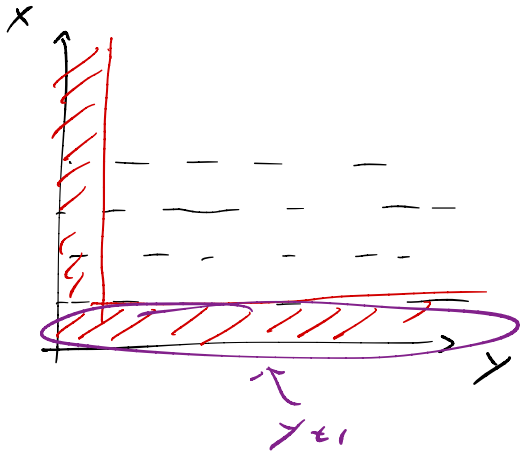
$A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$A(0, y) = y + 1$

$A(x+1, y) = A(x, 1)$

$A(x+1, y+1) = A(x, A(x+1, y))$



$$O(c, x, y) = \begin{cases} y + 1 & \text{se } x = 0 \\ U_2(c, x \dot{-} 1, 1) & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y = 0 \\ U_2(c, x \dot{-} 1, U_2(c, x, y \dot{-} 1)) & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \end{cases}$$

dato $\underline{c}$ esiste $\underline{d}$ $\forall x, y$ $O(c, x, y) = U_2(d, x, y)$

- Teo s-m-n $\Rightarrow$ una mappa $h : c \mapsto d$ è ric. tot.
- Teo di p. f. $\Rightarrow$ data h ric. tot. esiste α t.c.

$\forall x, y$ $U_2(\alpha, x, y) = U_2(h(\alpha), x, y)$

$$O(\alpha, x, y) = \begin{cases} y + 1 & \text{se } x = 0 \\ U_2(\alpha, x \dot{-} 1, 1) & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y = 0 \\ U_2(\alpha, x \dot{-} 1, U_2(\alpha, x, y \dot{-} 1)) & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \end{cases}$$

$=$

$U_2(\alpha, x, y)$

$x, y \mapsto U_2(\alpha, x, y)$

Teo (teorema s-m-n)

primitiva ricorsiva

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ esiste una f. ricorsiva totale

$$s_n^m : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$$

$\forall a, x, y$

$$\varphi_{m+n}(a, x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) = \varphi_n(s_n^m(a, x_1 \dots x_m), y_1 \dots y_n)$$

$$\varphi_2(a, x, y) = \varphi_1(s_1^1(a, x), y)$$

Dim

Ho bisogno di $m=1$ e ricorro

$$\varphi_{1+n}(a, x, y_1 \dots y_n) = \varphi_n(s_n^1(a, x), y_1 \dots y_n)$$

$D\, y_1 \dots y_n$ ---- $D\, x, y_1 \dots y_n$

$I \to \underbrace{exec_{n+1} \; S \to exec_{n+1} \; S \to \dots}_{x \text{ volte}}$ $\quad D\, y_1 \dots y_n\, x \hookrightarrow$

$\to \underbrace{push_{n+1,1} \to rem_{n+2,1} \to \dots}_{n \text{ volte}}$ $\quad D\, x\, y_1 \dots x_n$

$\to a$

Lemma Se α, β sono codici di TM, allora

$TM_{cat}: \alpha, \beta \mapsto$ "$\alpha \to \beta$" è p.r.

Dim

TM_{cat} deve

- calcolo il max stato di α $\longrightarrow m$
- rimpiazzo in α, lo stato 0 con $m+1$ $\longrightarrow \alpha'$
- rimpiazzo ogni stato $x \neq 0$ in β con $m+x \to \beta'$
- output: $cat(\alpha', \beta')$

∎

Teo (secondo teo. di punto fisso)

Data $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nic. totale, fissata $n \in \mathbb{N}$,

esiste α t.c.

$\forall x_1 \dots x_n \quad \varphi_n(\alpha, x_1 \dots x_n) = \varphi_n(h(\alpha), x_1 \dots x_n)$

$$U_1(x, x) = U_1(h(x), x)$$

ripp: $f \longmapsto h(f(f))$

$$ripp(ripp) = h(ripp(ripp))$$

$U_2(f, \cdot, \cdot)$

$$U_1(S_1'(f, f), \cdot) = U_2(f, f, \cdot)$$

$$U_1(h(S_1'(f, f)), x) = U_2(ripp, f, x)$$

$$U_2(ripp, ripp, x) = U_1(h(S_1'(ripp, ripp)), x)$$

$$U_1(S_1'(ripp, ripp), x)$$

$$U_1(x, x) = U_1(h(x), x)$$

$\square$

Per $X \subseteq \mathbb{N}^r$ è

semidecidibile $\leftrightarrow$ r.c. ranm. $\leftrightarrow$ dom di una f. r.c.

$\uparrow$

$\{(x_1 \dots x_n) \mid f(x_1 \dots x_n) \neq \perp\}$

Dim

$\rightarrow$ $X = \{n \mid f(n) = 0\} \Rightarrow k$ (ricorsiva (parziale))

$n \in X \leftrightarrow f(n) = 0 \leftrightarrow \exists z \; T_1(\lceil f \rceil, n, z) = 0 \wedge U(z) = 0$

$\leftrightarrow \exists t \; g(t) = n$ (g è P.R.)

$$g(t) = \begin{cases} nth(0,t) & \text{se } T_1(\lceil f \rceil, nth(0,t), nth(1,t)) = 0 \\ & \wedge\ U(nth(1,t)) = 0 \\ k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\leftarrow$ $X = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ (r.c. $\neq \emptyset$)

$n \in X \leftrightarrow \exists x \; f(x) = n \leftrightarrow \exists x \; g(x) = 0$

$g = 0(\mu_x(f(x) = n))$

$\mu_x((f(x) \dot{-} n) + (n \dot{-} f(x)) = 0)$

Es $TOT := \{ x \mid \cdot \longmapsto \varphi_1(x, \cdot) \text{ è totale} \}$

dimostrare che TOT non è semidecidibile.

Sol. Suppongo che $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sia tot. crescente

TOT, e cerco un aggancio.

$$g : \quad x \longmapsto \varphi_1(f(x), x) + 1$$

$$g(x) = \varphi_1(f(x), x)$$

$$g(\alpha) = \varphi_1(f(\alpha), \alpha)$$

$$\| \quad \varphi_1(f(\alpha), \alpha) + 1$$

Es A decid. $\neq \emptyset \iff A$ è im. di una f. tot. crescente

Es $\exists\, A, B \neq \emptyset$ t.c. non c'è X decidibile con $A \subseteq X$ e $B \cap X \neq \emptyset$.