$\langle a, b, c \rangle = cons\,(a, cons\,(b, cons\,(c, 0)))$

$R(x, y)$ r.r.

$f(x_1, x_2) = \#\{y < x_1 \mid R(\bar{x}, y)\}$ è r.r.

$f(x, n) = (cdr)^n(x)$ ←

$f(x, 0) = x$

$f(x, n+1) = cdr(f(x, n))$

$s \longmapsto \#\{n \leq s \mid (cdr)^n(s) \neq 0\}$

Fatto Esistono funzioni calcolabili non p.r.

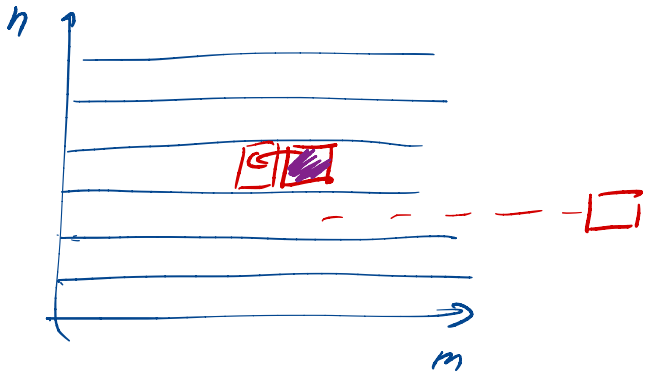
$$n \longmapsto f_n(n) + 1$$

$f(m, 0) = m + 1$

$f(0, n) = 1$

$f(m+1, n+1) = f(f(m, n+1), n)$

T. di Ackermann



$$g(n) = f(n, n)$$

Def $\mathbb{N}_\perp \stackrel{def.}{=} \mathbb{N} \cup \{\perp\}$

Def La classe delle f. ricorsive è il più piccolo insieme delle funzioni $\mathbb{N}_\perp^k \to \mathbb{N}_\perp$ per qualche k che contiene

$$\pi_i^k(x_1 \dots x_k) = \begin{cases} x_i & \text{se } (x_1 \dots x_k) \in \mathbb{N}^k \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$s(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ \perp & \text{se } x = \perp \end{cases}$$

$$o(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ \perp & \text{se } x = \perp \end{cases}$$

Chiuso per

- composizione
- ricorsione primitiva

$$f(x_1 \dots x_n, 0) = h(x_1 \dots x_n)$$

$$f(x_1 \dots x_n, y+1) = g(x_1 \dots x_n, y, f(x_1 \dots x_n, y))$$

$$f(x_1 \dots x_n, \perp) = \perp$$

- minimalizzazione

Se $f : \mathbb{N}_\perp^{k+1} \to \mathbb{N}_\perp$ è ricorsiva allora

$\mu_{x_{k+1}} (f(x_1 \dots x_{k+1}) = 0)$ è ricorsiva

$\mu_{x_{k+1}} (f(x_1 \dots x_{k+1}) = 0)(a_1 \dots a_k) = b \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow$ def.

$f(a_1 \dots a_k, b) = 0 \wedge \forall x < b \quad f(a_1 \dots a_k, x) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\nearrow$

in particolare $\neq \perp$

$\mu_{x_{k+1}} (f(x_1 \dots x_{k+1}) = 0)(a_1 \dots a_k) = \perp$ altrimenti

Def $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ è ricorsiva **totale** se f è ricorsiva e $Im(f|_{\mathbb{N}^k}) \subseteq \mathbb{N}$.

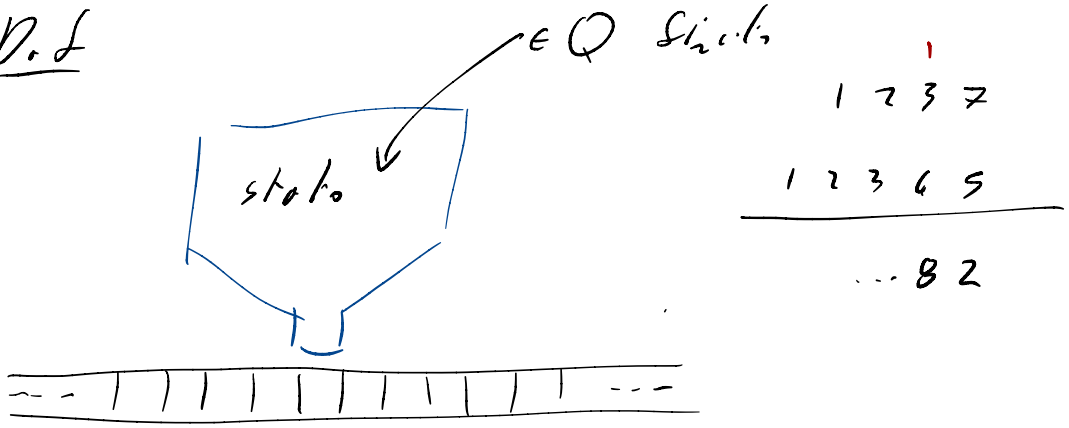
Fatto

PR. $\subsetneq$ ricorsive totali $\subsetneq$ ricorsive

Def $A \subseteq \mathbb{N}^k$ è

- decidibile se esiste $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ n.c. t.c. $A = \{\bar{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\bar{x}) = 0\}$
- semidecidibile se esiste $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}_\perp$ n.c. t.c. $A = \{\bar{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\bar{x}) = 0\}$

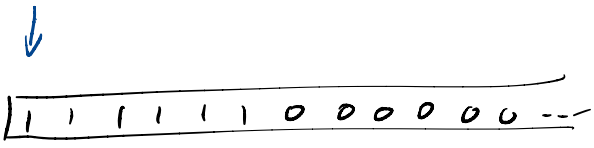
Def

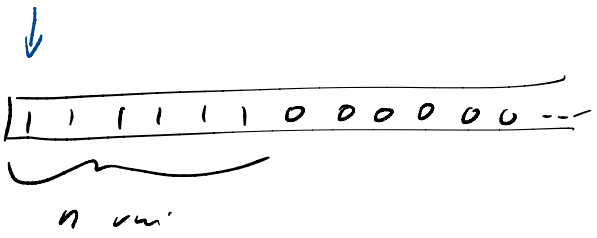


1 2 3 7

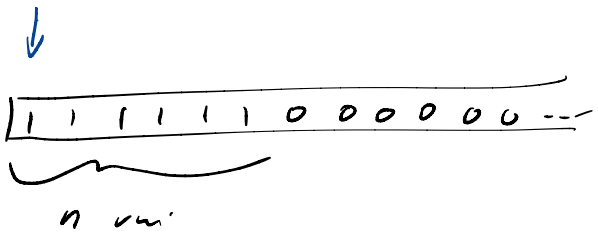
1 2 3 6 5

... 8 2





			simboli: 0			1		
	stop	S_0	S_0	0	↓	S_0	1	↓
stato	start	S_1	S_0	1	↓	S_1	1	→



			simboli: 0			1		
	stop	S_0	S_0	0	↓	S_0	1	↓
stato	start	S_1	S_0	1	↓	S_2	0	→
		S_2	S_3	1	←	S_2	1	→
		S_3	S_0	1	↓	S_3	1	←

Def (Macchina di Turing)

Siano Σ (simboli) e Q (stati) ins. finiti, $0 \in \Sigma$

Una macchina di Turing M è il dato di una funzione

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q \times \Sigma \times \{\overset{0}{\leftarrow}, \overset{1}{\downarrow}, \overset{2}{\rightarrow}\}$$

Una configurazione di M è una tripla

(s, p, n) con $s \in Q$

$p \in \mathbb{N}$

$n \in \{t \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \#\{i \mid t_i \neq 0\} < \aleph_0\}$

$$(s, p, n) \xrightarrow{M} (s', p', n')$$

δ det.

$$s' = \delta(s, n(p))_1$$

$$p' = p + \delta(s, n(p))_3 \dot{-} 1$$

$$n'(i) = \begin{cases} \delta(s, n(p))_2 & i = p \\ n(i) & i \neq p \end{cases}$$

$$n' = n\left[\delta(s, n(p))_2 / p\right]$$

$conf \xrightarrow{M^k} conf'$

$\Updownarrow$ def

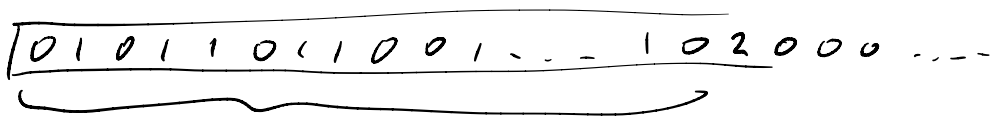
$conf = conf' \wedge k = 0$

$\exists \widetilde{conf} \quad conf \xrightarrow{M^n} \widetilde{conf} \xrightarrow{M} conf' \wedge k = n+1$

$conf \xrightarrow{M^*} conf'$

$\exists k \quad conf \xrightarrow{M^k} conf'$

Es. costruisci una T.M che riceve in input



$\sigma \in \{0,1\}^*$

e produce 00... o 1... secondo che σ sia o no palindroma.

B) (difficile)

Dimostrare che la TM precedente RICHIEDE

$O(n^2)$ passi (worst case)