https://ciovil.li/logica23

$(x < y \wedge y < z) \to x < z$

$\neg\, x < x$

$x < y \vee x = y \vee y < x.$

$x < y \to \exists z \;\; x < z \wedge z < y$

$\forall x \exists y \;\; y < x \qquad \forall x \exists y \;\; x < y$

Def Due L-formule sono equivalenti in T

$T, \varphi \vdash \psi$ e $T, \psi \vdash \varphi$

$T \vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ ← esercizio

Def La teoria T ha l'eliminazione dei quantificatori

se per ogni formula φ esiste una f. ψ senza quantificatori T-equivalente a φ

Def φ senza quant. è in **forma normale disgiuntiva** (DNF) se

$$\varphi = \underbrace{(A_{11} \wedge A_{12} \wedge \dots)}_{\text{clausola}} \vee \underbrace{(A_{21} \wedge A_{22} \wedge \dots)}_{\text{clausola}} \vee \dots$$

A_{ij}: atomica o $\neg$ atomica

Es. Ogni formula senza quant. è equivalente a una formula in DNF

$$p(x,y) = \forall z \; z < x \to \exists t \; \neg (t < y \to t < z)$$

$$A \to B \iff B \vee \neg A$$

$$\neg (t < y \to t < z)$$

$$\neg (t < z \vee \neg t < y)$$

$$\neg (A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B)$$

$$\neg t < z \wedge \neg \neg t < y$$

$$\neg t < z \wedge t < y$$

$$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$\forall z \; z < x \to \exists t \; \underbrace{\neg t < z}_{z \leq t} \wedge t < y$$

$$\forall z \; z < x \to \exists t \; z \leq t \wedge t < y \qquad z < y$$

$$\iff \top$$

$$\exists t \; C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_n$$

$$(\exists t \; C_1) \vee (\exists t \; C_2) \vee \dots \vee (\exists t \; C_n)$$

$$\forall z \; z < x \to z < y$$

$$\forall z \; z < x \to z < y$$

$$\forall x \, p \iff \neg \exists x \, \neg p$$

$$\neg \exists z \, \neg (z < x \to z < y)$$

$$z < y \vee \neg z < x$$

$$\neg z < y \wedge z < x$$

$$y \leq z \wedge z < x$$

$$\neg \exists z \; y \leq z \wedge z < x$$

$$\boxed{\neg y < x}$$

Def $L = \{0, S, \dots + \dots, \dots \cdot \dots\}$

$PA = \{ \neg \exists x \; S(x) = 0$

$S(x) = S(y) \to x = y$

$x + 0 = x$

$x + S(y) = S(x + y)$

$x \cdot 0 = 0$

$x \cdot S(y) = x \cdot y + x$

$(\forall x \; \varphi(x) \to \varphi(S(x))) \wedge \varphi(0) \to \forall x \; \varphi(x) \}$

↑ schema di assiomi

$(\forall x \; \varphi \to \varphi[S(x)/x]) \wedge \varphi[0/x] \to \forall x \; \varphi$

$Q = \{ \neg \exists x \; S(x) = 0$

$S(x) = S(y) \to x = y$

$x + 0 = x$

$x + S(y) = S(x + y)$

$x \cdot 0 = 0$

$x \cdot S(y) = x \cdot y + x$

$\neg x = 0 \to \exists y \; x = S(y)$ $\}$

Γ di Robinson

Def Sia I un insieme. Un **filtro** su $\mathcal{P}(I)$ è $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ tale che

- $\emptyset \notin F$ $\quad I \in F$
- $A \in F \wedge A \subseteq B \to B \in F$
- $A, B \in F \to A \cap B \in F$

Un **ultrafiltro** è un filtro t.c.

- $A \notin F \to I \setminus A \in F$

Es (filtro) $I = \mathbb{N}$ — (ultra) filtro **PRINCIPALE**

$F = \{ A \subseteq \mathbb{N} \mid 42 \in A \}$

$F = \{ A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} \setminus A| < \aleph_0 \}$

Prop Se F è un filtro su $\mathcal{P}(I)$ allora esiste un ultrafiltro $U \supseteq F$ su $\mathcal{P}(I)$.

Dim (idea)

1. $I \setminus A \notin F \to$ esiste un filtro $F' \supseteq F$ t.c. $A \in F'$.

$C \in F' \overset{\text{def.}}{\iff} \exists B \in F \quad C \cap A = B \cap A$

2. U_{50} Zorn per ogni $U \supseteq F$ filtro massimale per inclusione

3. U_{50} 1. per dire che U è ultrafiltro.

□

Cs Esiste un ultrafiltro

$$U \supseteq \{ A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} \setminus A| < \aleph_0 \}$$

Def $L = (r_J, f_J)$ linguaggio

$M_i = (S_i ; L)$ L-struttura per $i \in I$

U ultrafiltro su $\mathcal{P}(I)$

$$\prod_{i \in I} M_i / U = \left(\prod_{i \in I} S_i / U \; ; \; r_J/U \; , \; f_J/U \right)$$

$$a, b \in \prod_{i \in I} S_i \qquad a \sim_U b \overset{def.}{\iff} \{ i \in I \mid a_i = b_i \} \in U$$

$$r_J/U \left([a_1]_\sim \dots [a_n]_\sim \right) \overset{def.}{\iff} \{ i \in I \mid r_J(a_{1i} \dots a_{ni}) \} \in U$$

$$f_J/U \left([a_1]_\sim \dots [a_n]_\sim \right) \overset{def.}{=} \left[\{ f_J(a_{1i} \dots a_{ni}) \}_{i \in I} \right]_\sim$$

Łoś (Łoś')

$\forall i \in I \quad M_i \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \prod M_i / U \models \varphi$