$$cons(a,b) = \frac{(a+b+1)(a+b)}{2} + 1$$

$\mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^{>0}$ $\qquad car(0) = cdr(0) = 0$

$car(cons(a,b)) = a \qquad cdr(cons(a,b)) = b$

$\langle a_1\ a_2 \dots a_n\rangle \overset{def.}{=} cons(a_1, cons(a_2, \dots cons(a_n, 0)\dots))$

$nth(\langle a_0 \dots a_{n-1}\rangle, i) = a_i$

$length(\langle a_1 \dots a_n\rangle) = n$

$cat(\langle a_1 \dots a_n\rangle, \langle b_1 \dots b_m\rangle) = \langle a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_m\rangle$

$head(\langle a_1 \dots a_n\rangle, k) = \langle a_1 \dots a_k\rangle$

Teo Esiste una funzione ricorsiva U t.c.
per ogni $f:\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ Turing computabile
esiste $\ulcorner f \urcorner \in \mathbb{N}$ tale che
$\forall x_1 \dots x_n \in \mathbb{N}^n \quad f(x_1 \dots x_n) = U(\ulcorner f \urcorner, \langle x_1 \dots x_n\rangle)$

Con Se $f:\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ è T.C. allora è ricorsiva

Dim $f(x_1 \dots x_n) = U(\ulcorner f \urcorner, cons(x_1, cons(x_2 \dots)))$

Def (Turing)

Codifica della T.M.

configurazione = < stato, posizione, nastro >

$< s_0, s_1, \ldots s_n >$

$s_0 \ldots s_n \, 0 \, 0 \, 0 \ldots$

$nth(\ulcorner \delta \urcorner, < stato, simb >) = < stato', simb', spost. >$

$\delta(stato, simb) = (stato', simb', spost.)$

Lem

Esiste una f. primitiva ricorsiva step t.c.

per ogni δ funzione di transizione di una

TM M, e ogni c codifica di una conf.

di M

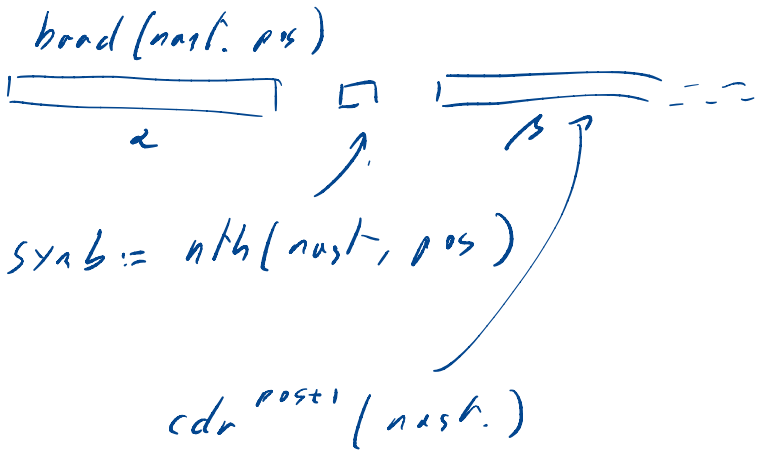
$$c \xrightarrow{M} step(\ulcorner \delta \urcorner, c)$$

Dim

$st. = nth(c, 0)$

$pos. = nth(c, 1)$

$nastro = nth(c, 2)$

$nastro = nth(c, 2) =$ 

$nth(\ulcorner \delta \urcorner, \langle st, symb \rangle) = \gamma$

$st' = nth(\gamma, 1)$

$symb' = nth(\gamma, 2)$

$spost. = nth(\gamma, 3)$

$stm(\ulcorner \delta \urcorner, c) = \langle st', (pos + spost.) \dot{-} 1, cat(\alpha, cons(symb', \beta)) \rangle$

Fissiamo f Turing comp., $\ulcorner f \urcorner$ codice di f.

$K, \ulcorner f \urcorner, c \longmapsto stop^K(\ulcorner f \urcorner, c)$ è p.r.

$nth(stop^K(\ulcorner f \urcorner, c), 0) = 0 \iff$ "$f(c)$ termina in K passi"

$$\ulcorner f \urcorner, c \longmapsto \mathcal{M}_k\left(\mathrm{nth}\left(\mathrm{step}^k\left(\ulcorner f \urcorner, c\right), 0\right) = 0 \right)$$

$$\underbrace{\mathcal{M}_k\left(\mathrm{nth}\left(\mathrm{step}^k\left(\ulcorner f \urcorner, \square\right), 0\right) = 0 \right)}$$

$$\ulcorner f \urcorner, \langle x_1 \dots x_n \rangle \longmapsto \mathrm{conta_uni}\left(\mathrm{nth}\left(\mathrm{step}\left(\ulcorner f \urcorner, \square\right), 2\right)\right)$$

$$\square := \mathrm{programma_input}\left(\langle x_1 \dots x_n \rangle\right)$$



Cor. Per ogni k esiste $U_k : \mathbb{N}_\perp^{k+1} \to \mathbb{N}_\perp$ ricorsiva tale che per ogni $f : \mathbb{N}_\perp^k \to \mathbb{N}_\perp$ ricorsiva

$$U_k\left(\ulcorner f \urcorner, x_1 \dots x_k\right) = f\left(x_1 \dots x_k\right)$$

N.B.

$$U_k\left(y, x_1 \dots x_k\right) = U\left(y, \langle x_1 \dots x_k \rangle\right) \qquad \mathrm{cons}(x_1, \mathrm{cons}(x_2 \dots))$$

Tesi di Church

Le funzioni ricorsive sono quelle "davvero computabili"

Cor Per ogni k esiste una S. p.r. $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $T_n : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ tali che

$$U_n(a, x_1, \dots x_n) \neq \perp \leftrightarrow \exists z \; T_n(a, x_1, \dots x_n, z) = 0$$

$$U_n(a, x_1, \dots x_n) = U\left(\mu_z \, T_n(a, x_1, \dots x_n, z) = 0\right)$$

Dim

$$\ulcorner f \urcorner, c \longmapsto \mu_k\left(\mathrm{nth}(\mathrm{step}''(\ulcorner f \urcorner, c), 0) = 0\right)$$

$$\mu_k\left(\mathrm{nth}(\mathrm{step}''(\ulcorner f \urcorner, \square), 0) = 0\right)$$

$$\ulcorner f \urcorner, \langle x_1 \dots x_n \rangle \longmapsto \mathrm{conta_uni}\left(\mathrm{nth}\left(\mathrm{step}^{\triangle}\left(\ulcorner f \urcorner, \square\right), 2\right)\right)$$

$$\square := \mathrm{prepara_input}(\langle x_1 \dots x_n \rangle)$$

$$T_n(a, x_1, \dots x_n, z) = 0 \leftrightarrow z = \langle k, y \rangle$$
$$\wedge \quad \mathrm{nth}(\mathrm{step}''(x, \square), 0) = 0$$
$$\wedge \quad \mathrm{conta_uni}\left(\mathrm{nth}\left(\mathrm{step}^{\triangle}(x, \square), 2\right)\right) = y$$

$$U(x) = \mathrm{nth}(x, 1)$$

Teo (punto fisso)

Sia $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ comput. totale allora esiste $\ulcorner f \urcorner$ tale che $U(\ulcorner f \urcorner, x) = U(h(\ulcorner f \urcorner), x)$

$\ulcorner f \urcorner \longmapsto \ulcorner g \urcorner$

$g(x+1) = (x+1) \cdot f(x)$

$g(0) = 1$

Def $X \subseteq \mathbb{N}^k$ semidecidibile

ricorsivo (parziale)

$f(x_1 \dots x_n) = 0 \iff (x_1 \dots x_n) \in X$

Def $X \subseteq \mathbb{N}^k$ è ricorsivamente enumerabile se esiste $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ricorsiva totale t.c.

$(x_1 \dots x_n) \in X \iff \exists y \; g(y) = \langle x_1 \dots x_n \rangle$

Prop $X \subseteq \mathbb{N}^k$ è

semidecidibile $\leftrightarrow$ ric. enum. $\leftrightarrow$ dom di una f. ric.

$\{(x_1 \dots x_n) \mid f(x_1 \dots x_n) \neq \perp\}$

Dim ESERCIZIO PER CASA.