6 [Intro

6 [Model Th. baby Nonstandard

6 [Computability

6 [Gödel etc.

Def $L = (r_J, f_J)$ linguaggio

$M_i = (S_i ; L)$ L-strutture per $i \in I$

U ultrafiltro su $\mathcal{P}(I)$

$$\prod_{i\in I} M_i / U = \left(\prod_{i\in I} S_i / U \; ; \; r_J/U \; , \; f_J/U \right)$$

$$a, b \in \prod_{i\in I} S_i \qquad a \sim_U b \overset{def.}{\iff} \{ i \in I \mid a_i = b_i \} \in U$$

$$r_{J/U}\left([a_1]_\sim \dots [a_n]_\sim \right) \overset{def.}{\iff} \{ i \in I \mid r_J(a_{1i} \dots a_{ni}) \} \in U$$

$$f_{J/U}\left([a_1]_\sim \dots [a_n]_\sim \right) \overset{def.}{=} \left[\{ f_J(a_{1i} \dots a_{ni}) \}_{i\in I} \right]_\sim$$

Teo (Łoś)

$$\forall i \in I \;\; M_i \models \varphi \implies \prod M_i / U \models \varphi$$

Es. $(\mathbb{N}^*)$

Consideriamo U ultr. non princ. su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Es. Esiste un ultraf. non princ. su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Dim. Sia $F = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |\mathbb{N} \setminus X| < \aleph_0\}$

Completo F a un ultrafiltro U.

Dico che U non è principale.

Assurdo: se $\{37\} \in U$ ($\in F$ (cofinit.))

$$\emptyset = \{37\} \cap \overline{\{37\}} \in U$$

Es. $(\mathbb{N}^*)$ $\quad (\mathbb{N}; 0, 1, +, \cdot, s)$

Consideriamo U ultr. non princ. su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\mathbb{N}^* = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{N} / U$$

Def. $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$[\sigma] = \{\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \{i \mid \sigma_i = \tau_i\} \in U\}$$

Supponiamo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ sia un iso.

$$f(0) = [(0, 0, 0, \dots)]$$

$$f(n) = [(n, n, n, \dots)]$$

$$[(0, 1, 2, 3, \dots)]$$

$$[(n, n, n, \dots)]_{\mathcal{U}} \overset{?}{=} [(0, 1, 2, 3, \dots)]_{\mathcal{U}}$$

$$\rotatebox{90}{$=$}$$

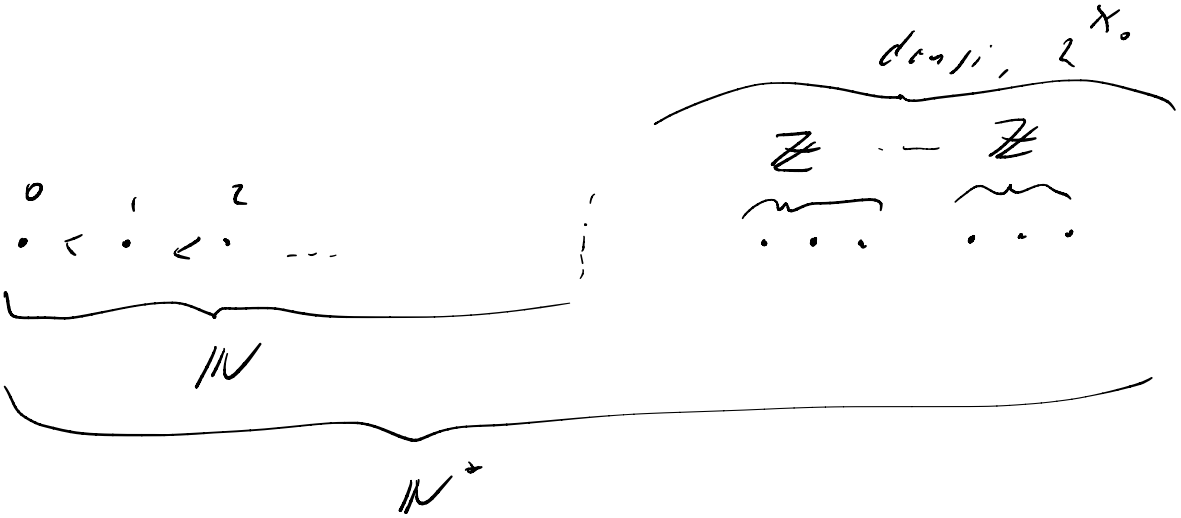
$$\{n\} = \{i \mid n = i\} \in \mathcal{U}$$

"$x < y$" $\equiv \varphi(x,y) = \exists z \;\; y = x + s(z)$

"$\varphi(x,y)$ è un ordine totale"

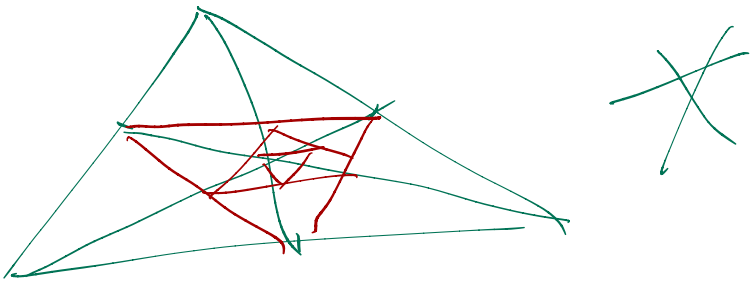
$$\psi = \Big(\forall x \forall y \forall z \;\; \varphi(x,y) \wedge \varphi(y,z) \to \varphi(x,z)\Big) \wedge \dots$$

$$\mathbb{N} \models \psi \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{N}^* \models \psi$$



Es $(\mathbb{R}^*)$ $\quad (\mathbb{R}, <, 0, 1, +, \cdot)$

$\mathbb{R}^* = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} / \mathcal{U}$



Teo (Ax-Grothendieck)

Sia $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ funzione polinomiale

se f è iniettiva allora è suriettiva.

Fatto: Due campi alg. chiusi di caratt. 0 sono isomorfi se hanno basi di trascendenza equipotenti.

Fatto $\quad \overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^k}$ — Chiusura algebrica.

— Nel linguaggio $\{0, 1, +, \cdot\}$

$\prod \overline{\mathbb{F}}_{p_i} / \mathcal{U} = \mathbb{C}$

$\|$

F

- F è un campo, poiché la teoria dei campi è assiomatizzata al primo ordine, e tutti i fattori sono campi
- F è alg. chiuso ← si scrive al primo colpo

$$\forall a,b,c,d \quad \exists x \quad x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

- $\mathrm{char}(F) = 0$

Calcolo $\underbrace{1+1+1\dots}_{p \text{ volte}}$ in F

$$\underbrace{[(1,1,1\dots)] + [(1,1,1\dots)] + \dots}_{p \text{ volte}}$$

$$[(\underbrace{1+1+1\dots}_{p \text{ volte}}, 1+1\dots, \dots)] \overset{?}{\neq} [(0,0,0\dots)]$$

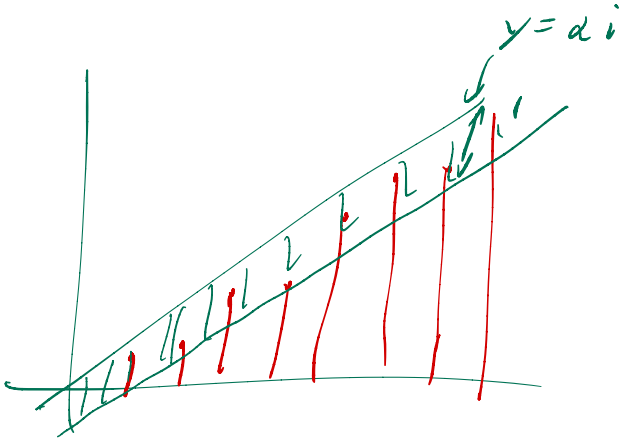
$$\{i \mid \overline{F}_{p_i} \models \underbrace{1+1+1\dots}_{p \text{ volte}} = 0\} \notin U$$

$$\{\bar{i}\} \quad \leftarrow p_{\bar{i}} = p$$

- Resta da dire che $|F| = 2^{\aleph_0}$

$0, 1 \dots, i \in \mathbb{F}_{p_i}$

$f : [0,1]_{\mathbb{R}} \ni \alpha \longmapsto \{\lfloor i \cdot \alpha \rfloor\}_i$



$\alpha \neq \beta \Rightarrow \exists N \quad \forall i > N \quad f(\alpha)_i \neq f(\beta)_i$

$\lfloor \alpha \cdot i \rfloor \qquad \lfloor \beta \cdot i \rfloor$

$\prod \mathbb{F}_{p_i} / U = \mathbb{C}$

"$\forall f : F^n \to F^n$ poly in. $\Rightarrow f$ sur."

"Per qualunque grado fissato d

$\forall f : F^n \to F^n$ polin. di deg d, f in $\Rightarrow f$ sur."

$$\forall a_{1,0} \dots a_{1,d},\ a_{2,0} \dots a_{2,d} \dots a_{n,0} \dots a_{n,d}$$

$$\Big(\forall x_1 \dots x_n\ y_1 \dots y_n$$

$$\Big(a_{1,0} + a_{1,1}x + a_{1,2}x^2 + \dots = a_{1,0} + a_{1,1}y + \dots$$

$$\vdots$$

$$\Big)$$

$$\to \big(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \big)\Big)$$

$$\to \Big(\forall y_1 \dots y_n \ \exists x_1 \dots x_n$$

$$a_{1,0} + a_{1,1}x + a_{1,2}x^2 + \dots = y_1$$

$$\vdots$$

$$= y_n\Big)$$

Devo dire che

"$\forall f : \overline{\mathbb{F}_p}^n \to \overline{\mathbb{F}_p}^n$ poly in. $\to f$ sur."

Sia $f : \overline{\mathbb{F}_p}^n \to \overline{\mathbb{F}_p}^n$ poly in.

Siccome $\overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup \mathbb{F}_{p^N}$ i coefficienti di f sono in qualche $\mathbb{F}_{p^{k_0}}$ quindi

$$f|_{\mathbb{F}_{p^N}} : \mathbb{F}_{p^N}^n \to \mathbb{F}_{p^N}^n \quad \text{con } k_0 \mid N$$

Quella sono iniettive, quindi sono suriettive

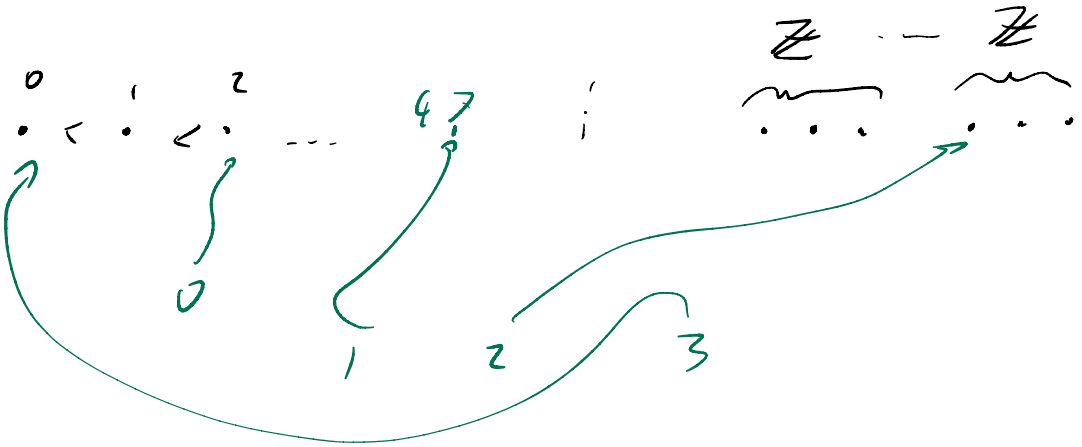
Dato $x \in \overline{\mathbb{F}_p}$ esiste n t.c. $x \in \mathbb{F}_{p^n}$,

considero $\mathbb{F}_{p^{n!}}$ e $x \in \mathrm{Im}(f|_{\mathbb{F}_{p^{n!}}})$

quindi $x \in \mathrm{Im}(f)$.

Inv

Non c'è un modello computabile non standard di PA.



0 1 2 3 4

0 1 0 0 1 0 0 0 1

1 a 3 4 a 5