi scritto coi piedi, perché lo stesso "± 3" può descrivere due popolazioni molto diverse a seconda di cosa rappresenta.

Esercizio 108 (p. 144)
Su 250 compresse prodotte da una macchina, scelte a caso e controllate, 12 risultano fuori specifica. Stima, con un intervallo di confidenza al 95%, la percentuale di compresse fuori specifica prodotte dalla macchina.

Soluzione. La proporzione nel campione è

$$\hat{p} = \frac{12}{250} = 0.048$$

e l'errore standard

$$\widehat{\text{SEM}} = \sqrt{\frac{0.048 \cdot 0.952}{250}} \approx 0.0135$$

Al 95% di confidenza, $p = 0.048 \pm 1.96 \cdot 0.0135 = 0.048 \pm 0.026$, ossia

$$p = (4.8 \pm 2.6)\% \qquad \text{cioè fra il 2.2\% e il 7.4\%}$$

Le condizioni sono appena soddisfatte: 12 compresse fuori specifica, poco più di una decina. Con un campione più piccolo il metodo non sarebbe affidabile.

Esercizio 109 (p. 144)
Un sondaggio su 1000 persone scelte a caso stima che il 40% della popolazione assuma regolarmente integratori alimentari, con un intervallo di confidenza al 95% di $\pm 3\%$.

1. Verifica che l'intervallo $\pm 3\%$ è corretto.
2. Con 4000 intervistati, e la stessa proporzione nel campione, quale sarebbe l'intervallo?

Soluzione.

1. Con $\hat{p} = 0.40$,

$$\widehat{\text{SEM}} = \sqrt{\frac{0.40 \cdot 0.60}{1000}} \approx 0.0155 \qquad 1.96 \cdot 0.0155 \approx 0.030$$

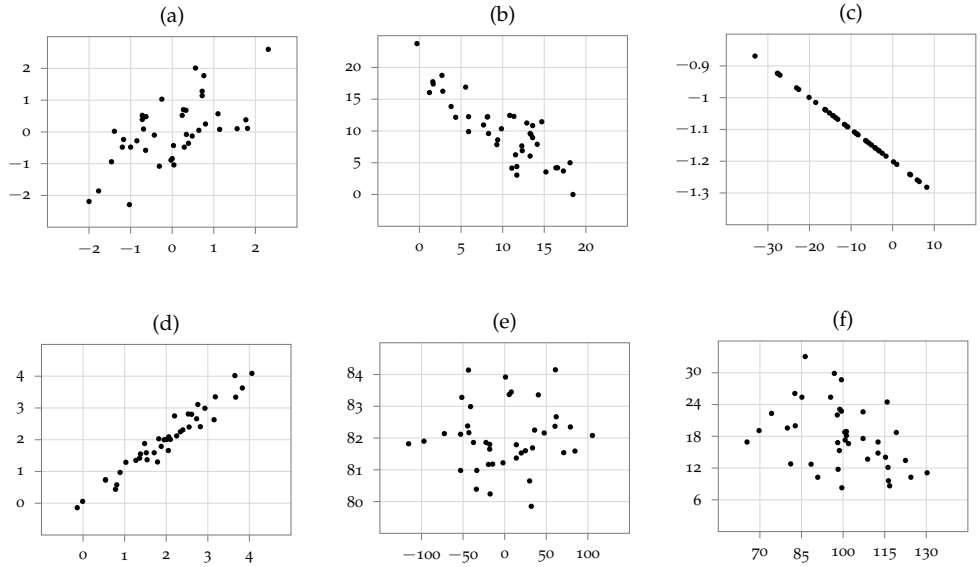
   cioè $\pm 3\%$.

2. Con quattro volte gli intervistati l'errore standard si dimezza: $\pm 1.5\%$.

Esercizio 110 (p. 154)
I coefficienti di correlazione corrispondenti ai seguenti diagrammi di dispersione sono

$$-0.85 \qquad -0.38 \qquad -1.00 \qquad 0.06 \qquad 0.97 \qquad 0.62$$

Associa ad ogni diagramma il suo coefficiente.



I valori indicati sugli assi sono spaziati di una deviazione standard delle rispettive variabili, con la media posta al centro. Per ciascuno dei diagrammi, calcola l'equazione della retta di regressione e traccia questa retta sul diagramma stesso.

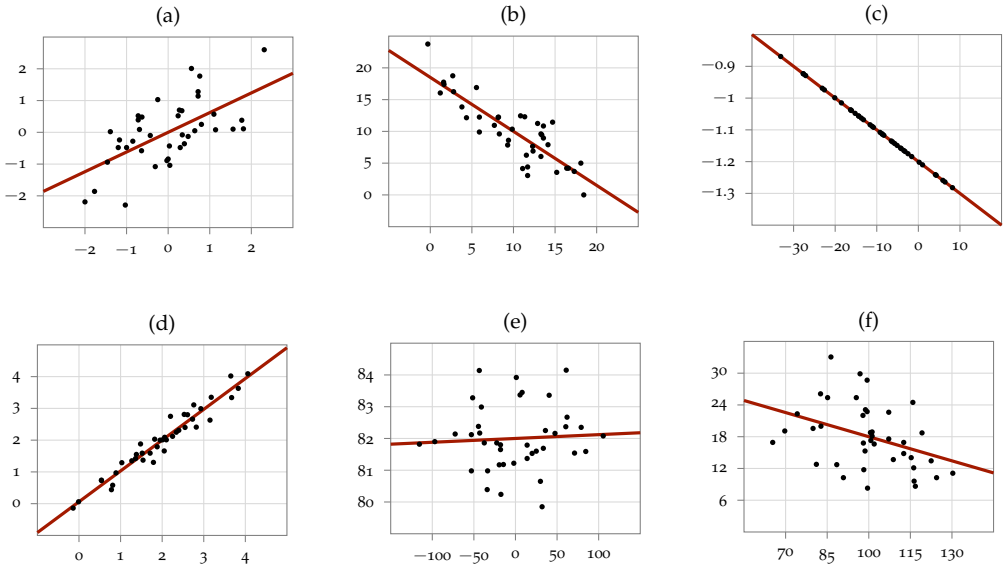
Soluzione. Il valore -1.00 va al diagramma (c), i cui punti stanno esattamente su una retta decrescente. Fra gli altri, il segno si legge dall'inclinazione della nuvola, il valore assoluto da quanto la nuvola è schiacciata:

(a) 0.62 (b) -0.85 (c) -1.00 (d) 0.97 (e) 0.06 (f) -0.38

Per le rette usiamo $B = \mu_B + r\,\frac{\sigma_B}{\sigma_A}\,(A - \mu_A)$, leggendo medie e deviazioni standard sugli assi:

	μ_A	σ_A	μ_B	σ_B	retta
(a)	0	1	0	1	$B = 0.62\,A$
(b)	10	5	10	5	$B = 18.5 - 0.85\,A$
(c)	-10	10	-1.1	0.1	$B = -1.2 - 0.01\,A$
(d)	2	1	2	1	$B = 0.06 + 0.97\,A$
(e)	0	50	82	1	$B = 82 + 0.0012\,A$
(f)	100	15	18	6	$B = 33.2 - 0.152\,A$

Per tracciarle conviene ricordare che la retta di regressione passa per il baricentro (μ_A, μ_B), al centro del diagramma, e che spostandosi a destra di una deviazione standard σ_A la retta sale di r deviazioni standard σ_B (o scende, se $r < 0$). Nei diagrammi, dove ogni quadretto è una deviazione standard, la retta passa per il centro e sale di r quadretti per ogni quadretto verso destra.



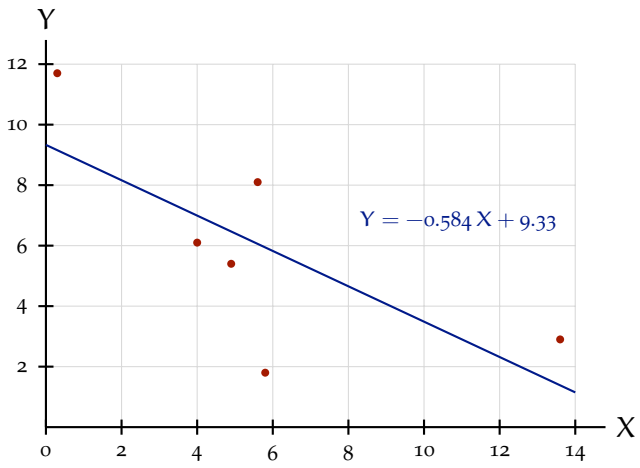
Esercizio 111 (p. 154)
Considera le seguenti coppie di valori assunti dalle variabili statistiche X e Y su un campione di sei individui.

x_i	4.9	13.6	0.3	5.8	4.0	5.6
y_i	5.4	2.9	11.7	1.8	6.1	8.1

1. Rappresenta questi punti su un diagramma di dispersione.
2. Calcola la retta di regressione di Y (variabile dipendente) rispetto a X (variabile indipendente).
3. È possibile affermare, al livello di significatività $\alpha = 0.05$, che X e Y sono linearmente correlate?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Riportiamo i sei punti sul diagramma di dispersione, insieme alla retta che calcoleremo nella seconda domanda.



□

Soluzione della domanda 2. Calcoliamo media e deviazione standard di X e di Y (con $n = 6$ al denominatore):

$$\mu_X = \frac{34.2}{6} = 5.7000 \qquad \sigma_X = \sqrt{\frac{95.12}{6}} = 3.9816$$

$$\mu_Y = \frac{36.0}{6} = 6.0000 \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{64.52}{6}} = 3.2792$$

Poi convertiamo i punti in coordinate standard, $x_i^* = (x_i - \mu_X)/\sigma_X$ e $y_i^* = (y_i - \mu_Y)/\sigma_Y$, e moltiplichiamo fra loro le due coordinate di ogni punto:

x_i^*	−0.2009	1.9841	−1.3562	0.0251	−0.4270	−0.0251
y_i^*	−0.1830	−0.9453	1.7382	−1.2808	0.0305	0.6404
$x_i^* y_i^*$	0.0368	−1.8757	−2.3574	−0.0322	−0.0130	−0.0161

Il coefficiente di correlazione è la media di questi prodotti,

$$r = \frac{-4.2576}{6} = -0.7096$$

quindi la retta di regressione, scritta in coordinate standard, è $Y^* = -0.7096\,X^*$. Sostituendo X^* e Y^* con le loro definizioni troviamo la retta nelle unità originali:

$$\frac{Y - 6.0000}{3.2792} = -0.7096\,\frac{X - 5.7000}{3.9816} \qquad \Longrightarrow \qquad Y = -0.584\,X + 9.33$$

Riportata sul diagramma, la retta taglia a metà la nuvola dei punti nella maniera giusta — scende insieme alla nuvola, e lascia punti sopra e sotto da un capo all'altro. □

Soluzione della domanda 3. Per saggiare la correlazione calcoliamo, con $n = 6$,

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = -0.7096 \cdot \sqrt{\frac{4}{1-0.7096^2}} = -0.7096 \cdot 2.838 \approx -2.01$$

Se fra X e Y non ci fosse correlazione, t seguirebbe una t di Student con $n - 2 = 4$ gradi di libertà, che supera la soglia $t_{0.025,\,4} = 2.78$ in valore assoluto solo nel 5% dei casi (tavola in appendice, riga 4, colonna 0.025). Siccome $2.01 < 2.78$, la correlazione non è significativa al livello 0.05, e la risposta è no — con sei punti soli, anche un coefficiente $r \approx -0.710$ potrebbe essere dovuto al caso. □

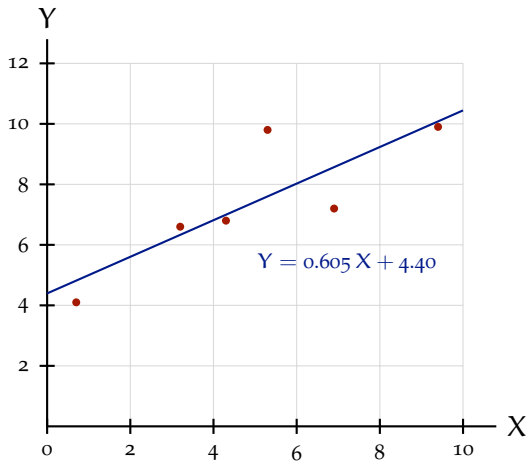
Esercizio 112 (p. 155)
Considera le seguenti coppie di valori assunti dalle variabili statistiche X e Y su un campione di sei individui.

x_i	0.7	9.4	4.3	3.2	6.9	5.3
y_i	4.1	9.9	6.8	6.6	7.2	9.8

1. Rappresenta questi punti su un diagramma di dispersione.
2. Calcola la retta di regressione di Y (variabile dipendente) rispetto a X (variabile indipendente).
3. È possibile affermare, al livello di significatività $\alpha = 0.05$, che X e Y sono linearmente correlate?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Oltre ai sei punti, sul diagramma di dispersione abbiamo tracciato la retta di regressione, ricavata più avanti.



□

Soluzione della domanda 2. Ci servono per prime le medie e le deviazioni standard, con $n = 6$ al denominatore:

$$\mu_X = \frac{29.8}{6} = 4.9667 \qquad \sigma_X = \sqrt{\frac{45.27}{6}} = 2.7469$$

$$\mu_Y = \frac{44.4}{6} = 7.4000 \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{23.94}{6}} = 1.9975$$

Con queste passiamo alle coordinate standard $x_i^* = (x_i - \mu_X)/\sigma_X$ e $y_i^* = (y_i - \mu_Y)/\sigma_Y$, e nell'ultima riga scriviamo i loro prodotti.

x_i^*	−1.5533	1.6139	−0.2427	−0.6431	0.7038	0.1213
y_i^*	−1.6521	1.2516	−0.3004	−0.4005	−0.1001	1.2015
$x_i^* y_i^*$	2.5661	2.0199	0.0729	0.2576	−0.0705	0.1458

Facendo la media dei prodotti otteniamo il coefficiente di correlazione

$$r = \frac{4.9918}{6} = 0.8320$$

Abbiamo quindi $Y^* = 0.8320\, X^*$ in coordinate standard, e tornando a X e Y

$$\frac{Y - 7.4000}{1.9975} = 0.8320\, \frac{X - 4.9667}{2.7469} \qquad \Longrightarrow \qquad Y = 0.605\, X + 4.40$$

(controprova sul diagramma: la retta sale con la nuvola dei punti e la taglia a metà nella maniera giusta, con punti da una parte e dall'altra lungo tutto il tratto). □

Soluzione della domanda 3. Il valore di t, per $n = 6$, è

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0.8320 \cdot \sqrt{\frac{4}{1 - 0.8320^2}} = 0.8320 \cdot 3.605 \approx 3.00$$

e va confrontato con la soglia $t_{0.025,\,4} = 2.78$ (tavola in appendice, riga $n - 2 = 4$, colonna 0.025) — in mancanza di correlazione, t sarebbe distribuito secondo una t di Student con questi gradi di libertà, che oltrepassa 2.78, in valore assoluto, nel 5% dei casi. Abbiamo $3.00 > 2.78$, quindi sì, la correlazione è significativa al livello 0.05. □

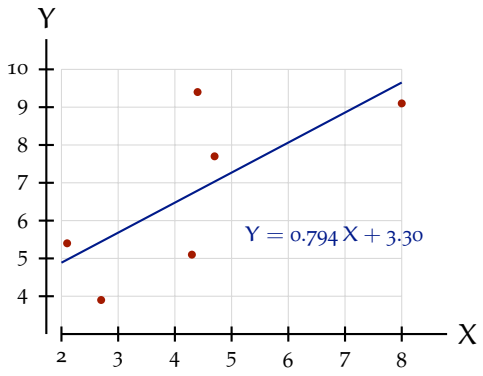
Esercizio 113 (p. 155)
Considera le seguenti coppie di valori assunti dalle variabili statistiche X e Y su un campione di sei individui.

x_i	4.4	2.1	8.0	4.3	4.7	2.7
y_i	9.4	5.4	9.1	5.1	7.7	3.9

1. Rappresenta questi punti su un diagramma di dispersione.
2. Calcola la retta di regressione di Y (variabile dipendente) rispetto a X (variabile indipendente).
3. È possibile affermare, al livello di significatività $\alpha = 0.05$, che X e Y sono linearmente correlate?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Nel diagramma di dispersione anticipiamo anche la retta di regressione, che troveremo fra poco.



□

Soluzione della domanda 2. Le due medie e le due deviazioni standard (queste ultime calcolate con $n = 6$ al denominatore) sono

$$\mu_X = \frac{26.2}{6} = 4.3667 \qquad \sigma_X = \sqrt{\frac{21.23}{6}} = 1.8812$$

$$\mu_Y = \frac{40.6}{6} = 6.7667 \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{26.11}{6}} = 2.0862$$

e da queste ricaviamo le coordinate standard dei sei punti, $x_i^* = (x_i - \mu_X)/\sigma_X$ e $y_i^* = (y_i - \mu_Y)/\sigma_Y$, insieme ai loro prodotti.

x_i^*	0.0177	−1.2049	1.9314	−0.0354	0.1772	−0.8860
y_i^*	1.2623	−0.6551	1.1185	−0.7989	0.4474	−1.3741
$x_i^* y_i^*$	0.0224	0.7893	2.1602	0.0283	0.0793	1.2174

La media dell'ultima riga è il coefficiente di correlazione,

$$r = \frac{4.2969}{6} = 0.7161$$

e la retta di regressione, che in coordinate standard è $Y^* = 0.7161\,X^*$, nelle unità originali diventa

$$\frac{Y - 6.7667}{2.0862} = 0.7161\,\frac{X - 4.3667}{1.8812} \qquad \Longrightarrow \qquad Y = 0.794\,X + 3.30$$

Sul diagramma vediamo che la retta segue l'inclinazione della nuvola dei punti e la divide a metà come deve, lasciandone alcuni sopra e alcuni sotto a entrambe le estremità. □

Soluzione della domanda 3. Con $n = 6$ abbiamo

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0.7161 \cdot \sqrt{\frac{4}{1 - 0.7161^2}} = 0.7161 \cdot 2.865 \approx 2.05$$

Per decidere ci serve la soglia della t di Student a $n - 2 = 4$ gradi di libertà, $t_{0.025,\,4} = 2.78$ (tavola in appendice, riga 4, colonna 0.025). Se le due variabili non fossero correlate, t seguirebbe proprio questa distribuzione, e andrebbe oltre 2.78 in valore assoluto nel 5% dei casi. Il nostro valore resta sotto, $2.05 < 2.78$, quindi la risposta è no: la correlazione non è significativa al livello 0.05. Sei punti sono pochi — non bastano a escludere che un coefficiente $r \approx 0.716$ sia frutto del caso. □

> **Esercizio 114** (p. 155)
> Le variabili statistiche X e Y hanno rispettivamente media 3.60 e 84.1, e deviazione standard 0.45 e 8.6. Sapendo che la pendenza della retta di regressione di Y (variabile dipendente) rispetto a X (variabile indipendente) è 14.6, determina l'espressione della retta e il coefficiente di correlazione di Pearson. Supponendo che i dati precedenti siano stati ricavati da un campione di dieci individui, è possibile affermare, al livello di significatività $\alpha = 0.05$, che X e Y sono correlate? Qual è l'espressione della retta di regressione di X (variabile dipendente) rispetto a Y (variabile indipendente), ossia la retta di regressione che si ottiene scambiando le variabili?

Soluzione. Ricordiamo che in coordinate standard la retta di regressione è $Y^* = r\,X^*$, e che tornando alle unità originali la sua pendenza diventa $r\,\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$. Conoscendo la pendenza, ricaviamo quindi il coefficiente di correlazione

$$r \cdot \frac{8.6}{0.45} = 14.6 \qquad \Longrightarrow \qquad r = 14.6 \cdot \frac{0.45}{8.6} \approx 0.764$$

Per scrivere la retta basta ora sapere che passa per il baricentro $(\mu_X, \mu_Y) = (3.60,\, 84.1)$, da cui

$$Y - 84.1 = 14.6\,(X - 3.60) \qquad \Longrightarrow \qquad Y = 14.6\,X + 31.5$$

Passiamo alla significatività. Il campione ha $n = 10$ individui, quindi

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0.764 \cdot \sqrt{\frac{8}{1-0.764^2}} = 0.764 \cdot 4.383 \approx 3.35$$

In assenza di correlazione questo t seguirebbe una t di Student con $n - 2 = 8$ gradi di libertà, che in valore assoluto va oltre la soglia $t_{0.025,8} = 2.31$ nel 5% dei casi (tavola in appendice, riga 8, colonna 0.025). Dato che $3.35 > 2.31$, possiamo rispondere sì: la correlazione è significativa al livello 0.05.

Infine scambiamo le variabili. Il coefficiente di correlazione resta lo stesso, e in coordinate standard la nuova retta di regressione è $X^* = r\,Y^*$, ossia

$$\frac{X - 3.60}{0.45} = 0.764\,\frac{Y - 84.1}{8.6} \qquad \Longrightarrow \qquad X = 0.0400\,Y + 0.238$$

Nota che questa non è la retta di prima risolta rispetto a X, che avrebbe pendenza $\frac{1}{14.6} \approx 0.0685$. Le due rette di regressione passano entrambe per il baricentro, ma coincidono solo se $r = \pm 1$, perché la regressione verso la media agisce in tutti e due i versi.

Esercizio 115 (p. 168)
Supponi di avere due farmaci A e B contro la medesima malattia. L'efficacia del farmaco A è corroborata da uno studio clinico al livello di significatività 0.05 (p-value < 0.05), l'efficacia di B è corroborata da uno studio al livello di significatività 0.01 (p-value < 0.01). Per ciascuna delle seguenti affermazioni indica se sia giustificata oppure no, spiegando la ragione della tua scelta.

1. Il farmaco A è efficace almeno nel 95% dei casi di malattia, mentre il farmaco B almeno nel 99%.
2. C'è maggiore evidenza statistica a favore dell'efficacia del farmaco B rispetto al farmaco A.
3. Anche se supponiamo che entrambi i farmaci siano effettivamente efficaci, non è detto che il farmaco B produca un effetto più forte del farmaco A.
4. Anche se supponiamo che entrambi i farmaci siano effettivamente efficaci, non è detto che il farmaco B curi un maggior numero di casi del farmaco A.
5. Se il farmaco A non fosse efficace, una replica dello studio relativo avrebbe il 95% di probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla.
6. Se il farmaco A non fosse efficace, una replica dello studio relativo avrebbe il 95% di probabilità di non riprodurre il risultato positivo di quest'ultimo.
7. Se il farmaco A fosse efficace, una replica dello studio relativo avrebbe il 5% di probabilità di non rifiutare l'ipotesi nulla.
8. La probabilità che il farmaco A non sia efficace è minore del 5%.

> 9. Se un secondo test, indipendente, del farmaco A, producesse un risultato positivo con $p < 0.05$, comunque, in totale, l'evidenza statistica a favore del farmaco A sarebbe minore di quella a favore del farmaco B.

Soluzione.

1. Questa non è giustificata. Il p-value misura l'evidenza statistica a favore dell'efficacia, non in quanti casi il farmaco funzioni — possiamo benissimo trovare $p < 0.01$ per un farmaco che giova a un malato su dieci, se il campione è abbastanza numeroso.
2. È giustificata, perché più piccolo è il p-value, maggiore è la significatività statistica. Per spiegare col solo caso i dati di B dobbiamo invocare una coincidenza che capita meno di una volta su 100, per quelli di A meno di una volta su 20. (Intendendo che lo studio su A non raggiunga la soglia 0.01.)
3. Anche questa è giustificata. Il p-value non misura l'intensità dell'effetto, perché dipende anche dalla numerosità del campione e dalla variabilità dei dati, e un effetto debole studiato su un campione grande può dare un p-value più piccolo di un effetto forte studiato su pochi individui.
4. Vale la stessa ragione, e l'affermazione è ancora giustificata.
5. Qui il 5% e il 95% sono scambiati. Se A non fosse efficace sarebbe vera l'ipotesi nulla, e la replica la rifiuterebbe (falso positivo) con probabilità 5%, non 95%: quindi l'affermazione non è giustificata.
6. Ora la stessa cosa è detta nel verso giusto, e l'affermazione è giustificata. Se l'ipotesi nulla è vera, il test la rifiuta nel 5% dei casi, e nel restante 95% non la rifiuta, ossia non riproduce il risultato positivo.
7. L'affermazione non è giustificata, perché il 5% è la probabilità di un falso positivo, e riguarda il caso in cui l'ipotesi nulla è vera. Se il farmaco è efficace, la probabilità di non rifiutare l'ipotesi nulla è quella di un falso negativo, β, che dipende dall'intensità dell'effetto e dalla numerosità del campione e non si ricava dal livello di significatività.
8. Neanche questa è giustificata. Il p-value si calcola *supponendo* vera l'ipotesi nulla: è la probabilità di osservare dati come questi, o più estremi, se il farmaco non fosse efficace. La probabilità che il farmaco non sia efficace è un'altra cosa, e il test non la fornisce.
9. Anche l'ultima non è giustificata. Se A non fosse efficace, due studi indipendenti darebbero entrambi un risultato positivo con probabilità minore di $0.05 \cdot 0.05 = 0.0025$, che è meno di 0.01, quindi l'evidenza complessiva a favore di A sarebbe, semmai, maggiore.

Fai attenzione soprattutto alla 1 e alla 8 — sono i due modi più comuni di fraintendere il p-value.

Esercizio 116 (p. 169)
I valori assunti da una variabile statistica su un campione di sei individui sono

$$27.4 \quad 6.7 \quad 6.9 \quad 15.2 \quad 18.2 \quad 35.2$$

1. Calcola media, varianza (σ^2) e varianza campionaria (s^2) di questi valori.
2. Con che intervallo di confidenza al 95% possiamo stimare la media della popolazione?
3. Possiamo dire che la media della popolazione è diversa da 0 al livello di significatività $\alpha = 0.01$?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Cominciamo dalla media,

$$\hat{\mu} = \frac{27.4 + 6.7 + 6.9 + 15.2 + 18.2 + 35.2}{6} = \frac{109.6}{6} = 18.267$$

e scriviamo in una tabella gli scarti dalla media, che poi eleviamo al quadrato.

x_i	27.4	6.7	6.9	15.2	18.2	35.2
$x_i - \hat{\mu}$	9.133	−11.567	−11.367	−3.067	−0.067	16.933
$(x_i - \hat{\mu})^2$	83.418	133.788	129.201	9.404	0.004	286.738

I quadrati sommano a 642.553, e questa somma va divisa per $n = 6$ per avere la varianza, per $n - 1 = 5$ per avere la varianza campionaria. I tre risultati richiesti sono quindi

$$\hat{\mu} = 18.27 \qquad \sigma^2 = \frac{642.553}{6} = 107.1 \qquad s^2 = \frac{642.553}{5} = 128.5$$

□

Soluzione della domanda 2. Su un campione così piccolo usiamo il metodo più generale, con la t di Student, per il quale ci occorrono la deviazione standard campionaria e l'errore standard della media:

$$s = \sqrt{128.51} = 11.336 \qquad \widehat{\mathrm{SEM}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{11.336}{\sqrt{6}} = 4.628$$

La soglia è $t_{0.025,5} = 2.57$ (tavola in appendice, riga $6 - 1 = 5$, colonna 0.025), da cui

$$\mu = \hat{\mu} \pm 2.57 \cdot \widehat{\mathrm{SEM}} = 18.27 \pm 11.89 \qquad \text{ossia} \qquad \mu = 18 \pm 12$$

al 95% di confidenza (l'intervallo va da 6.4 a 30.2). □

Soluzione della domanda 3. Per rispondere usiamo il test t sulla media, con l'ipotesi nulla $\mu = 0$, e calcoliamo

$$t = \frac{|\hat{\mu} - 0|}{s/\sqrt{n}} = \frac{18.267}{4.628} \approx 3.95$$

Al livello di significatività 0.01 rifiutiamo l'ipotesi nulla se t supera la soglia $t_{0.005,5} = 4.03$ (colonna 0.005 della tavola, con 5 gradi di libertà). Ma $3.95 < 4.03$, quindi non possiamo rifiutarla, e i dati non permettono di dire, a questo livello, che la media della popolazione sia diversa da 0.

Il nostro 3.95 resta di poco sotto la soglia. Al livello 0.05 la soglia sarebbe $t_{0.025,5} = 2.57$, e siccome $3.95 > 2.57$ la differenza da 0 è significativa, ma non fortemente significativa. È la stessa cosa che vediamo con gli intervalli di confidenza — 0 cade fuori da quello al 95% trovato sopra, ma dentro quello al 99%, $18.27 \pm 4.03 \cdot 4.628$, che va da -0.4 a 36.9. □

Esercizio 117 (p. 169)
Saggia l'affermazione che le nascite sono distribuite uniformemente fra i mesi dell'anno (ossia che in ogni mese avvenga, in media, un dodicesimo delle nascite), usando i seguenti dati, raccolti nel corso di un anno.

gennaio	35	luglio	36
febbraio	31	agosto	38
marzo	35	settembre	37
aprile	32	ottobre	36
maggio	35	novembre	35
giugno	35	dicembre	35

Soluzione. Le nascite sono in tutto 420, quindi, se l'ipotesi nulla fosse vera, ce ne attenderemmo $\frac{420}{12} = 35$ al mese. Le differenze fra frequenze osservate e teoriche sono, in valore assoluto,

$$0 \quad 4 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0$$

da cui

$$\chi^2 = \frac{4^2 + 3^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2}{35} = \frac{40}{35} \approx 1.14$$

Con $12 - 1 = 11$ gradi di libertà, la soglia al livello 0.05 è $\chi^2_{0.05,11} = 19.68$. Siccome $1.14 < 19.68$ non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla: i dati sono compatibili con una distribuzione uniforme delle nascite fra i mesi.

Esercizio 118 (p. 169)
La popolazione costituita da tutte le piante di una certa specie si divide in quattro categorie osservando due tratti genetici indipendenti. Indichiamo le quattro categorie con AB, aB, Ab, ab, dove le lettere maiuscole indicano il carattere dominante e le minuscole quello recessivo. Secondo la teoria di Mendel, gli individui nelle quattro categorie si suddividono nella proporzione

$$\text{AB} : \text{aB} : \text{Ab} : \text{ab} = 9 : 3 : 3 : 1$$

In un campione di 160 piante si trovano 100 individui del fenotipo AB, 23 aB, 25 Ab e 12 ab. Possiamo concludere, al livello di significatività $\alpha = 0.05$, che i due tratti in questione non si comportano come previsto dalla teoria?

Soluzione. Usiamo un test χ^2. L'ipotesi nulla è che le frequenze relative delle quattro categorie siano $\frac{9}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{16}$ e $\frac{1}{16}$ (le parti sono in tutto $9+3+3+1=16$). Su 160 piante le frequenze teoriche sono quindi $160 \cdot \frac{9}{16} = 90$, e così via.

	AB	aB	Ab	ab	totale
frequenze osservate	100	23	25	12	160
frequenze teoriche	90	30	30	10	160

Le frequenze teoriche sono tutte maggiori di 5: la condizione di Cochran è soddisfatta.

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(100-90)^2}{90} + \frac{(23-30)^2}{30} + \frac{(25-30)^2}{30} + \frac{(12-10)^2}{10} \\ &\approx 1.11 + 1.63 + 0.83 + 0.40 \approx 3.98\end{aligned}$$

I gradi di libertà sono $4-1=3$, e $\chi^2_{0.05,3} = 7.81$. Siccome $3.98 < 7.81$, non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla: i dati non danno evidenza statistica che i due tratti si comportino diversamente da come prevede la teoria. Attenzione a come si formula la conclusione: il test non dimostra che la teoria sia giusta. Dice soltanto che scostamenti come quelli osservati sono compatibili con il caso.

Esercizio 119 (p. 169)
Un campione composto da 75 uomini e 25 donne viene sottoposto ad un trattamento per l'emicrania. Dopo un mese, 32 partecipanti fra cui 26 uomini dichiarano di non aver tratto giovamento dal trattamento; altri 28 uomini dichiarano di aver tratto solo un minimo giovamento dal trattamento e 13 donne di averne tratto forte giovamento.

1. Costruisci la tabella di contingenza della distribuzione del risultato del trattamento fra uomini e donne.
2. Se si trattassero 100 uomini e 100 donne, quale proporzione totale se ne attenderebbe con forte giovamento?
3. Possiamo concludere, con un livello di significatività di 0.05, che il trattamento abbia un effetto diverso fra uomini e donne?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Le caselle mancanti si ricavano per differenza dai totali.

	uomini	donne	totale
nessun giovamento	26	6	32
giovamento minimo	28	6	34
forte giovamento	21	13	34
totale	75	25	100

□

Soluzione della domanda 2. Fra gli uomini ha avuto forte giovamento la frazione $\frac{21}{75}$, fra le donne $\frac{13}{25}$. Su 100 uomini e 100 donne ce ne attenderemmo $100 \cdot \frac{21}{75} + 100 \cdot \frac{13}{25} = 28 + 52 = 80$ su 200, ossia

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{75} + \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{25} = 0.40 = 40\%$$

(non $\frac{34}{100} = 34\%$: nel campione gli uomini sono il triplo delle donne, e fra loro il forte giovamento è meno frequente.) □

Soluzione della domanda 3. Ipotesi nulla: l'esito del trattamento è indipendente dal sesso.

Le frequenze teoriche $\bar{n}_{i,j} = \frac{c_i \cdot r_j}{n}$ sono

	uomini	donne
nessun giovamento	24.0	8.0
giovamento minimo	25.5	8.5
forte giovamento	25.5	8.5

(tutte maggiori di 5: la condizione di Cochran è soddisfatta).

$$\chi^2 = \frac{(26 - 24.0)^2}{24.0} + \frac{(6 - 8.0)^2}{8.0} + \ldots \approx 4.82$$

I gradi di libertà sono $(2-1) \cdot (3-1) = 2$, e $\chi^2_{0.05,\,2} = 5.99$. Siccome $4.82 < 5.99$, non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla al livello 0.05: i dati non bastano a concludere che il trattamento abbia un effetto diverso fra uomini e donne. □

Esercizio 120 (p. 170)
Si conduce uno studio per rilevare se la prevalenza di diabete negli anziani è associata alla loro autonomia (vivere autonomamente; assistenza domiciliare; casa di cura). Si campionano 1000 anziani di cui 200 sono diabetici. Fra i non diabetici, il 40% vive autonomamente ed il 30% si avvale di assistenza domiciliare. Fra i diabetici il 25% vive autonomamente e il 50% vive in casa di cura. Dalla tabella di contingenza ottenuta dal campione stimare:

1. la probabilità che un anziano sia affetto da diabete e la probabilità che un soggetto che vive in casa di cura sia affetto da diabete;
2. la probabilità che un soggetto viva in casa di cura e sia affetto da diabete.
3. Si può affermare che la distribuzione di probabilità della variabile autonomia sia diversa fra i diabetici e i non diabetici con un livello di significatività di 0.01?

Soluzione. La tabella di contingenza è la seguente (le percentuali mancanti si ricavano per differenza: $100\% - 40\% - 30\% = 30\%$ e $100\% - 25\% - 50\% = 25\%$).

	non diabetici	diabetici	totale
autonomi	320	50	370
assistenza domiciliare	240	50	290
casa di cura	240	100	340
totale	800	200	1000

Soluzione della domanda 1. I diabetici sono 200 su 1000: $\frac{200}{1000} = 0.2$. Fra i 340 anziani in casa di cura i diabetici sono 100: $\frac{100}{340} \approx 0.29$. □

Soluzione della domanda 2. $\frac{100}{1000} = 0.1$. □

Soluzione della domanda 3. Ipotesi nulla: autonomia e diabete sono indipendenti.

Le frequenze teoriche sono

	non diabetici	diabetici
autonomi	296	74
assistenza domiciliare	232	58
casa di cura	272	68

(per esempio $\frac{800 \cdot 370}{1000} = 296$), da cui

$$\chi^2 = \frac{(320-296)^2}{296} + \frac{(50-74)^2}{74} + \frac{(240-232)^2}{232} + \ldots \approx 29.9$$

Con $(2-1)\cdot(3-1) = 2$ gradi di libertà la soglia è $\chi^2_{0.01,\,2} = 9.21$. Siccome $29.9 > 9.21$ rifiutiamo l'ipotesi nulla al livello di significatività 0.01: la distribuzione dell'autonomia è diversa fra diabetici e non diabetici. □

Esercizio 121 (p. 170)
Il farmaco **Neo Snake Oil Plus Forte** è stato somministrato a un campione randomizzato di 100 volontari in buona salute, mentre ad altri 100 è stato somministrato un placebo. Ad ogni individuo è stato chiesto di eseguire determinate prove psico-fisiche, e quindi indicare un eventuale miglioramento o peggioramento in una serie di parametri. Il numero di risposte ricevute è dato nella tabella seguente (+ indica un miglioramento, = nessuna variazione, − un peggioramento).

parametro	farmaco +	farmaco =	farmaco −	placebo +	placebo =	placebo −
Attenzione	26	52	22	20	61	19
Resistenza alla fatica	45	12	43	46	11	43
Qualità del sonno	23	55	22	18	60	22
Acuità visiva	7	86	7	5	85	10
Memoria a breve termine	18	57	25	15	63	22
Memoria a lungo termine	7	85	8	6	87	7
Velocità di reazione	9	88	3	5	87	8
Apprendimento	13	73	14	13	72	15
Umore	35	33	32	24	53	23
Riduzione dell'ansia	19	60	21	25	58	17
Gestione dello stress	26	56	18	21	63	16
Motivazione	45	6	49	44	10	46
Digestione regolare	12	81	7	6	91	3
Idratazione cutanea	22	56	22	24	50	26
Forza muscolare	45	9	46	29	19	52

parametro	farmaco +	farmaco =	farmaco −	placebo +	placebo =	placebo −
Recupero post-allenamento	9	76	15	9	78	13
Resistenza aerobica	37	36	27	36	35	29
Coordinazione motoria	24	51	25	21	48	31
Riduzione del dolore	16	66	18	23	57	20
Libido	44	5	51	41	4	55
Funzione sessuale	7	86	7	13	83	4
Udito	24	53	23	19	57	24
Problem-solving	41	13	46	47	14	39
Creatività	13	76	11	10	76	14
Ritmo circadiano	36	27	37	33	32	35
Socialità	49	16	35	41	15	44
Autostima	42	10	48	46	8	46
Concentrazione	37	18	45	39	23	38
Durata del sonno	47	13	40	43	11	46
Congestione nasale	40	9	51	49	7	44

1. Usa un test χ^2 per concludere che non c'è evidenza statistica, al livello di significatività $\alpha = 0.05$, che il farmaco abbia un effetto sull'attenzione.
2. Trova uno dei parametri, che chiameremo P, tale che un test χ^2 permetta di concludere che il farmaco ha un effetto su P statisticamente significativo al livello $\alpha = 0.05$.
3. Spiega dettagliatamente perché l'esperimento precedente, in realtà, non fornisce alcuna evidenza statistica a favore dell'ipotesi che il farmaco abbia influenza sul parametro P.

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Ipotesi nulla: la risposta sull'attenzione è indipendente dal gruppo.

Accanto alla tabella di contingenza scriviamo quella delle frequenze teoriche (per esempio $\frac{100\cdot 46}{200} = 23$).

	farmaco	placebo	totale
+	26	20	46
=	52	61	113
−	22	19	41
totale	100	100	200

	farmaco	placebo
+	23	23
=	56.5	56.5
−	20.5	20.5

Le frequenze teoriche sono tutte maggiori di 5, quindi la condizione di Cochran è soddisfatta. Siccome i due gruppi hanno la stessa numerosità, gli scarti sono uguali a due a due, e nel calcolo di χ^2 ci basta raddoppiare i termini della prima colonna

$$\chi^2 = 2 \cdot \left(\frac{(26-23)^2}{23} + \frac{(52-56.5)^2}{56.5} + \frac{(22-20.5)^2}{20.5} \right) \approx 2 \cdot (0.391 + 0.358 + 0.110) \approx 1.72$$

Con $(2-1)\cdot(3-1) = 2$ gradi di libertà la soglia è $\chi^2_{0.05,\,2} = 5.99$, e siccome $1.72 < 5.99$ non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla al livello di significatività 0.05. Non c'è quindi evidenza statistica di un effetto sull'attenzione. □

Soluzione della domanda 2. Conviene cercare le righe in cui i due gruppi differiscono di più. Per l'umore abbiamo 35, 33, 32 risposte contro 24, 53, 23, con totali 59, 86 e 55, quindi le frequenze teoriche sono 29.5, 43 e 27.5 per entrambi i gruppi, e

$$\chi^2 = 2 \cdot \left(\frac{(35-29.5)^2}{29.5} + \frac{(33-43)^2}{43} + \frac{(32-27.5)^2}{27.5} \right) \approx 2 \cdot (1.025 + 2.326 + 0.736) \approx 8.17$$

Siccome $8.17 > \chi^2_{0.05,2} = 5.99$, rifiutiamo l'ipotesi nulla al livello di significatività 0.05, e possiamo prendere P = umore. Andrebbe bene anche la forza muscolare, con $\chi^2 \approx 7.40$ — sono gli unici due parametri, su trenta, per cui il test risulta significativo. □

Soluzione della domanda 3. Il parametro P non è stato fissato prima di raccogliere i dati, ma lo abbiamo scelto dopo averli guardati, fra trenta parametri, ossia, in pratica, abbiamo eseguito trenta test. Se il farmaco non avesse alcun effetto, ciascun test darebbe comunque un falso positivo con probabilità 0.05, quindi su trenta test ce ne aspetteremmo in media $30 \cdot 0.05 = 1.5$. Noi ne abbiamo trovati due, più o meno quanti ce ne aspetteremmo per il mero effetto del caso, assumendo che il farmaco non faccia niente.

Per tenere conto della molteplicità dei test in maniera precisa, applichiamo la correzione di Bonferroni, e, per ogni singolo test, usiamo la soglia $p < \frac{0.05}{30} \approx 0.0017$. Per l'umore $\chi^2 = 8.17$ è minore di $\chi^2_{0.01,2} = 9.21$, quindi il risultato non è significativo nemmeno al livello di significatività 0.01, e tanto meno al livello 0.0017 che sarebbe necessario. Lo stesso vale per la forza muscolare. L'esperimento non fornisce quindi evidenza statistica di un effetto del farmaco su alcun parametro. □

Test 122 (p. 179)
Calcola la derivata di $f(x) = x(x-1)(x+1)$.

Soluzione.

$$f(x) = x(x^2-1) = x^3 - x \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = (x^3)' - (x)' = 3x^2 - 1$$

Test 123 (p. 179)
Calcola la derivata di $f(x) = x^4 - \sin(x) + 10^x$.

Soluzione.

$$f'(x) = (x^4)' - (\sin(x))' + (10^x)' = 4x^3 - \cos(x) + 10^x \log_e(10)$$

Test 124 (p. 179)
Calcola la derivata di $f(x) = \sin(2x)\cos(3x)$.

Soluzione.

$$f'(x) = (\sin(2x))'\cos(3x) + \sin(2x)(\cos(3x))' = 2\cos(2x)\cos(3x) - 3\sin(2x)\sin(3x)$$

Test 125 (p. 179)
Calcola la derivata di $f(x) = e^x \cos(x)$.

Soluzione.

$$f'(x) = \big(e^x\big)' \cos(x) + e^x \big(\cos(x)\big)' = e^x \cos(x) - e^x \sin(x) = e^x\big(\cos(x) - \sin(x)\big)$$

Test 126 (p. 179)
Calcola la derivata di $f(x) = e^{x\cos(x)}$.

Soluzione. Questa è una funzione composta

$$x \xrightarrow{\alpha : \square \mapsto \square\cos(\square)} x\cos(x) \xrightarrow{\beta : \triangle \mapsto e^{\triangle}} e^{x\cos(x)}$$

ossia $f(x) = \beta\big(\alpha(x)\big)$, e quindi $f'(x) = \beta'\big(\alpha(x)\big) \cdot \alpha'(x)$. Ora

$$\alpha'(x) = \big(x\cos(x)\big)' = (x)'\cos(x) + x\big(\cos(x)\big)' = \cos(x) - x\sin(x) \qquad \beta'(\triangle) = e^{\triangle}$$

da cui

$$f'(x) = e^{x\cos(x)} \cdot \big(\cos(x) - x\sin(x)\big)$$

Test 127 (p. 180)
Calcola la derivata di $f(x) = x^x$.

Soluzione. Come sopra, $x^x = e^{x\log_e(x)}$ è una funzione composta

$$x \xrightarrow{\alpha : \square \mapsto \square\log_e(\square)} x\log_e(x) \xrightarrow{\beta : \triangle \mapsto e^{\triangle}} e^{x\log_e(x)}$$

$$\alpha'(x) = (x)'\log_e(x) + x\big(\log_e(x)\big)' = \log_e(x) + 1 \qquad \beta'(\triangle) = e^{\triangle}$$

$$f'(x) = e^{x\log_e(x)} \cdot \big(1 + \log_e(x)\big) = x^x\big(1 + \log_e(x)\big)$$

Test 128 (p. 180)
Calcola la derivata di $f(x) = \tan(x) + \log_e(x)$.

Soluzione.

$$f'(x) = \big(\tan(x)\big)' + \big(\log_e(x)\big)' = \frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2} + \frac{1}{x}$$

Test 129 (p. 180)
Calcola la derivata di $f(x) = \sin(x^2) + \log_{10}(x)$.

Soluzione. Studiamo separatamente i due addendi. Il primo, $\sin(x^2)$, è una funzione composta

$$x \longmapsto x^2 \longmapsto \sin(x^2) \qquad \Longrightarrow \qquad \big(\sin(x^2)\big)' = \underbrace{\cos(x^2)}_{\sin'} \cdot \underbrace{2x}_{(x^2)'}$$

La derivata di $\log_{10}(x)$ è data da una formula mnemonica

$$\big(\log_b(x)\big)' = \frac{1}{x \cdot \log_e(b)}$$

però si può anche ricavare dalla formula di cambiamento di base:

$$\big(\log_b(x)\big)' = \underbrace{\left(\frac{\log_e(x)}{\log_e(b)}\right)'}_{(k\cdot f(x))' = k\cdot f'(x)} = \frac{1}{\log_e(b)} \cdot \underbrace{\big(\log_e(x)\big)'}_{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x \cdot \log_e(b)}$$

Mettendo le cose insieme

$$f'(x) = \big(\sin(x^2)\big)' + \big(\log_{10}(x)\big)' = 2x\cos(x^2) + \frac{1}{x \cdot \log_e(10)}$$

Test 130 (p. 180)
Calcola la derivata di $f(x) = \log_x(2)$.

Soluzione. Purtroppo non abbiamo una formula per derivare rispetto alla base. Per uscirne dobbiamo quindi usare la formula di cambiamento di base:

$$f(x) = \log_x(2) = \frac{\log_e(2)}{\log_e(x)}$$

Abbiamo ora una funzione composta

$$x \xrightarrow{\alpha : \square \mapsto \log_e(\square)} \log_e(x) \xrightarrow{\beta : \triangle \mapsto \frac{\log_e(2)}{\triangle}} \frac{\log_e(2)}{\log_e(x)}$$

$$f'(x) = -\frac{\log_e(2)}{\big(\log_e(x)\big)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-\log_e(2)}{x\big(\log_e(x)\big)^2}$$

Test 131 (p. 180)
Calcola la derivata di $f(x) = \log_e(x^4)$.

Soluzione. Metodo 1 (proprietà dei logaritmi).

$$f(x) = \log_e(x^4) = 4\log_e(x) \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = 4 \cdot \big(\log_e(x)\big)' = \frac{4}{x}$$

Metodo 2 (funzione composta). $x \longmapsto x^4 \longmapsto \log_e(x^4)$, quindi

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{x^4}}_{\log_e'(x^4)} \cdot \underbrace{4x^3}_{(x^4)'} = \frac{4}{x}$$

Esercizio 132 (p. 180)
Trova un polinomio di terzo grado $f(x)$ tale che $x^2 + x \cdot f'(x) = 3 \cdot f(x)$ e $f(1) = 0$.

Soluzione. Il generico polinomio di terzo grado è $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, e la sua derivata è $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Sostituiamo nell'equazione:

$$\underbrace{x^2 + 3ax^3 + 2bx^2 + cx}_{x^2 + x \cdot f'(x)} = \underbrace{3ax^3 + 3bx^2 + 3cx + 3d}_{3 \cdot f(x)}$$

I termini $3ax^3$ si cancellano, e portando tutto a primo membro resta

$$(1 - b)x^2 - 2cx - 3d = 0$$

Questa equazione deve essere soddisfatta per qualunque valore della x, di conseguenza i suoi coefficienti sono tutti nulli:

$$1 - b = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 1 \qquad c = 0 \qquad d = 0$$

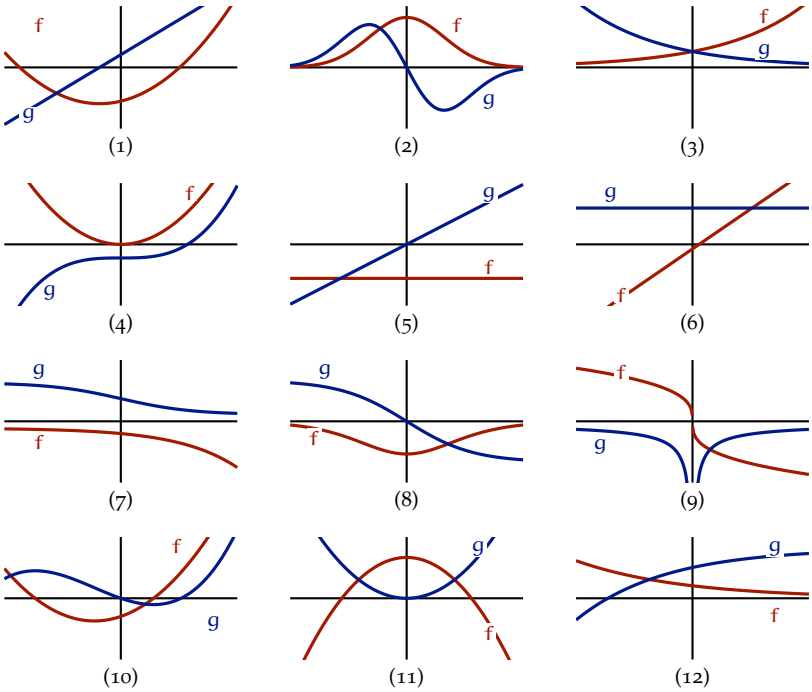
Abbiamo quindi $f(x) = ax^3 + x^2$, però dobbiamo ancora sfruttare il dato $f(1) = 0$:

$$0 = f(1) = a + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad a = -1$$

In conclusione $f(x) = -x^3 + x^2$.

Approfondimento (fuori programma)
Perché i coefficienti devono essere tutti nulli? Se così non fosse potremmo risolvere l'equazione $(1 - b)x^2 - 2cx - 3d = 0$, e otterremmo alcuni specifici valori di x che la soddisfano, mentre tutti gli altri non la soddisfano. Noi vogliamo, però, che qualunque x la soddisfi, e questo è possibile solo se l'equazione non contiene la x affatto, ossia si riduce a $0 = 0$. Questa osservazione si chiama principio di identità dei polinomi.

Esercizio 133 (p. 187)
Per ciascuna di queste coppie di grafici decidi se f potrebbe essere la derivata di g, o g quella di f, oppure non si dà nessuno di questi due casi.



Soluzione. Conviene ragionare sempre allo stesso modo: dove il grafico del candidato "funzione" sale, il candidato "derivata" deve stare sopra l'asse; dove scende, sotto; dove il grafico è orizzontale, la derivata si annulla. Inoltre una retta ha pendenza costante, quindi la sua derivata è una costante.

coppia	$g = f'$	$f = g'$	perché
(1)	✓		f scende dove la retta g è negativa, sale dove è positiva, e ha il minimo dove g taglia l'asse.
		✗	la derivata della retta g è costante, ma f no.
(2)	✓		g si annulla nel massimo di f, ed è positiva dove f sale.
		✗	g scende dopo l'origine, mentre f resta positiva.
(3)	✗		f sale, quindi f' è positiva e crescente, mentre g scende.
		✗	g scende, quindi g' è negativa, mentre f è positiva.
(4)	✗		f sale subito a destra di 0, dove g è ancora negativa.
		✓	g è orizzontale in 0, dove f si annulla, e sale dove $f > 0$.
(5)	✗		f è costante, quindi $f' = 0$, mentre g non è nulla.
		✗	g' è una costante positiva, mentre f è negativa.
(6)	✓		la pendenza di f è costante e positiva, come g.
		✗	la derivata della costante g è nulla.
(7)	✗		f scende, quindi f' è negativa, mentre g è positiva.
		✗	a destra, g si appiattisce, quindi g' si avvicina a zero, mentre f diventa sempre più negativa.
(8)	✗		g è positiva dove f scende, ossia dove f' è negativa, e viceversa.
		✓	g scende sempre, ed è più ripida dove f ha il minimo, piatta dove f si avvicina a zero.
(9)	✓		f scende sempre, e ha tangente verticale in 0: la sua derivata è negativa ovunque e sprofonda in 0, come g.
		✗	g sale a destra di 0, mentre f scende.
(10)	✗		dove f scende, g è positiva.
		✓	g è orizzontale dove f taglia l'asse, e sale dove $f > 0$.
(11)	✗		f scende a destra di 0, dove g è positiva.
		✗	g scende a sinistra di 0, mentre f vicino a 0 è positiva.
(12)	✗		f scende, quindi f' è negativa, mentre g è quasi ovunque positiva.
		✓	g sale sempre più lentamente, e infatti f è positiva e decrescente.

Esercizio 134 (p. 187)
Traccia il grafico cartesiano della funzione $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ per $0 \leqslant x \leqslant 3$. Determina quindi il massimo ed il minimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo.

Soluzione. Calcoliamo la derivata di f,

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

che si annulla per $\sqrt{x} = 1$, ossia in $x = 1$, che cade nell'intervallo. Per $0 < x < 1$ la frazione $1/\sqrt{x}$ è maggiore di 1, quindi $f'(x) < 0$, mentre per $x > 1$ è minore di 1 e $f'(x) > 0$. La funzione scende quindi fino a $x = 1$ e poi risale. Siccome è continua sull'intervallo chiuso, il massimo e il minimo vanno cercati in $x = 1$ e negli estremi, dove f vale

$$f(0) = 0 \qquad f(1) = 1 - 2 = -1 \qquad f(3) = 3 - 2\sqrt{3} = 3 - 3.4641 = -0.4641$$

da cui

$$\text{massimo} = f(0) = 0 \qquad \text{minimo} = f(1) = -1$$

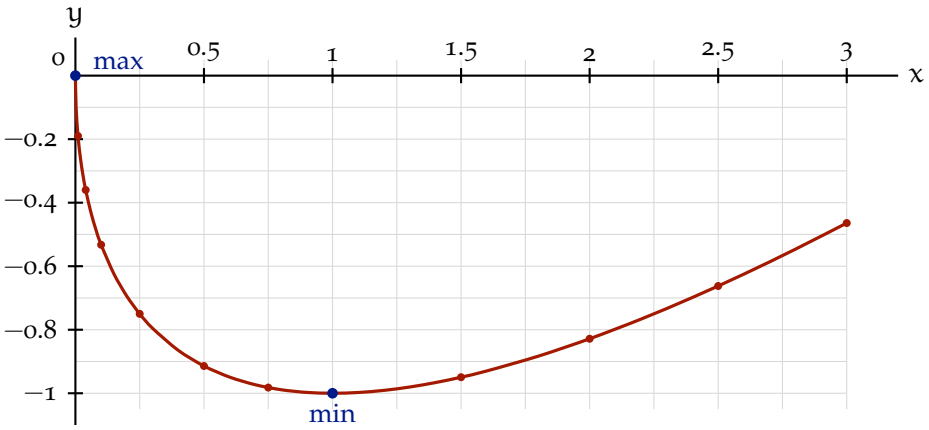
(Il massimo è nell'estremo sinistro dell'intervallo, non in un punto stazionario, perché $f(3)$ è negativo e $f(0) = 0$.)

Nella tabella dei valori per il grafico infittisco i punti vicino a $x = 0$, dove la derivata è molto grande in valore assoluto — la tangente in 0 è verticale.

x	0	0.01	0.04	0.1	0.25	0.5	0.75
$f(x)$	0	−0.190	−0.360	−0.532	−0.750	−0.914	−0.982

x	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$	−1	−0.949	−0.828	−0.662	−0.464

Le ordinate stanno fra -1 e 0, e per l'asse y scelgo un'unità più lunga di quella dell'asse x.



Anche senza derivate si vede che il massimo è in $x = 0$ — la funzione, che possiamo scrivere come $f(x) = \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 2)$, è negativa per $0 < x < 4$, quindi su tutto l'intervallo tranne che in $x = 0$, dove vale 0.

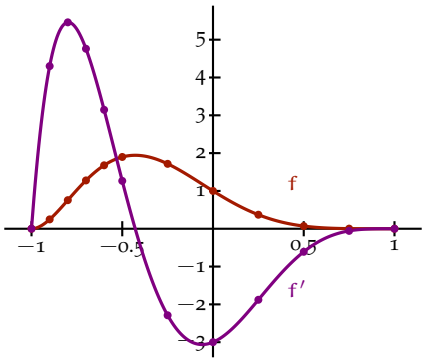
Esercizio 135 (p. 188)
Traccia il grafico di $f(x) = (1+x)^2(1-x)^5$ e della sua derivata $f'(x)$, per x fra -1 e 1; quindi calcola esattamente in quali punti il grafico di $f(x)$ è orizzontale.

Soluzione. Cominciamo dalla derivata, che calcoliamo con la regola del prodotto:

$$f'(x) = 2(1+x)(1-x)^5 - 5(1+x)^2(1-x)^4$$

Per il grafico calcolo alcuni valori di f e di f', infittendo vicino a -1, dove la derivata sale e scende in fretta.

x	−1	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x)$	0	0.25	0.76	1.28	1.68	1.90	1.72	1.00	0.37	0.07	0.003	0
$f'(x)$	0	4.30	5.46	4.76	3.15	1.27	−2.29	−3.00	−1.88	−0.61	−0.06	0



I punti in cui il grafico è orizzontale sono i punti di annullamento della derivata (i punti stazionari). Per risolvere l'equazione $f'(x) = 0$ conviene raccogliere il fattore $(1+x)(1-x)^4$ nell'espressione di f':

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(1+x)(1-x)^5 - 5(1+x)^2(1-x)^4 \\ &= (1+x)(1-x)^4\big(2(1-x) - 5(1+x)\big) = (1+x)(1-x)^4(-3-7x) \end{aligned}$$

Quindi

$$f'(x) = 0 \iff \underbrace{(1+x)}_{x=-1}\underbrace{(1-x)^4}_{x=1}\underbrace{(-3-7x)}_{x=-3/7} = 0$$

$$\iff x = -1 \text{ oppure } x = 1 \text{ oppure } x = -\tfrac{3}{7}$$

I punti in cui il grafico è orizzontale hanno quindi ascissa -1, $-\frac{3}{7}$ e 1.

Nota importante
Espandere il polinomio f' anziché raccogliere, cioè scrivere

$$f'(x) = -7x^6 + 18x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 + 2x - 3$$

e poi tentare di risolvere l'equazione, è una cattiva idea. Usando la regola di Ruffini si può fare, e chiaramente si ottengono le soluzioni corrette, ma i calcoli sono così tanti che è difficilissimo non commettere neanche una disattenzione. E ne basta una per cancellare il valore dell'intero procedimento.

Esercizio 136 (p. 188)
Traccia il grafico di

$$f(x) = 0.60 + 0.41\,x - \sqrt{x}$$

per $1 \leqslant x \leqslant 2$ su un diagramma cartesiano. Determina il massimo e il minimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo, scrivendo i risultati correttamente arrotondati a quattro cifre significative.

Soluzione. Siccome il dominio è l'intervallo chiuso $[1,2]$, massimo e minimo esistono, e li cerchiamo fra i punti stazionari e gli estremi. Deriviamo (ricordando che $\left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$),

$$f'(x) = 0.41 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e troviamo il punto stazionario risolvendo

$$0.41 = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{1}{0.82} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{0.82^2} = 1.4872$$

Il punto x_1 appartiene a $[1, 2]$, quindi confrontiamo i valori di f in 1, in x_1 e in 2:

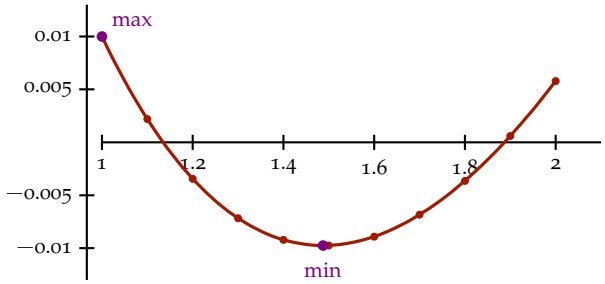
x	1	1.4872	2
$f(x)$	0.01000	−0.009756	0.005786

Il valore più grande è quello in $x = 1$, il più piccolo quello in $x = 1.4872$, quindi

massimo $= 0.01000$ minimo $= -0.009756$

I valori di f stanno tutti fra -0.01 e 0.01, e con la stessa scala sui due assi la curva si confonderebbe con l'asse x. Per il grafico do quindi alle ordinate una scala molto più grande che alle ascisse, e calcolo alcuni valori.

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$f(x)$	0.0100	0.0022	−0.0034	−0.0072	−0.0092	−0.0097	−0.0089	−0.0068	−0.0036	0.0006	0.0058



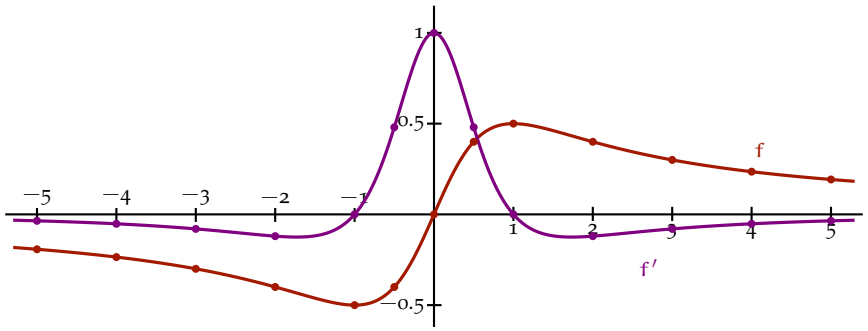
Esercizio 137 (p. 188)
Traccia il grafico di $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ e della sua derivata $f'(x)$, per x fra -5 e 5; quindi calcola esattamente in quali punti il grafico di $f(x)$ è orizzontale, e in quali raggiunge la massima e la minima pendenza.

Soluzione. La derivata si calcola con la regola del quoziente:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - 2x \cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$$

Per il grafico calcolo alcuni valori di f e di f', infittendo vicino a 0, dove le due funzioni cambiano in fretta.

x	−5	−4	−3	−2	−1	−0.5	0	0.5	1	2	3	4	5
$f(x)$	−0.19	−0.24	−0.30	−0.40	−0.50	−0.40	0	0.40	0.50	0.40	0.30	0.24	0.19
$f'(x)$	−0.04	−0.05	−0.08	−0.12	0	0.48	1.00	0.48	0	−0.12	−0.08	−0.05	−0.04



Il grafico è orizzontale dove $f'(x) = 0$:

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \iff 1-x^2 = 0 \iff x = \pm 1$$

(il denominatore non si annulla mai).

I punti di massima e minima pendenza sono i massimi e i minimi della derivata. Conviene quindi calcolare i punti in cui si annulla la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - 4(1-x^2)(x^2+1)x}{(x^2+1)^4} = \frac{x(x^2+1)(2x^2-6)}{(x^2+1)^4}$$

Come nell'esercizio 135 (p. 188), conviene raccogliere il fattore comune $x(x^2+1)$. Le soluzioni dell'equazione $f'' = 0$ sono 0 e $\pm\sqrt{3}$, quindi massimi e minimi di f' possono trovarsi solo nei punti seguenti (gli estremi ± 5 del tratto che stiamo studiando e i tre punti stazionari di f').

x	-5	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	5
$f'(x)$	$-\frac{6}{13^2}$	$-\frac{1}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{6}{13^2}$
		MIN	MAX	MIN	

La massima pendenza di $f(x)$ si ha in $x = 0$ (pendenza $= 1$); la minima in $x = -\sqrt{3}$ e in $x = \sqrt{3}$ (pendenza $= -\frac{1}{8}$).

Nota importante
È utile verificare la correttezza dei calcoli usando il grafico: nel disegno qui sopra si vede bene che f' ha un picco in 0 e due avvallamenti poco oltre ± 1.7, e che il grafico di f è orizzontale in ± 1.

Esercizio 138 (p. 188)
Traccia il grafico di

$$f(x) = x - 5\sin(x)$$

per $0 \leqslant x \leqslant 10$ su un diagramma cartesiano. Trova i punti stazionari di $f(x)$ in questo intervallo, e determina il massimo e il minimo dei valori assunti da $f(x)$ nel medesimo intervallo. Indica i tuoi risultati con quattro cifre significative di precisione.

Soluzione. La derivata è

$$f'(x) = 1 - 5\cos(x)$$

e si annulla per

$$\cos(x) = \frac{1}{5} = 0.2$$

Troviamo $\arccos(0.2) = 1.369438$. Il coseno è pari e si ripete ogni 2π, ossia ogni 6.283185, quindi le soluzioni sono

$$x = \pm 1.369438 + 2k\pi$$

con k intero, e nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 10$ cadono

$$x_1 = 1.369438 \qquad x_2 = 2\pi - 1.369438 = 4.913747$$

$$x_3 = 2\pi + 1.369438 = 7.652624$$

(la successiva, $4\pi - 1.369438 = 11.197$, è fuori). Con quattro cifre significative, i punti stazionari sono

$$x_1 = 1.369 \qquad x_2 = 4.914 \qquad x_3 = 7.653$$

La derivata è negativa per $0 \leqslant x < x_1$ e per $x_2 < x < x_3$, dove $\cos(x) > 0.2$, e positiva altrove. Quindi f scende fino al *minimo locale* in x_1, sale fino al *massimo locale* in x_2, scende fino al *minimo locale* in x_3 e poi risale fino a $x = 10$.

Nei punti stazionari $\cos(x) = 0.2$, e quindi $\sin(x) = \pm\sqrt{1 - 0.04} = \pm 0.979796$, col segno positivo in x_1 e in x_3 e negativo in x_2. Con questi valori calcoliamo f nei punti stazionari e negli estremi:

x	0	$x_1 = 1.3694$	$x_2 = 4.9137$	$x_3 = 7.6526$	10
$5\sin(x)$	0	4.898979	-4.898979	4.898979	-2.720106
$f(x)$	0	-3.529541	9.812726	2.753645	12.720106

Quindi, con quattro cifre significative,

$$\text{massimo} = f(10) = 12.72 \qquad \text{minimo} = f(1.369) = -3.530$$

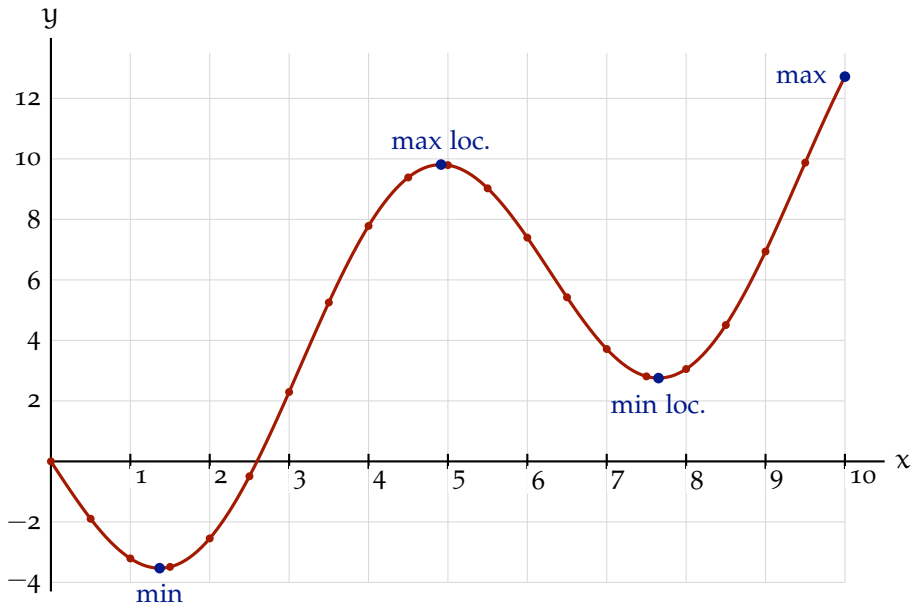
(I valori nei punti stazionari sono $f(x_1) = -3.530$, $f(x_2) = 9.813$, $f(x_3) = 2.754$. Il massimo è nell'estremo destro, non nel *massimo locale* x_2 — senza controllare gli estremi troveresti un massimo sbagliato.)

Per il grafico calcolo f ogni mezza unità, da 0 a 10:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(x)$	0	-1.90	-3.21	-3.49	-2.55	-0.49	2.29	5.25	7.78	9.39	9.79

x	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10
$f(x)$	9.03	7.40	5.42	3.72	2.81	3.05	4.51	6.94	9.88	12.72

Le ordinate vanno da circa -3.5 a circa 12.7, quindi sull'asse y prendo un'unità lunga meno della metà di quella dell'asse x.



Il grafico ha la forma che ci aspettiamo. Siccome $-5 \leqslant 5\sin(x) \leqslant 5$, sta sempre nella striscia fra le rette $y = x - 5$ e $y = x + 5$, e oscilla attorno alla retta $y = x$ con periodo 2π.

Esercizio 139 (p. 188)
Traccia il grafico cartesiano della funzione $f(x) = e^{-x}\cos(x)$ per $0 \leqslant x \leqslant 10$. Determina quindi il massimo e il minimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo.

Soluzione. Su un intervallo chiuso, e con f derivabile, massimo e minimo stanno negli estremi o nei punti stazionari, quindi calcoliamo intanto la derivata con la regola del prodotto:

$$f'(x) = -e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\sin(x) = -e^{-x}\big(\cos(x) + \sin(x)\big)$$

Siccome $e^{-x} > 0$, la derivata si annulla quando $\cos(x) + \sin(x) = 0$, ossia, dividendo per $\cos(x)$, quando

$$\tan(x) = -1$$

— dividendo non perdiamo nulla, perché dove $\cos(x) = 0$ si ha $\sin(x) = \pm 1$, e l'equazione non è soddisfatta. Le soluzioni sono $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$, e nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 10$ cadono

$$x_1 = \tfrac{3}{4}\pi = 2.35619 \qquad x_2 = \tfrac{7}{4}\pi = 5.49779 \qquad x_3 = \tfrac{11}{4}\pi = 8.63938$$

(la successiva, 11.78, è fuori). Calcoliamo f in questi tre punti e negli estremi:

x	0	$x_1 = 2.3562$	$x_2 = 5.4978$	$x_3 = 8.6394$	10
e^{-x}	1	0.094780	0.0040958	0.00017700	0.000045400
$\cos(x)$	1	-0.70711	0.70711	-0.70711	-0.83907
$f(x)$	1	-0.067020	0.0028962	-0.00012516	-0.000038094

Quindi

$$\text{massimo} = f(0) = 1 \qquad \text{minimo} = f\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) = f(2.356) \approx -0.0670$$

(in x_2 e in x_3 ci sono un *massimo locale* e un *minimo locale*, molto più piccoli in valore assoluto — il fattore e^{-x} smorza le oscillazioni del coseno, di un fattore $e^{-\pi} \approx 0.043$ a ogni mezzo periodo).

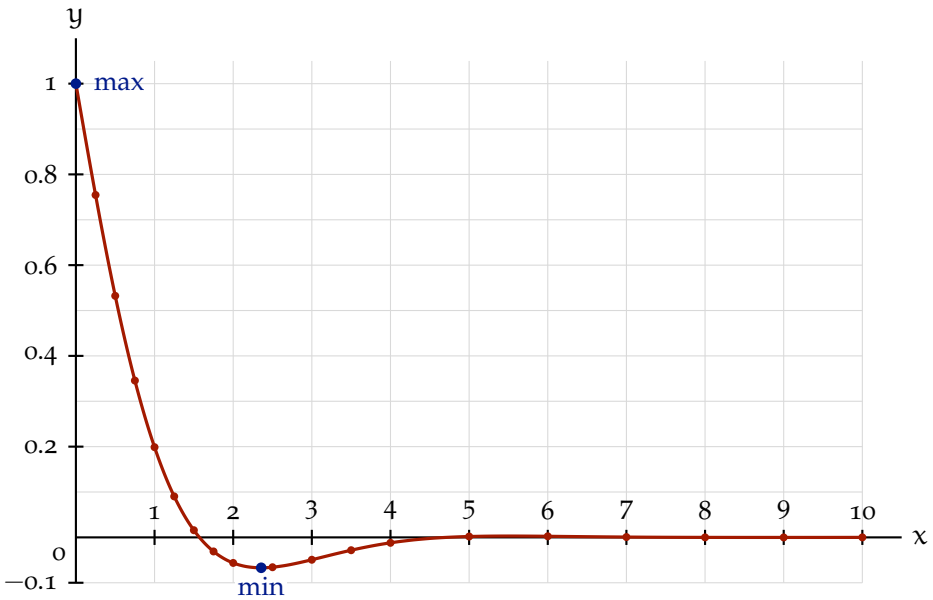
Per il grafico calcolo f con passo 0.25 fino a $x = 2$, dove la funzione cambia in fretta, e poi con un passo via via più largo.

x	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x)$	1	0.7546	0.5323	0.3456	0.1988	0.0903	0.0158	−0.0310	−0.0563

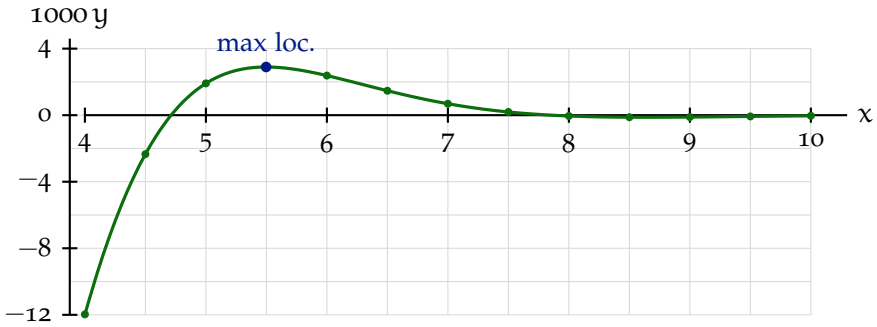
x	2.5	3	3.5	4	5
$f(x)$	−0.0658	−0.0493	−0.0283	−0.0120	0.0019

x	6	7	8	9	10
$f(x)$	0.0024	0.0007	−0.00005	−0.0001	−0.00004

Sull'asse y scelgo un'unità lunga circa sei volte quella dell'asse x.



Per controllare il grafico osserviamo che f si annulla negli zeri del coseno, $\frac{\pi}{2} = 1.571$, $\frac{3}{2}\pi = 4.712$, $\frac{5}{2}\pi = 7.854$, e che fra uno zero e l'altro ha un solo punto stazionario. Oltre $x = 4$ le oscillazioni ci sono, ma sono così piccole — meno di tre millesimi — che a questa scala la curva si confonde con l'asse x. Per vederle ingrandisco le ordinate e traccio, per $4 \leqslant x \leqslant 10$, il grafico di $1000\, f(x)$.



Anche qui il *minimo locale* in $x_3 \approx 8.64$, che vale -0.000125, si vede appena — in valore assoluto è circa venti volte più piccolo del *massimo locale* in x_2.

Esercizio 140 (p. 188)
Traccia il grafico di

$$f(x) = 5.64^x - 15.28^x$$

per $-3 \leqslant x \leqslant 0$ in un diagramma cartesiano. Determina il massimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo, scrivendo il risultato, correttamente arrotondato, con cinque cifre significative di precisione.

Soluzione. Cominciamo dai punti stazionari. La derivata è

$$f'(x) = \log_e(5.64) \cdot 5.64^x - \log_e(15.28) \cdot 15.28^x$$

e si annulla per

$$\log_e(5.64) \cdot 5.64^x = \log_e(15.28) \cdot 15.28^x \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{15.28}{5.64}\right)^x = \frac{\log_e(5.64)}{\log_e(15.28)}$$

$$2.709220^x = \frac{1.729884}{2.726545} = 0.634460$$

da cui, passando ai logaritmi,

$$x_1 = \frac{\log_e(0.634460)}{\log_e(2.709220)} = \frac{-0.454981}{0.996661} = -0.456505$$

che cade nell'intervallo. Il segno della derivata agli estremi,

$$f'(-3) = 1.729884 \cdot 0.005574 - 2.726545 \cdot 0.000280 \approx 0.0089 > 0$$

$$f'(0) = 1.729884 - 2.726545 = -0.9967 < 0$$

ci dice che f cresce fino a x_1 e poi decresce. Siccome l'intervallo è chiuso, il massimo può stare solo in x_1 o in un estremo, e confrontiamo quindi i tre valori

$$f(-3) = 0.0055739 - 0.0002803 = 0.0052936 \qquad f(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f(x_1) = 0.453981 - 0.288033 = 0.165948$$

Il più grande è $f(x_1)$, e con cinque cifre significative abbiamo

$$\text{massimo} = f(-0.45651) = 0.16595$$

Le sei cifre decimali non sono un lusso — f è la differenza di due numeri dell'ordine di 0.45 e 0.29, e per averne cinque cifre significative servono almeno sei decimali nei due termini e un x_1 con cinque o sei cifre. Con $x_1 \approx -0.46$, per esempio, troveremmo $f(-0.46) = 0.165943$, ossia 0.16594, sbagliato nell'ultima cifra.

Possiamo ricontrollare $f(x_1)$ per un'altra strada. Nel punto stazionario

$$\log_e(15.28) \cdot 15.28^{x_1} = \log_e(5.64) \cdot 5.64^{x_1}$$

quindi

$$f(x_1) = 5.64^{x_1}\left(1 - \frac{\log_e(5.64)}{\log_e(15.28)}\right) = 0.453981 \cdot 0.365540 = 0.165948$$

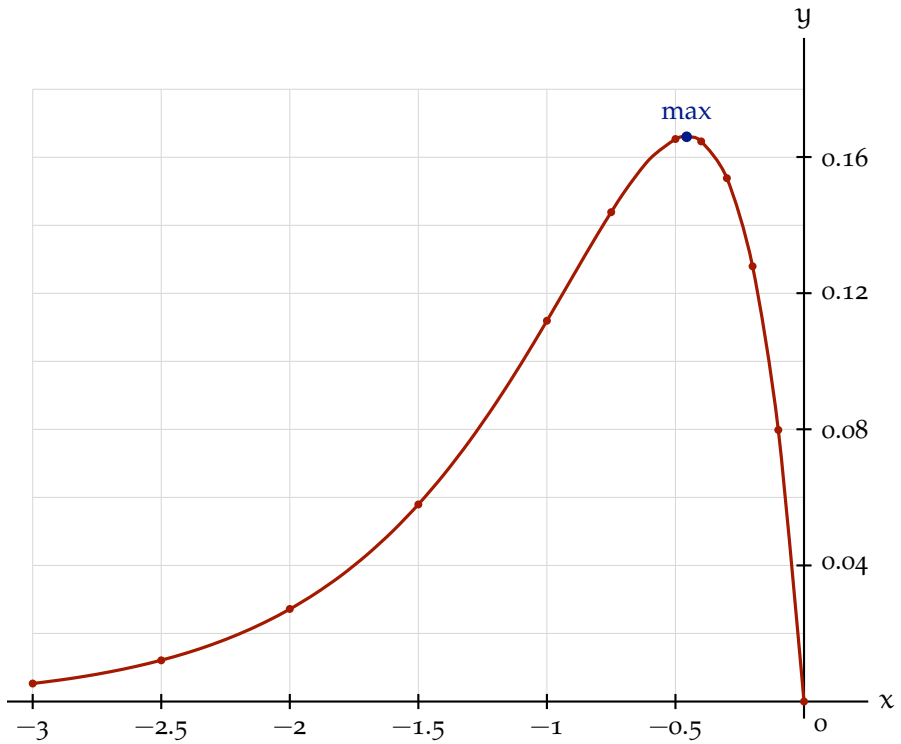
e ritroviamo il valore di prima.

Per il grafico calcolo una tabella di valori, infittendo i punti vicino a 0, dove la funzione cambia in fretta.

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.75	-0.5
$f(x)$	0.0053	0.0121	0.0272	0.0579	0.1119	0.1438	0.1653

x	-0.4565	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
$f(x)$	0.1659	0.1646	0.1538	0.1279	0.0798	0

Le ordinate variano solo di circa 0.17, contro le 3 unità delle ascisse, quindi sull'asse y prendo un'unità molto più lunga.



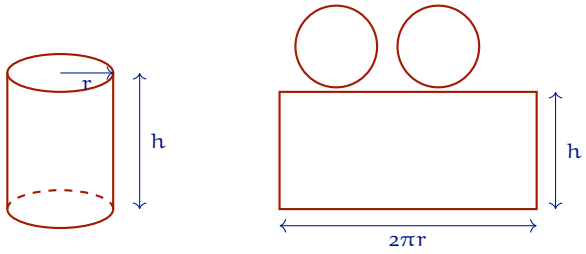
Esercizio 141 (p. 188)
Si vuole costruire un fusto cilindrico in lamiera di acciaio, chiuso da ogni lato, più capiente possibile. La lamiera è spessa 0.90 mm e il peso del fusto vuoto deve essere di 14 kg. Sapendo che il peso specifico dell'acciaio è 7.85 kg/L, calcola la capienza del fusto.

Soluzione. Le informazioni nel testo sono, verosimilmente, sufficienti a calcolare la quantità di lamiera di cui disponiamo per costruire il fusto. Tuttavia, usando la medesima quantità di lamiera, è possibile costruire fusti cilindrici di proporzioni differenti: fra tutte le possibilità, l'esercizio ci chiede di identificare quella che produce il fusto più capiente.

Possiamo quantificare la lamiera a nostra disposizione con la misura S della sua superficie, che dovrà coincidere con la misura della superficie esterna del fusto. Per ricavare S dai dati dell'esercizio, consideriamo un foglio di lamiera di superficie S come un parallelepipedo avente superficie di base S ed altezza 0.90 mm. Il volume di acciaio in questo foglio è $S \cdot 0.90\,\text{mm}$, e il suo peso è $S \cdot 0.90\,\text{mm} \cdot 7.85\,\text{kg/L}$, che deve valere 14 kg:

$$S \cdot 0.90\,\text{mm} \cdot 7.85\,\text{kg/L} = 14\,\text{kg} \qquad \Longrightarrow \qquad S = 1.9816\,\text{m}^2$$

Ora indichiamo le misure del fusto per mezzo del raggio di base r e dell'altezza h. Il valore di S che abbiamo calcolato impone un vincolo che lega r ad h; per esplicitarlo occorre calcolare la superficie del fusto in funzione di r e di h. Questa superficie è costituita da due cerchi di raggio r e da un rettangolo $2\pi r$ per h (il mantello, tagliato lungo una generatrice e srotolato).



$$S = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{i due cerchi}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{il rettangolo}} = 2\pi r(r+h)$$

Stante il vincolo su S, possiamo ora ricavare h in funzione di r o, viceversa, r in funzione di h: siamo liberi di scegliere come procedere, quindi facciamo la scelta più comoda. Per ricavare r bisogna risolvere un'equazione di secondo grado, per ricavare h una di primo grado: quindi r sarà la nostra variabile indipendente.

$$S = 2\pi r(r+h) \qquad \Longrightarrow \qquad h = \frac{S}{2\pi r} - r$$

A noi interessa il massimo del volume: esprimiamo quindi il volume in funzione di r e h e, tenuto conto del vincolo, solo di r.

$$V = \underbrace{\pi r^2}_{\text{a. base}} \underbrace{h}_{\text{altezza}} = \pi r^2 \left(\frac{S}{2\pi r} - r\right) = \frac{S}{2} r - \pi r^3$$

Per trovare il massimo calcoliamo la derivata di V rispetto a r:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$$

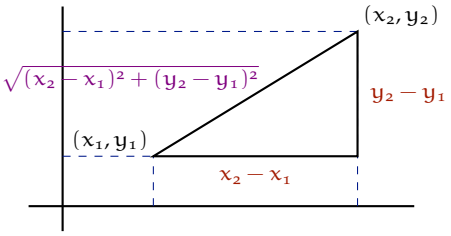
Questa derivata si annulla in $r = r_0 = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, è positiva per $0 < r < r_0$ ed è negativa per $r > r_0$: quindi V è una funzione crescente di r per $r < r_0$ e decrescente per $r > r_0$, e di conseguenza assume il massimo valore in $r = r_0$. Il volume corrispondente è

$$V_{\max} = \frac{S}{2} r_0 - \pi r_0^3 = \frac{S}{2} r_0 - \underbrace{\pi \frac{S}{6\pi}}_{=\pi r_0^2} r_0 = \frac{S}{3} r_0 = \frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6\pi}} \approx 0.214\,\mathrm{m}^3 = 214\,\mathrm{L}$$

Esercizio 142 (p. 189)
Dati i punti $A = (-2,-1)$ e $B = (0,-1)$, trova il punto $C = (x,y)$ sulla retta $x + y = 1$ tale che il perimetro del triangolo ABC sia più piccolo possibile.

Soluzione. Cominciamo col ricordare la formula (dalla geometria analitica delle scuole medie superiori) per esprimere la distanza fra $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$:

$$\text{distanza}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Noi vogliamo trovare il punto C che minimizza il perimetro:

$$\begin{aligned}\text{perimetro}(ABC) &= \text{distanza}(A, B) + \text{distanza}(A, C) + \text{distanza}(B, C)\\ &= 2 + \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2}\end{aligned}$$

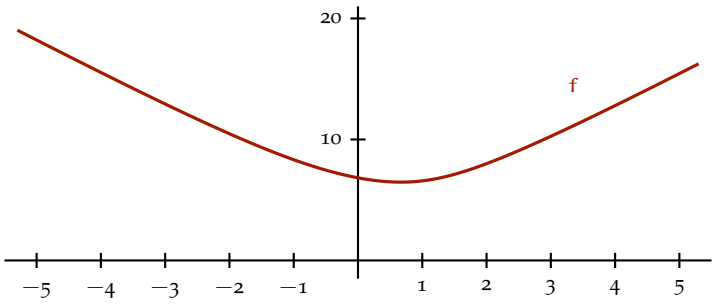
Questa quantità dipende dalle coordinate x e y di C che, però, sono legate fra di loro dalla richiesta che C appartenga alla retta $x + y = 1$. Volendo applicare la teoria che sappiamo, per trovare i minimi di una funzione in una variabile, converrà quindi esplicitare la y in funzione di x, sostituendo $y = 1 - x$ nella formula (e quindi $y + 1 = 2 - x$):

$$\text{perimetro}(ABC) = 2 + \sqrt{(x+2)^2 + (2-x)^2} + \sqrt{x^2 + (2-x)^2} =: f(x)$$

Chiamiamo il perimetro $f(x)$: stiamo cercando i minimi di questa funzione. Conviene fare le semplificazioni algebriche sotto le radici:

$$f(x) = 2 + \sqrt{2x^2 + 8} + \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$$

Avendo una funzione scritta esplicitamente, tracciarne un grafico non può essere l'idea peggiore. Nel nostro caso, siccome le ascisse dei punti dati sono -2 e 0, è ragionevole immaginare che troveremo il punto C in quei paraggi, per cui potremmo tracciare il grafico per x fra -5 e 5.



Alla luce del grafico ci aspettiamo che il perimetro sia minimo per qualche x fra 0 e 1, e che questo sia l'unico punto stazionario di f. Proviamo a indagare la situazione rigorosamente.

$$f'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 8}} + \frac{4x - 4}{2\sqrt{2x^2 - 4x + 4}}$$

Notiamo intanto che i denominatori non si possono annullare, quindi questa derivata è ben definita per qualunque valore della x. Cerchiamo i punti stazionari di $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\iff \quad \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+8}} + \frac{4x-4}{2\sqrt{2x^2-4x+4}} = 0 \\ &\iff \quad \frac{x}{\sqrt{2x^2+8}} = -\frac{x-1}{\sqrt{2x^2-4x+4}} \\ &\iff \quad x\sqrt{2x^2-4x+4} = -(x-1)\sqrt{2x^2+8} \end{aligned}$$

Ora eleviamo al quadrato ambo i membri. Questo passaggio potrebbe introdurre delle soluzioni spurie (perché elevando al quadrato cose diverse, alle volte, diventano uguali: $-2 \neq 2$ ma $(-2)^2 = 2^2$), però noi non ce ne curiamo: alla fine separeremo il grano dal loglio controllando quali delle soluzioni trovate soddisfano l'equazione originale.

$$\begin{aligned} x^2(2x^2-4x+4) &= (x-1)^2(2x^2+8) \\ \cancel{2x^4} - \cancel{4x^3} + 4x^2 &= \cancel{2x^4} - \cancel{4x^3} + 10x^2 - 16x + 8 \\ 6x^2 - 16x + 8 = 0 \quad &\implies \quad x = 2 \quad \text{oppure} \quad x = \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Facciamo la verifica:

$f'(2) = 1+1 = 2$ ✗ soluzione spuria $\qquad f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$ ✓ punto stazionario

La funzione f ha quindi il solo punto stazionario $x = \frac{2}{3}$, che ovviamente è il minimo cercato, per cui $C = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (ricordando che $y = 1-x$).

Per averne una verifica completamente formale notiamo che il segno della derivata è negativo prima di $\frac{2}{3}$ e positivo dopo. Questo si verifica facilmente perché, siccome $\frac{2}{3}$ è il solo punto di annullamento, basta controllare il segno in un punto arbitrario prima e in un punto arbitrario dopo: abbiamo già visto che $f'(2) = 2 > 0$, e per il prima $f'(0) = -1 < 0$. Questi segni della derivata implicano che $f(x)$ è decrescente prima di $\frac{2}{3}$ e crescente dopo, quindi assume in $\frac{2}{3}$ il valore minimo.

Test 143 (p. 196)
$\int \sin(2x) + x^2 \, dx$

Soluzione.

$$\int \sin(2x)\,dx + \int x^2\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{3}x^3 + C$$

(per il primo integrale si usa la formula $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$).

Test 144 (p. 196)
$\int e^{3x} - \cos(1-x)\,dx$

Soluzione.

$$\int e^{3x}\,dx - \int \cos(1-x)\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \sin(1-x) + C$$

(nel secondo integrale $a = -1$, quindi $\frac{1}{a}F(ax+b) = -\sin(1-x)$, che cambiato di segno dà $+\sin(1-x)$).

Test 145 (p. 196)
$\int \frac{x-1}{x}\,dx$

Soluzione.
$$\int 1-\frac{1}{x}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx = x - \log_e(x) + C$$

Test 146 (p. 197)
Trova una primitiva di $f(x) = e^{2+3x}$.

Soluzione.
$$\int e^{2+3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{2+3x} + C \qquad \Longrightarrow \qquad F(x) = \frac{1}{3}e^{2+3x}$$

Test 147 (p. 197)
Trova una primitiva di $f(x) = 2\sqrt[3]{3x}$.

Soluzione.
$$\int 2\sqrt[3]{3x}\,dx = \int 2\sqrt[3]{3}\cdot \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{x^{1/3}}\,dx = 2\sqrt[3]{3}\,\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\,x^{1+\frac{1}{3}} + C = \frac{3\sqrt[3]{3}}{2}\,x^{4/3} + C$$

Test 148 (p. 197)
Calcola la soluzione generale dell'equazione $f'(x) = x^3 + \cos(x)$.

Soluzione.
$$\int x^3 + \cos(x)\,dx = \int x^3\,dx + \int \cos(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \sin(x) + C$$

Test 149 (p. 197)
Calcola $\int \log_e(2x-1)\,dx$.

Soluzione. Applichiamo la formula per $f(ax+b)$, con $f(y) = \log_e(y)$, $a = 2$ e $b = -1$. Dalla tavola degli integrali elementari
$$\int f(y)\,dy = \int \log_e(y)\,dy = y\log_e(y) - y + C$$
quindi prendiamo $F(y) = y\log_e(y) - y$ e otteniamo
$$\int \log_e(2x-1)\,dx = \frac{1}{2}F(2x-1) = \frac{1}{2}\Big[(2x-1)\log_e(2x-1) - (2x-1)\Big] + C$$
(verifica: derivando, $\frac{1}{2}\Big[2\log_e(2x-1) + (2x-1)\frac{2}{2x-1} - 2\Big] = \log_e(2x-1)$).

Test 150 (p. 208)
Trova la soluzione generale dell'equazione $f' = -2f + 4$.

Soluzione. È lineare a coefficienti costanti del primo ordine, con $a = -2$ e $b = 4$. La soluzione generale dell'omogenea associata $f' = -2f$ è $f(x) = Ce^{-2x}$; una soluzione particolare costante si trova da

$$0 = -2k + 4 \qquad \Longrightarrow \qquad k = 2$$

(ossia $k = -\frac{b}{a}$). Sommando,

$$f(x) = Ce^{-2x} + 2$$

(verifica: $f' = -2Ce^{-2x}$ e $-2f + 4 = -2Ce^{-2x} - 4 + 4 = -2Ce^{-2x}$).

Esercizio 151 (p. 208)
Trova la soluzione dell'equazione differenziale $f'' + 4f' + 5f + 10 = 0$ tale che $f(0) = f'(0) = 0$.

Soluzione. Portiamo l'equazione nella forma in cui sappiamo trattarla:

$$f'' = \underbrace{-4}_{a} f' \underbrace{-5}_{b} f \underbrace{-10}_{c}$$

1. Omogenea. L'equazione di secondo grado è $\alpha^2 - a\alpha - b = \alpha^2 + 4\alpha + 5 = 0$, con $\Delta = a^2 + 4b = 16 - 20 = -4 < 0$. Siamo nel terzo caso, con

$$\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad \text{e} \qquad e^{\frac{a}{2}x} = e^{-2x}$$

quindi la soluzione generale dell'omogenea è

$$f(x) = e^{-2x}\big(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)\big)$$

2. Soluzione particolare. Siccome $b \neq 0$, va bene la costante $f(x) = -\frac{c}{b} = -\frac{-10}{-5} = -2$.

3. Soluzione generale.

$$f(x) = e^{-2x}\big(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)\big) - 2$$

4. Le condizioni. Da $f(0) = 0$:

$$0 = \underbrace{e^0}_{1}\big(C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0\big) - 2 = C_1 - 2 \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = 2$$

Per l'altra condizione serve la derivata:

$$f'(x) = -2e^{-2x}\big(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)\big) + e^{-2x}\big(-C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)\big)$$

e in $x = 0$

$$0 = -2C_1 + C_2 \qquad \Longrightarrow \qquad C_2 = 2C_1 = 4$$

In conclusione

$$f(x) = e^{-2x}\big(2\cos(x) + 4\sin(x)\big) - 2$$

Esercizio 152 (p. 208)
Trova $f(x)$ sapendo che $x\,f(x)\,f'(x) = 1$ e $f(1) = 1$.

Soluzione. L'equazione è a variabili separabili: isolando la derivata,

$$f' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{f}}_{h(f)}$$

Procediamo con il metodo solito.

1. $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{1}{xf}$
2. $f\,df = \dfrac{dx}{x}$
3. $\displaystyle\int f\,df = \int \frac{dx}{x}$, ossia $\frac{1}{2}f^2 + C_1 = \log_e(x) + C_2$
4. $\frac{1}{2}f^2 = \log_e(x) + C$
5. $f^2 = 2\log_e(x) + 2C$, e chiamando $K = 2C$,

$$f(x) = \sqrt{2\log_e(x) + K}$$

Questa è la soluzione generale. Imponiamo ora $f(1) = 1$, ricordando che $\log_e(1) = 0$:

$$1 = \sqrt{0 + K} \qquad \Longrightarrow \qquad K = 1$$

e quindi

$$f(x) = \sqrt{2\log_e(x) + 1}$$

(verifica: $f' = \frac{1}{x\sqrt{2\log_e(x)+1}}$, quindi $xff' = x \cdot \cancel{\sqrt{2\log_e(x)+1}} \cdot \frac{1}{x\cancel{\sqrt{2\log_e(x)+1}}} = 1$).

Esercizio 153 (p. 208)
La funzione $f(x) = 10^{2+x} + 5$ è una soluzione particolare dell'equazione

$$f'(x) = Af(x) + B$$

Determina A e B.

Soluzione. Sostituendo l'espressione di f nell'equazione otteniamo

$$(10^{2+x} + 5)' = A(10^{2+x} + 5) + B$$
$$10^{2+x}\log_e(10) = A10^{2+x} + 5A + B$$

Ne ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} \log_e(10) = A \\ 0 = 5A + B \end{cases}$$

che, risolto, dà

$$A = \log_e(10) = 2.303 \qquad B = -5\log_e(10) = -11.51$$

Esercizio 154 (p. 208)
La funzione $g(x) = (1+x^2)e^x$ è una soluzione particolare dell'equazione

$$g'''(x) = Cg''(x) + Dg'(x) + Eg(x) + F$$

Determina C, D, E, F.

Soluzione. Calcoliamo le derivate: ognuna è un polinomio di secondo grado moltiplicato per e^x.

$$\begin{aligned} g(x) &= (x^2+1)\,e^x \\ g'(x) &= 2x\,e^x + (x^2+1)\,e^x = (x^2+2x+1)\,e^x \\ g''(x) &= (2x+2)\,e^x + (x^2+2x+1)\,e^x = (x^2+4x+3)\,e^x \\ g'''(x) &= (2x+4)\,e^x + (x^2+4x+3)\,e^x = (x^2+6x+7)\,e^x \end{aligned}$$

Sostituendo e portando tutto a sinistra, l'equazione diventa

$$(1-C-D-E)x^2e^x + (6-4C-2D)xe^x + (7-3C-D-E)e^x - F = 0$$

Da cui deduciamo che devono annullarsi i coefficienti fra parentesi e il termine noto:

$$\begin{cases} 1-C-D-E=0 \\ 6-4C-2D=0 \\ 7-3C-D-E=0 \\ F=0 \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla terza si ottiene $6-2C=0$, cioè $C=3$; dalla seconda $D = \frac{6-12}{2} = -3$; dalla prima $E = 1-3+3 = 1$. In conclusione

$$C=3 \qquad D=-3 \qquad E=1 \qquad F=0$$

(verifica: $3(x^2+4x+3) - 3(x^2+2x+1) + (x^2+1) = x^2+6x+7$.)

Esercizio 155 (p. 208)
La funzione $f(x) = e^{-2x}\sin(x+1)$ soddisfa un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti: determina questa equazione.

Soluzione. Dobbiamo determinare a, b, c in modo che valga

$$f''(x) = a\,f'(x) + b\,f(x) + c$$

Calcoliamo le derivate (regola del prodotto e della funzione composta):

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2e^{-2x}\sin(x+1) + e^{-2x}\cos(x+1) \\ f''(x) &= 4e^{-2x}\sin(x+1) - 2e^{-2x}\cos(x+1) - 2e^{-2x}\cos(x+1) - e^{-2x}\sin(x+1) \\ &= 3e^{-2x}\sin(x+1) - 4e^{-2x}\cos(x+1) \end{aligned}$$

L'equazione da soddisfare è quindi

$$3e^{-2x}\sin(x+1) - 4e^{-2x}\cos(x+1) = -2a\,e^{-2x}\sin(x+1) + a\,e^{-2x}\cos(x+1) + b\,e^{-2x}\sin(x+1) + c$$

e, raccogliendo,

$$(3 + 2a - b)\,e^{-2x}\sin(x+1) - (4+a)\,e^{-2x}\cos(x+1) - c = 0$$

Per cui ci basta richiedere che

$$\begin{cases} 3 + 2a - b = 0 \\ 4 + a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a = -4 \\ b = -5 \\ c = 0 \end{cases}$$

In conclusione, l'equazione cercata è

$$f''(x) = -4f'(x) - 5f(x)$$

(controprova: con $a = -4$ e $b = -5$ occorre risolvere l'equazione di secondo grado $\alpha^2 + 4\alpha + 5 = 0$, con $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$; quindi $\frac{a}{2} = -2$, $\omega = 1$ e la soluzione generale è $e^{-2x}\big(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\big)$. Siccome

$$\sin(x+1) = \sin(1)\cdot\cos(x) + \cos(1)\cdot\sin(x)$$

la nostra f è quella con $C_1 = \sin(1)$ e $C_2 = \cos(1)$.)

Esercizio 156 (p. 208)
Indichiamo con $[A]_t$ la concentrazione molare di un reagente, in una certa reazione chimica, in funzione del tempo t. Sappiamo che $[A]_t$ soddisfa l'equazione differenziale (cinetica del secondo ordine)

$$\frac{d[A]_t}{dt} = -k\,[A]_t^2$$

nella quale k è una costante. Sapendo che $[A]_{0\,s} = 1.000\,\text{mol/L}$ e $[A]_{600\,s} = 0.230\,\text{mol/L}$, determina $[A]_{300\,s}$. Traccia quindi un grafico semilogaritmico, con l'asse dei tempi in scala lineare, che rappresenti l'andamento di $[A]_t$ per t fra 0 e 600 secondi.

Soluzione. L'equazione è a variabili separabili, e separandole otteniamo

$$\frac{d[A]}{[A]^2} = -k\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{1}{[A]_t} = -k\,t + C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{[A]_t} = \frac{1}{[A]_0} + k\,t$$

(la costante l'abbiamo fissata ponendo $t = 0$). Se misuriamo le concentrazioni in mol/L e i tempi in secondi, i dati ci danno

$$\frac{1}{0.230} = \frac{1}{1.000} + 600\,k \qquad \Longrightarrow \qquad k = \frac{4.348 - 1}{600} = 5.580\cdot 10^{-3}$$

(in $\mathrm{L\,mol^{-1}\,s^{-1}}$), e quindi

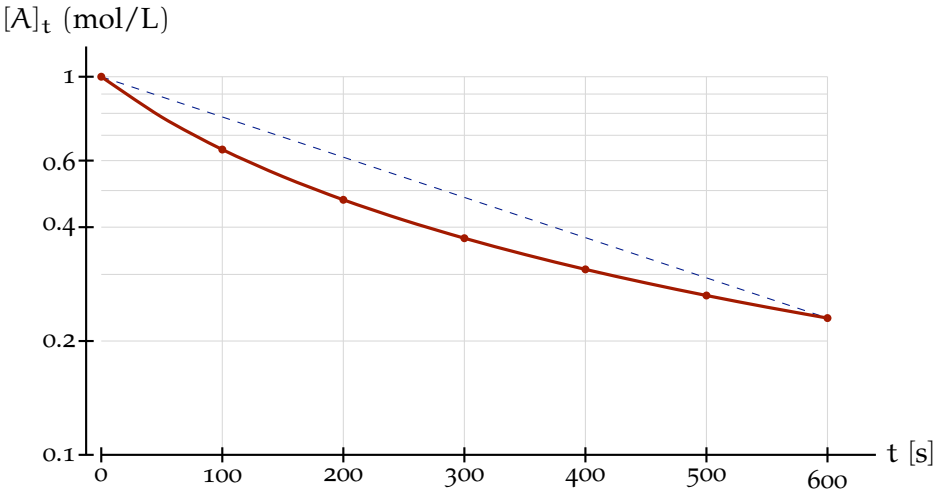
$$\frac{1}{[A]_{300\,s}} = 1 + 300 \cdot 5.580 \cdot 10^{-3} = 2.674 \qquad \Longrightarrow \qquad [A]_{300\,s} \approx 0.374\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{L}}$$

(Siccome $1/[A]$ è una funzione lineare del tempo, a metà tempo $1/[A]$ è la media fra $1/1.000$ e $1/0.230$. Con una cinetica del primo ordine e gli stessi estremi avremmo invece $\sqrt{1.000 \cdot 0.230} \approx 0.480\,\mathrm{mol/L}$.)

Per il grafico calcolo $[A]_t$, in mol/L, ogni 100 secondi:

t	0	100	200	300	400	500	600
$[A]_t$	1.000	0.642	0.473	0.374	0.309	0.264	0.230

Siccome le ordinate vanno da 0.230 a 1, sull'asse logaritmico mi basta una decade, da 0.1 a 1.

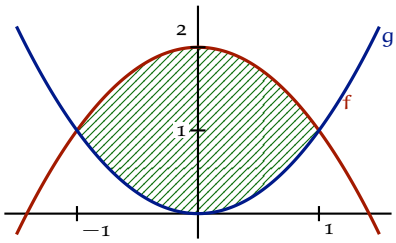


Il grafico non è una retta, perché la cinetica non è del primo ordine. Per confronto ho tratteggiato l'andamento che avremmo con una cinetica del primo ordine e gli stessi valori a 0 e a 600 secondi — quella del secondo ordine scende più in fretta all'inizio e più lentamente alla fine.

Esercizio 157 (p. 214)
Calcola l'area della regione limitata di piano compresa fra i grafici di $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = x^2$.

Soluzione. Le due parabole si incontrano dove $2 - x^2 = x^2$, ossia $x^2 = 1$, cioè in $x = -1$ e $x = 1$. Fra questi due valori la parabola f sta sopra la parabola g, quindi l'area è la differenza fra l'area sotto f e l'area sotto g:

$$\begin{aligned}\text{Area} &= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(2 - x^2\right) - x^2\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} 2 - 2x^2\,dx = \left[2x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \left(2 - \frac{2}{3}\right) - \left(-2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}\end{aligned}$$



Esercizio 158 (p. 214)
Stima $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ con la formula dei trapezi, usando quattro trapezi.

Soluzione. Abbiamo $a = 0$, $b = 1$ e $n = 4$, quindi $\Delta x = \frac{1-0}{4} = 0.25$ e i punti sono $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$, $x_4 = 1$.

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x_i)$	1	0.93941	0.77880	0.56978	0.36788

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \Delta x \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{f(x_4)}{2}\right)$$

$$= 0.25 \cdot (0.5 + 0.93941 + 0.77880 + 0.56978 + 0.18394) = 0.25 \cdot 2.97193 \approx 0.743$$

(il valore esatto è 0.746824…: con quattro soli trapezi l'errore è di circa mezzo punto percentuale. Si noti che questo integrale è proprio uno di quelli che non si sanno calcolare in forma chiusa: la funzione e^{-x^2} è la gaussiana, e la sua primitiva non si scrive con le funzioni elementari.)

Esercizio 159 (p. 214)
Calcola l'integrale

$$\int_0^1 x \sin(x^2)\,dx$$

se riesci analiticamente, altrimenti in maniera approssimata.

Soluzione. Per via analitica. Questo integrale si può calcolare analiticamente con la regola di sostituzione — $g(x) = x^2$ e $g'(x) = 2x$, è proprio l'esercizio del capitolo sugli integrali indefiniti.

$$\int x \sin(x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$$

(derivando ritroviamo infatti $\left(-\frac{1}{2}\cos(x^2)\right)' = \frac{1}{2}\sin(x^2)\cdot 2x = x\sin(x^2)$). Per il teorema fondamentale del calcolo abbiamo quindi

$$\int_0^1 x \sin(x^2)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(x^2)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\cos(1) + \frac{1}{2}\cos(0) = \frac{1-\cos(1)}{2} = 0.2298$$

dove $\cos(1)$ è calcolato in radianti — in gradi verrebbe $\cos(1^\circ) = 0.99985$, e un risultato del tutto sbagliato.

Per via numerica. Se la primitiva non viene in mente, si applica la formula dei trapezi. Scegliamo $n = 10$ trapezi, quindi $\Delta x = \frac{1-0}{10} = 0.1$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x_i)$	0	0.0010	0.0080	0.0270	0.0637	0.1237	0.2114	0.3294	0.4778	0.6519	0.8415

$$\int_0^1 x\sin(x^2)\,dx \approx 0.1 \cdot \underbrace{\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_9) + \frac{f(x_{10})}{2}\right)}_{2.3146} \approx 0.231$$

Esercizio 160 (p. 214)
Calcola l'integrale

$$\int_2^7 \log_{10}(x^2-1)\,dx$$

se riesci analiticamente, altrimenti in maniera approssimata.

Soluzione. Per via analitica. La funzione integranda si spezza in due logaritmi:

$$\log_{10}(x^2-1) = \frac{\log_e\big((x-1)(x+1)\big)}{\log_e(10)} = \frac{\log_e(x-1)+\log_e(x+1)}{\log_e(10)}$$

(prima il cambiamento di base, poi il logaritmo del prodotto). Di ciascuno dei due addendi sappiamo trovare una primitiva, con la formula per $f(ax+b)$ e $F(y) = y\log_e(y) - y$ (qui $a = 1$):

$$\int \log_e(x-1)\,dx = (x-1)\log_e(x-1) - (x-1)$$
$$\int \log_e(x+1)\,dx = (x+1)\log_e(x+1) - (x+1)$$

Sommando, una primitiva della funzione integranda è

$$F(x) = \frac{(x-1)\log_e(x-1) + (x+1)\log_e(x+1) - 2x}{\log_e(10)}$$

e il teorema fondamentale del calcolo dà

$$F(7) = \frac{6\log_e(6) + 8\log_e(8) - 14}{\log_e(10)} = \frac{10.7506 + 16.6355 - 14}{2.3026} = 5.8135$$

$$F(2) = \frac{\overbrace{1\cdot\log_e(1)}^{=0} + 3\log_e(3) - 4}{\log_e(10)} = \frac{3.2958 - 4}{2.3026} = -0.3058$$

$$\int_2^7 \log_{10}(x^2-1)\,dx = F(7) - F(2) = 6.119$$

Per via numerica. Se la primitiva non viene in mente, si applica la formula dei trapezi: la funzione è definita e regolare su tutto l'intervallo $[2,7]$ (infatti $x^2 - 1 > 0$ per $x > 1$). Scegliamo $n = 10$ trapezi, quindi $\Delta x = \frac{7-2}{10} = 0.5$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7
$f(x_i)$	0.4771	0.7202	0.9031	1.0512	1.1761	1.2844	1.3802	1.4661	1.5441	1.6154	1.6812

$$\int_2^7 \log_{10}(x^2-1)\,dx \approx 0.5 \cdot \underbrace{\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_9) + \frac{f(x_{10})}{2}\right)}_{12.2199} \approx 6.11$$

(le due strade si accordano. La stima dell'errore dei trapezi, con $f'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)\log_e(10)}$, dà $0.5^2 \cdot \frac{f'(7)-f'(2)}{12} \approx 0.25 \cdot \frac{0.1267-0.5791}{12} \approx -0.009$: l'approssimazione è per difetto di circa un centesimo, ed è proprio così. Con $n = 5$ trapezi si otterrebbe 6.08.)