Es. Sia $M = (D; p)$ dove p rappresenta un simbolo di relazione unaria. Cosa significa, secondo la semantica di Tarski, $M \models \{v\} \exists x \, (p(x) \to \forall y \, p(y))$?

Sol. Intuitivamente, ci aspettiamo che asserire che M soddisfa quella formula equivalga, nella metateoria, alla proposizione $\exists a \in D \, (a \in p_M \to \forall b \in D \; b \in p_M)$. Vediamo come questo segue formalmente dalla semantica di Tarski:

$M \models \{v\} \exists x \, (p(x) \to \forall y \, p(y))$

$\exists a \in D \;\; M \models \{v[a/x]\} \; p(x) \to \forall y \, p(y)$

$\exists a \in D \;\; M \models \{v[a/x]\} \; p(x) \to M \models \{v[a/x]\} \; \forall y \, p(y)$

$\exists a \in D \;\; \{v[a/x]\}_M x \in p_M \to \forall b \in D \; M \models \{v[a/x, b/y]\} \; p(y)$

$\exists a \in D \;\; \{v[a/x]\}_M x \in p_M \to \forall b \in D \; \{v[a/x, b/y]\}_M y \in p_M$

$\exists a \in D \;\; a \in p_M \to \forall b \in D \; b \in p_M$

Incidentalmente, possiamo notare che abbiamo ottenuto una proposizione che non dipende dall'ambiente v. Questo accade perché la formula data è chiusa, ossia senza variabili libere. Inoltre, grazie al fatto che D è non vuoto, la proposizione $\exists a \in D \; a \in p_M \to \forall b \in D \; b \in p_M$ è necessariamente

vera, indipendentemente da M. Infatti si danno due casi: o c'è un $a \in D$ con $a \notin P_M$ o no. Nel primo caso, basta prendere questo a perché l'implicazione $a \in P_M \to \dots$ sia soddisfatta. Nel secondo, vale $\forall b \in D \; b \in P_M$, quindi l'implicazione è soddisfatta da un a qualunque (è qui che si usa il fatto che D non è vuoto). Formule, come quella data, soddisfatte da ogni struttura, si dicono *logicamente valide*.

Def Una L-formula φ è *chiusa* se $vl(\varphi) = \emptyset$

Def Una L-formula φ è *logicamente valida* se per ogni L-struttura $M = (D; i)$ e per ogni valutazione delle variabili $v : Var \to D$ vale $M \models \{v\} \varphi$.

Oss. Se φ è una L-formula e v_1 e v_2 valutazioni delle variabili tali che

$$v_1|_{vl(\varphi)} = v_2|_{vl(\varphi)}$$

allora

$$M \models \{v_1\} \varphi \iff M \models \{v_2\} \varphi$$

In particolare, se φ è una formula chiusa,

$$\forall v_1, v_2 : Var \to D \quad M \models \{v_1\} \varphi \iff M \models \{v_2\} \varphi$$

Dim

La dimostrazione procede per induzione strutturale.

Occorre intanto formulare un enunciato sui termini.
Vogliamo dimostrare che, per ogni termine t,

$$\nu_1|_{var(t)} = \nu_2|_{var(t)} \implies \{\nu_1\}_M t = \{\nu_2\}_M t$$

- Se $t = x_i$ allora $var(t) = \{x_i\}$ e, per ipotesi $\nu_1(x_i) = \nu_2(x_i)$ quindi $\{\nu_1\}_M x_i = \nu_1(x_i) = \nu_2(x_i) = \{\nu_2\}_M x_i$
- Se $t = f(t_1 \dots t_k)$ allora $var(t) = var(t_1) \cup \dots \cup var(t_k)$ da cui deduciamo che $\forall i = 1 \dots k \quad \nu_1|_{var(t_i)} = \nu_2|_{var(t_i)}$. Per l'ipotesi induttiva $\forall i = 1 \dots k \quad \{\nu_1\}_M t_i = \{\nu_2\}_M t_i$ quindi

$$\{\nu_1\}_M f(t_1 \dots t_k) = f_M(\{\nu_1\}_M t_1 \dots \{\nu_1\}_M t_k)$$
$$= f_M(\{\nu_2\}_M t_1 \dots \{\nu_2\}_M t_k) = \{\nu_2\}_M f(t_1 \dots t_k)$$

Passiamo, ora, alle formule

- Se $\varphi = \top$ o $\varphi = \bot$ la tesi è immediata
- Se $\varphi = p(t_1 \dots t_k)$ allora $vl(\varphi) = var(t_1) \cup \dots \cup var(t_k)$ da cui, come nel caso $t = f(t_1 \dots t_k)$, si ha $\forall i = 1 \dots k \quad \{\nu_1\}_M t_i = \{\nu_2\}_M t_i$ quindi

$$M \models \{\nu_1\} p(t_1 \dots t_k) \iff (\{\nu_1\}_M t_1 \dots \{\nu_1\}_M t_k) \in p_M$$
$$\iff (\{\nu_2\}_M t_1 \dots \{\nu_2\}_M t_k) \in p_M \iff M \models \{\nu_2\} p(t_1 \dots t_k)$$

- Se $\varphi = t_1 = t_2$ allora $vl(\varphi) = var(t_1) \cup var(t_2)$ e come nel caso precedente $\{\nu_1\} t_1 = \{\nu_2\} t_1$ e $\{\nu_1\} t_2 = \{\nu_2\}_2$ quindi

$$M \models \{\nu_1\} t_1 = t_2 \iff \{\nu_1\}_M t_1 = \{\nu_1\}_M t_2$$
$$\iff \{\nu_2\}_M t_1 = \{\nu_2\}_M t_2 \iff M \models \{\nu_2\} t_1 = t_2$$

- Se $\varphi = \neg\psi$ allora $vl(\varphi) = vl(\psi)$ e, per ipotesi induttiva

$$\mathcal{M} \models \{v_1\}\psi \iff \mathcal{M} \models \{v_2\}\psi$$

quindi

$$\mathcal{M} \models \{v_1\}\neg\psi \iff \neg\,\mathcal{M} \models \{v_1\}\psi \iff \neg\,\mathcal{M} \models \{v_2\}\psi \iff \mathcal{M} \models \{v_2\}\neg\psi$$

- Se $\varphi = \psi_1 \ (\text{oppure } \wedge \vee \to)\ \psi_2$ abbiamo $vl(\varphi) = vl(\psi_1) \cup vl(\psi_2)$ quindi $v_1|_{vl(\psi_1)} = v_2|_{vl(\psi_1)}$ e $v_1|_{vl(\psi_2)} = v_2|_{vl(\psi_2)}$, di conseguenza, per ipotesi induttiva

$$\mathcal{M} \models \{v_1\}\psi_1 \iff \mathcal{M} \models \{v_2\}\psi_1 \qquad \mathcal{M} \models \{v_1\}\psi_2 \iff \mathcal{M} \models \{v_2\}\psi_2$$

da cui segue

$$\mathcal{M} \models \{v_1\}\psi_1 \ (\text{oppure } \wedge \vee \to)\ \psi_2$$
$$\iff \mathcal{M} \models \{v_1\}\psi_1 \ (\text{oppure } \wedge \vee \to)\ \mathcal{M} \models \{v_1\}\psi_2$$
$$\iff \mathcal{M} \models \{v_2\}\psi_1 \ (\text{oppure } \wedge \vee \to)\ \mathcal{M} \models \{v_2\}\psi_2$$
$$\iff \mathcal{M} \models \{v_2\}\psi_1 \ (\text{oppure } \wedge \vee \to)\ \psi_2$$

- Se $\varphi = \forall x_k \psi$ allora $vl(\varphi) = vl(\psi) \setminus \{x_k\} = \{x_i \in vl(\psi) \mid x_i \neq x_k\}$

Assumiamo $\mathcal{M} \models \{v_1\}\forall x_k \psi$ ossia $\forall a \in D \ \mathcal{M} \models \{v_1[a/x_k]\}\psi$ intendiamo dimostrare $\mathcal{M} \models \{v_2\}\forall x_k \psi$ ossia $\forall a \in D \ \mathcal{M} \models \{v_2[a/x_k]\}\psi$.

A tale scopo fissiamo un $a \in D$ e mostriamo $\mathcal{M} \models \{v_2[a/x_k]\}\psi$.

Dall'ipotesi abbiamo $\mathcal{M} \models \{v_1[a/x_k]\}\psi$. Dico che vale altresì $v_1[a/x_k]|_{vl(\psi)} = v_2[a/x_k]|_{vl(\psi)}$, infatti, presa $x_i \in vl(\psi)$, se $x_i \neq x_k$, allora $x_i \in vl(\varphi)$, quindi

$$v_1[a/x_k](x_i) = v_1(x_i) = v_2(x_i) = v_2[a/x_k](x_i)$$

d'altro canto $v_1[a/x_k](x_k) = a = v_2[a/x_k](x_k)$

$M \models \{v_2[a/x_k]\}\varphi$ segue quindi per ipotesi induttiva. Abbiamo mostrato che

$$M \models \{v_1\} \forall x_k \varphi \implies M \models \{v_2\} \forall x_k \varphi$$

e l'implicazione opposta si ottiene per simmetria del ragionamento.

- Se $\varphi = \exists x_k \psi$, come nel caso precedente, $vl(\varphi) = \{x_i \in vl(\psi) \mid x_i \neq x_k\}$. Assumiamo $M \models \{v_1\} \exists x_k \psi$ ossia $\exists a \in D \; M \models \{v_1[a/x_k]\}\psi$ intendiamo dimostrare $M \models \{v_2\} \exists x_k \psi$ ossia $\exists a \in D \; M \models \{v_2[a/x_k]\}\psi$. Consideriamo un $a \in D$ tale che $M \models \{v_1[a/x_k]\}\psi$. Ragionando come nel caso precedente otteniamo $M \models \{v_2[a/x_k]\}\psi$. Abbiamo quindi l'implicazione

$$M \models \{v_1\} \exists x_k \psi \implies M \models \{v_2\} \exists x_k \psi$$

E, nuovamente, concludiamo per simmetria. ∎

Con Se φ è una formula chiusa, allora φ vale in qualche contesto se e solo se φ vale in ogni contesto. Ossia, data una qualunque valutazione delle variabili v

$$M \models \{v\}\varphi \iff \forall v : Var \to D \; M \models \{v\}\varphi$$

Notazione Scriviamo $M \models \varphi$ senza specificare il contesto per dire che M soddisfa φ in ogni contesto

$$M \models \varphi \overset{\text{def.}}{\iff} \forall v : Var \to D \; M \models \{v\}\varphi$$

Oss. La scrittura $M \models \varphi$ ha senso anche se φ non è una

formula chiusa. In questo caso, se $vl(\varphi) = \{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$,

$$M \models \varphi \iff M \models \forall \alpha_1 \dots \forall \alpha_n \varphi$$

e quest'ultima è chiusa. Infatti, più in generale

$$M \models \psi \iff M \models \forall x_k \psi$$

Es. Verifica l'osservazione precedente.

Sostituzioni

Questa breve sezione esiste per accomodare una scomodità legata alla nostra ostinazione di usare, come formule, delle liste di simboli. Finché ci limitiamo, per esempio, alle identità algebriche, è chiaro che possiamo sostituire un termine qualunque, al posto di una variabile qualunque, in un'identità valida, ottenendo ancora un'identità valida. Per esempio da $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$, scrivendo, al posto di x, il termine $1+y$, ottengo $1 + 2y = (1+y)^2 - y^2$, una nuova identità valida. Il fatto che y compaia sia nella identità di partenza sia nel termine sostituito non compromette la validità di questo procedimento. Se tento lo stesso procedimento, per esempio, con la formula $\exists y\ x < y$, valida nella struttura $(\mathbb{Q}; 1, +, <)$, e sostituisco $1+y$ al posto di x, ottengo $\exists y\ 1+y < y$, che non è più valida. La radice del guaio è fin

troppo ovvia: la formula $\exists y\ x<y$ dice che c'è un y, che può dipendere da x, che si trova rispetto a x in una certa situazione. Scrivendo $1+y$ al posto di x, impongo però anche una dipendenza di x da y, creando così un ciclo di dipendenze. È vero che dato un x posso trovare un y, ma non necessariamente questo y soddisfa il vincolo ulteriore di chiudere il ciclo. Se scrivessi la formula così

$\exists y\ 1+y<y$ (cromaticamente)

oppure così

$\exists$  (biscromaticamente)

non ci sarebbero problemi, ma volendo usare gli stessi simboli per le variabili legate e per le variabili libere — convenzione che ha i suoi vantaggi — si cade occasionalmente ma inevitabilmente nel problema della cattura delle variabili.

Come ne usciamo? Intanto rallegriamoci! Per gli informatici è peggio: il λ-calcolo vive di sostituzioni, ed è lì che il male ha messo radici. Noi, ce la caveremo semplicemente vietando le sostituzioni ingalubri, cosa che, nel nostro contesto, non ha controindicazioni.

Def Sia φ una L-formula e t un L-termine.
Diciamo che t è *sostituibile per* x_k *in* φ se nessuna occorrenza libera di x_k in φ si trova in una sottoformula del tipo $\forall x \psi$ o $\exists x \psi$ con $x \in var(t)$.
Più formalmente, usando la ricorsione strutturale diciamo che t è *sostituibile per* x_k *in* φ se

- φ è atomica
- $\varphi = \neg\psi$ e t è sostituibile per x_k in ψ
- $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ (oppure $\vee, \rightarrow$) e t è sostituibile per x_k in ψ_1 e ψ_2
- $\varphi = \forall x_i \psi$ o $\varphi = \exists x_i \psi$ e si verifica uno dei casi seguenti
  o $x_k \in vl(\varphi)$, $x_i \notin var(t)$ e t è sostituibile per x_k in ψ
  oppure $x_k \notin vl(\varphi)$

Capiamo prima la *definizione informale*. Una occorrenza di un simbolo α in una stringa s è un indice i tale che $s_i = \alpha$. Fra le occorrenze del simbolo x_k in φ ce ne sono alcune *legate*, quelle che fanno parte di una sottoformula di φ del tipo $\forall x_k \ldots$ o $\exists x_k \ldots$, e le altre sono *libere*. Pedantemente, i è una occorrenza legata se ci sono j_1 e j_2 con $j_1 \leq i \leq j_2$ tali che la sottostringa di φ costituita dai caratteri che vanno dal j_1-esimo al j_2-esimo è una sottoformula che inizia per $(\forall x_k$ o $(\exists x_k$.

Per esempio libera, legate

$$\forall y\ \forall z\ (y \cdot z = x \rightarrow \exists x\ \exists t\ t = x + x + x \wedge y \cdot s(t) = y \cdot y + t)$$

È chiaro che le variabili libere di una formula sono quelle che hanno almeno una occorrenza libera: in questo caso è solo x. In questa formula $s(y)$ e $z \cdot z$ NON sono sostituibili per x, mentre $t + t$ lo è.

Es. Nella struttura $(\mathbb{N}; S, +, \cdot)$ dove S denota il successore, cosa significa quel delirio?

Es. (DIFFICILE) Riesci a rimpiazzare z con 10? — Alla fine del corso lo saprai fare, ora è seriamente difficile.

Es. Convinciti della definizione formale.

Oss. Se $x_k \notin vl(\varphi)$, allora qualunque t è sostituibile per x_k.

Oss. Una costante è sostituibile per x_k in qualsiasi φ

Oss. $f(x_k)$ è sostituibile per x_k in qualsiasi φ

Bene, sappiamo cosa significa sostituibile, ma come si fanno le sostituzioni?

Def. Sia φ una L-formula e t un L-termine sostituibile per x_k in φ. Denotiamo con $\varphi[t/x_k]$ la formula ottenuta rimpiazzando tutte le occorrenze libere

di x_k in φ con t. Più formalmente, per ricorsione, definiamo sugli $\mathcal{L}$-termini:

- $x_i[t/x_k] = \begin{cases} x_i & \text{se } x_i \neq x_k \\ t & \text{se } x_i = x_k \end{cases}$
- $f(t_1 \dots t_n)[t/x_k] = f(t_1[t/x_k] \dots t_n[t/x_k])$

Sulle formule:

- $\top[t/x_k] = \top \qquad \bot[t/x_k] = \bot$
- $r(t_1 \dots t_n)[t/x_k] = r(t_1[t/x_k] \dots t_n[t/x_k])$
- $(t_1 = t_2)[t/x_k] = t_1[t/x_k] = t_2[t/x_k]$
- $(\neg\psi)[t/x_k] = (\neg\psi[t/x_k])$
- $(\psi_1 \ (\text{oppure } \wedge \text{ o } \vee \text{ o } \to)\ \psi_2)[t/x_k] = (\psi_1[t/x_k] \ (\text{oppure } \wedge \text{ o } \vee \text{ o } \to)\ \psi_2[t/x_k])$
- $(\forall x_i \varphi)[t/x_k] = \begin{cases} \forall x_i \varphi[t/x_k] & \text{se } x_i \neq x_k \\ (\text{oppure } \exists) & \\ \forall x_i \varphi & \text{se } x_i = x_k \\ (\text{oppure } \exists) & \end{cases}$

Nota: Quando scriviamo $\varphi[t/x_k]$ assumiamo che t sia sostituibile per x_k in φ. La scrittura non ha senso altrimenti.

Per esempio, detta φ la formula di prima:

libera — legate

$$\forall y\, \forall z\, (y \cdot z = x \to \exists x\, \exists t\ t = x+x+x \wedge y \cdot s(t) = y \cdot y + t)$$

La formula $\varphi[t+t/x]$ è

$$\forall y\, \forall z\, (y \cdot z = t+t \to \exists x\, \exists t\ t = x+x+x \wedge y \cdot s(t) = y \cdot y + t)$$

che ragionevolmente equivale a

$$\forall y\, \forall z\, (y \cdot z = t+t \to \exists x\, \exists n\ n = x+x+x \wedge y \cdot s(n) = y \cdot y + n)$$

Esercizio (noioso)

$$M \models \{v\}\varphi[t/x_k] \iff M \models \{v[\{v\}_M t/x_k]\}\varphi$$

Ossia: sostituire t al posto di x_k ha il medesimo effetto che ha valutare t e assegnare, nell'ambiente, il valore di t alla variabile x_k

Questo asserto si dimostra precisamente come l'osservazione che $M \models \{v_1\}\varphi \iff M \models \{v_2\}\varphi$ se v_1 e v_2 coincidono sulle variabili libere di φ, ma con più pasticcio di notazioni. Ci servirà per giustificare una delle regole di deduzione.

Teoria

Def Una L-teoria è un insieme di L-formule.

Def La L-struttura M è un modello della L-teoria T, in simboli $M \models T$, se $\forall \varphi \in T \quad M \models \varphi$.

Def La L-formula φ è conseguenza logica della L-teoria T, in simboli $T \models \varphi$, se per ogni modello M di T vale $M \models \varphi$.

Nota. Il simbolo $\models$ si può usare anche con la teoria vuota a sinistra. Scrivere $\models \varphi$ equivale a dire che φ è logicamente valida.

Def Una L-teoria è *coerente* se ha un modello.

Oss T è coerente se e solo se $T \not\vdash \bot$

Def La L-teoria T è *completa* se, per ogni L-formula chiusa φ, vale una e una sola delle seguenti: $T \vdash \varphi$ oppure $T \vdash \neg\varphi$.

Oss Una teoria completa è automaticamente coerente.

Esempi di teoria

È facile costruire una teoria incoerente, per esempio prendendo come *assioma* il falso: $T = \{\bot\}$. Non sempre, però, è facile distinguere l'incoerenza.

Es Dimostra che la teoria, nel linguaggio $\{f, \alpha, \beta\}$ dove f è un simbolo di funzione binaria, e α β sono simboli di costante, data dagli assiomi seguenti

$$\forall x \forall y \exists z \forall t \quad f(x, f(y,t)) = f(z,t)$$

$$\forall x \quad f(\alpha, x) = f(x,x)$$

$$\forall x \quad \neg f(\beta, x) = x$$

non è coerente.

Per un esempio coerente possiamo considerare la teoria dei gruppi, i cui modelli saranno tutti e soli i gruppi.

Def (teoria dei gruppi) $L_{gruppi} = \{e, \cdot, -, \cdot^{-1}\}$

$T_{gruppi} = \{ \forall x \forall y \forall z \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

$\forall x \ x \cdot e = x \qquad \forall x \ e \cdot x = x$

$\forall x \ x \cdot x^{-1} = e \qquad \forall x \ x^{-1} \cdot x = e \}$

Es. Convinciti del fatto che una struttura G è modello di T_{gruppi} se e solo se G è un gruppo.

La teoria dei gruppi è chiaramente coerente: basta basta esibire un gruppo qualunque per averne un modello. Questa non è una teoria completa, infatti ci sono gruppi in cui vale $\varphi = \forall x \forall y \ x \cdot y = y \cdot x$ e ce ne sono in cui vale $\neg\varphi$. Un esempio di teoria completa si può ottenere considerando tutte le formule vere in una certa struttura

Def Data una L-struttura M, la *teoria completa di M*, denotata $Th(M)$ è l'insieme di tutte le L-formule φ tali che $M \models \varphi$.

Oss $Th(M)$ è una teoria completa.

Si potrebbe pensare, a prima vista, che una teoria completa caratterizzi un certo modello, a meno di isomorfismi. Non è così, se non nel caso finito.

Def (Morfismi di strutture)
Date due L-strutture $M = (D; \dots)$ e $M' = (D'; \dots)$, un **morfismo** $F : M \to M'$ è una funzione $F : D \to D'$ tale che

- Per ogni simbolo di relazione r, e $(x_1 \dots x_{ar(r)}) \in D^{ar(r)}$
$$(x_1 \dots x_{ar(r)}) \in r_M \implies (F(x_1) \dots F(x_{ar(r)})) \in r_{M'}$$
- Per ogni simbolo di funzione f, e $(x_1 \dots x_{ar(f)}) \in D^{ar(f)}$
$$F \circ f_M (x_1 \dots x_{ar(f)}) = f_{M'} (F(x_1) \dots F(x_{ar(f)}))$$

Def (Immersioni & isomorfismi di strutture)
Un morfismo di L-strutture F si dice **immersione** se F, come funzione fra i domini, è iniettiva.
Un'immersione F è un **isomorfismo** se F è altresì suriettiva, e F^{-1} è, a sua volta, un morfismo.

Es. Dimostra che, se T è completa e M è un modello di T avente dominio finito, allora tutti i modelli di T sono isomorfi a M.

Se T ha un modello infinito, però, ne ha almeno uno per ogni cardinalità maggiore o uguale a $|L|$. Questo risultato, che vedremo più avanti, preclude una volta per tutte la possibilità di caratterizzare una struttura per mezzo di una teoria del primo ordine.

Quanto a caratterizzare, il meglio che possiamo sperare è di esibire teorie complete, ossia caratterizzare non una struttura, bensì l'insieme degli enunciati veri in una struttura. La teoria degli ordini totali densi senza estremi è un esempio di teoria completa descritta esplicitamente che ha modelli infiniti.

Def (teoria degli ordini totali densi senza estremi)

$L_{otdse} = \{<\}$

$T_{otdse} = \{ \forall x \forall y \forall z \; x<y \wedge y<z \to x<z$ } ordini

$\forall x \neg x<x$

$\forall x \forall y \; x<y \vee x=y \vee y<x$ totali

$\forall x \forall y \; x<y \to \exists z \; x<z \wedge z<y$ densi

$\forall x \exists y \; x<y$

$\forall x \exists y \; y<x$ } senza estremi $\}$

Es. Leggi nella prossima sezione come dimostrare che T_{otdse} è completa.

Altre due teorie rilevanti per questo corso sono due sottoinsiemi di $Th(\mathbb{N}; 0, s, +, \cdot)$, dove s rappresenta la funzione successore: l'aritmetica di Peano (PA) e la teoria Q di Robinson. Entrambe sono teorie nel linguaggio dell'aritmetica $L_{arit} = \{0, S, +, \cdot\}$.

Def (PA & Q di Robinson)

Le $L_{ar,t}$-teorie PA e Q hanno in comune i seguenti assiomi:

Q_1: $\forall x \neg s(x) = 0$ — zero non è successore

Q_2: $\forall x \forall y \; s(x) = s(y) \to x = y$ — il successore è iniettivo

Q_3: $\forall x \; x + 0 = x$

Q_4: $\forall x \forall y \; x + s(y) = s(x + y)$

} definizione ricorsiva di +

Q_5: $\forall x \; x \cdot 0 = 0$

Q_6: $\forall x \forall y \; x \cdot s(y) = x \cdot y + x$

} definizione ricorsiva di ·

A $Q_{1\text{-}6}$, la teoria Q aggiunge il seguente assioma

Q_7: $\forall x \; x = 0 \vee \exists y \; x = s(y)$ — ogni numero eccetto 0 è successore

Mentre PA aggiunge a $Q_{1\text{-}6}$ il seguente schema di induzione

$I\varphi$: $\left(\varphi[0/x_k] \wedge \forall x_k \; \varphi \to \varphi[s(x_k)/x_k] \right) \to \forall x_k \; \varphi$

Ossia PA contiene una formula $I\varphi$ per ogni possibile $L_{ar,t}$-formula φ e ogni possibile variabile x_k.

Notazione Se indichiamo una formula qualunque con la scrittura $\varphi(x)$ è per dire che, quando poi scriveremo $\varphi(t)$, intenderemo $\varphi[t/x]$. Così lo schema di induzione si può scrivere più familiarmente

$$\left(\varphi(0) \wedge \forall x \; \varphi(x) \to \varphi(s(x)) \right) \to \forall x \; \varphi(x)$$

al variare di $\varphi(x)$ fra tutte le formule e di x fra tutte le variabili.

Es. Convincitì del fatto che $\mathbb{N} \models PA$ e $\mathbb{N} \models Q$

Es. Dimostra che $PA \models Q_7$, quindi tutti i modelli di PA sono modelli di Q.

Es. Trova un modello di Q che non è modello di PA, deduci che Q non è completa.

Per l'esercizio precedente, Q non è completa, ma, a prima vista, si potrebbe pensare che PA lo sia. Infatti è ben noto che il principio di induzione

$$\forall X \subseteq \mathbb{N} \; (0 \in X \wedge \forall n \in \mathbb{N} \; n \in X \to S(n) \in X) \to X = \mathbb{N}$$

caratterizza $\mathbb{N}$ a meno di isomorfismi. Tuttavia non è così, e PA non è completa: questo è il famoso *primo teorema di incompletezza di Gödel*. Come è possibile? Il guaio sta nel fatto che il principio di induzione scritto qua sopra, che potremmo chiamare *induzione al secondo ordine*, fa riferimento ad ogni possibile sottoinsieme X di $\mathbb{N}$. Lo schema di induzione di PA, d'altro canto, lavora solo sui sottoinsiemi $X = \{n \mid \varphi(n)\}$ per qualche L_{ar}-formula φ, e questi sono molti meno di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$, perché c'è solo una quantità numerabile di formule. La dimostrazione dell'incompletezza di PA è non banale, e si vedrà in questo corso.